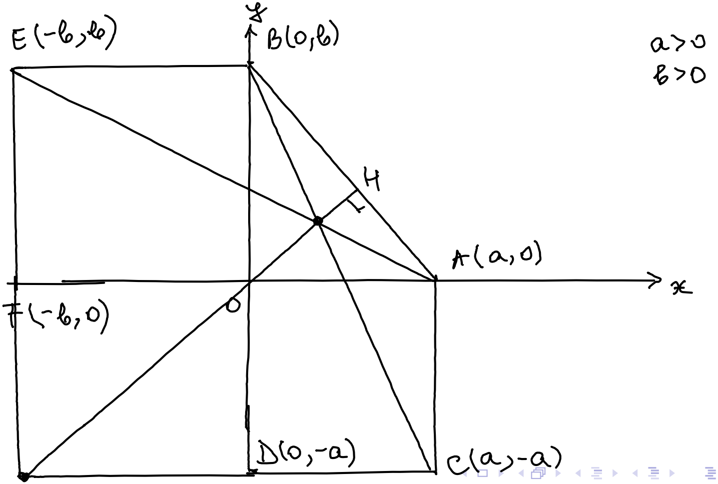
Geometrie Analitică

Dr.Veronica Oana Nechita

Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca

12 martie 2022

1. Pe catetele OA și OB ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în exterior pătratele $OACD$ și $OBEF$.
Să se demonstreze că dreptele EF, CD se intersectează într-un punct situat pe înălțimea OH; la fel dreptele AE, BC.



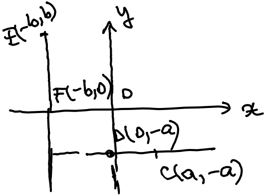
$A(a,0)$, $B(0,b)$, $E(-b,b)$, $F(-b,0)$, $C(a,-a)$, $D(0,-a)$
$O(0,0)$

⊙ OH, EF, CD concurente

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp AB \iff m_{OH}\cdot m_{AB} = -1 \\ m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{b-0}{0-a} = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow m_{OH} = -\dfrac{1}{m_{AB}} = \dfrac{a}{b}$$

$$OH:\ y - y_0 = m_{OH}(x - x_0)$$

$$OH:\ y = \frac{a}{b}x \iff OH:\ by = ax \iff OH:\ ax - by = 0$$



$$EF:\ x = -b \iff EF:\ x + b = 0$$

$$CD:\ y = -a \iff CD:\ y + a = 0$$

$$\begin{cases} ax - by = 0 \\ x + b = 0 \\ y + a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -ab + ab = 0 \\ x = -b \\ y = -a \end{cases}$$

$M(-b,-a)$

- AE, BC, OH concurente

$OH: \ ax - by = 0$

$$AE: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_E & y_E & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff AE: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ -b & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff AE: \ ab - by - bx - ay = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\iff AE: \ bx + (a+b)y - ab = 0$$

$$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & b & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff BC: \ bx + ay - ab + ax = 0$$

$$\iff BC: \ (a+b)x + ay - ab = 0$$

$$\begin{cases} ax - by = 0 \\ bx + (a+b)y - ab = 0 \\ (a+b)x + ay - ab = 0 \end{cases} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a+b & -ab \\ a+b & a & -ab \end{pmatrix}$$

cele 3 drepte sunt concurente $\Leftrightarrow$ rang $\bar{A} = 2$

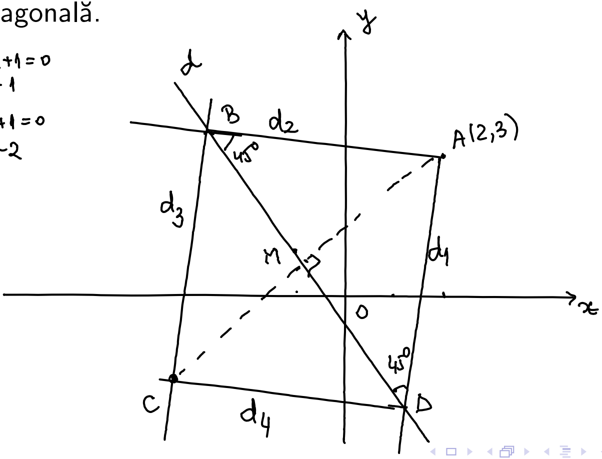
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a+b & -ab \\ a+b & a & -ab \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{L_3 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a+b & -ab \\ a & -b & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{„A"} \quad L_1 = L_3$$

2. Față de un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră dreapta d de ecuație $3x + 2y + 1 = 0$ și punctul $A(2, 3)$. Să se determine ecuațiile a două drepte d_1 și d_2 care trec prin A și fac cu dreapta d un unghi de 45°. Să se scrie apoi ecuațiile a două drepte, care împreună cu d_1,d_2 formează un pătrat, în care dreapta d să fie diagonală.

$y = 1 \quad 3x + 2 + 1 = 0$
$x = -1$

$x = 1 \quad 3 + 2y + 1 = 0$
$y = -2$



Ecuația unei drepte prin A : $y - y_A = m(x - x_A)$, $m \in \mathbb{R}$

$* \; y - 3 = m(x-2)$, $m \in \mathbb{R}$

$m(\widehat{d_1, d}) = 45^\circ$, $m(\widehat{d_2, d}) = 45^\circ$

Unghiul dintre două drepte $\quad tg\,\alpha = \left| \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$

$d: 3x + 2y + 1 = 0$

$d: 2y = -3x - 1$

$d: y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = -\frac{3}{2}$

$$\underbrace{tg\,45^\circ}_{1} = \left| \frac{m + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}m} \right| \Leftrightarrow \left| m + \frac{3}{2} \right| = \left| 1 - \frac{3}{2}m \right|$$

I $\quad m + \frac{3}{2} = -1 + \frac{3}{2}m \Leftrightarrow \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2}m - m$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m = 5$

$d_1: y - 3 = 5(x-2) \Leftrightarrow d_1: 5x - y - 7 = 0$

$\underline{\text{II}}$ $m+\frac{3}{2}=1-\frac{3}{2}m \iff \frac{5}{2}m=-\frac{1}{2} \iff m=-\frac{1}{5}$

$d_2:\ y-3=-\frac{1}{5}(x-2) \quad |\cdot 5$

$d_2:\ 5y-15=-x+2$

$d_2:\ x+5y-17=0$

$d_1:\ 5x-y-7=0$

$d_3 \parallel d_1 \iff m_{d_3}=m_{d_1}=5$

$d_4 \parallel d_2 \iff m_{d_4}=m_{d_2}=-\frac{1}{5}$

$\underline{\text{MT}}$ $\left.\begin{array}{l} d:\ 3x+2y+1=0 \quad , \ m_d=-\frac{3}{2} \\ AC \perp d \iff m_{AC}\cdot m_d=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{AC}=\frac{2}{3}$

$AC:\ y-3=\frac{2}{3}(x-2) \iff AC:\ 2x-3y+5=0$

$\{M\}=AC\cap d \iff \begin{cases} 2x-3y+5=0 & |\cdot 2 \\ 3x+2y+1=0 & |\cdot 3 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 13x+13=0$

$$\begin{matrix} x=-1 \\ y=1 \end{matrix} \Rightarrow M(-1,1)$$

$$\frac{x_A+x_C}{2}=x_M \Rightarrow x_C=2x_M-x_A \,,\; y_C=2y_M-y_A$$

$$x_C=2\cdot(-1)-2=-4 \,,\; y_C=2\cdot 1-3=-1 \Rightarrow C(-4,-1)$$

$$d_3:\; y+1=5(x+4) \Leftrightarrow d_3:\; 5x-y+19=0$$

$$d_4:\; y+1=-\frac{1}{5}(x+4) \Leftrightarrow d_4:\; x+5y+9=0$$

M $\underline{\text{II}}$ $\quad \{B\}=d_2\cap d$

$\quad\quad \{D\}=d_1\cap d$

$$d_2\cap d:\; \begin{cases} x+5y-17=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17-5y \\ 51-15y+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17-5y \\ -13y=-52 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow B(-3,4)$$

$d_1 \cap d = \{D\}$

$$\begin{cases} 5x - y - 7 = 0 \mid \cdot 2 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x - 13 = 0 \\ y = 5x - 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow D(1, -2)$$

$$d_3 : y - y_B = m_{d_3}(x - x_B)$$

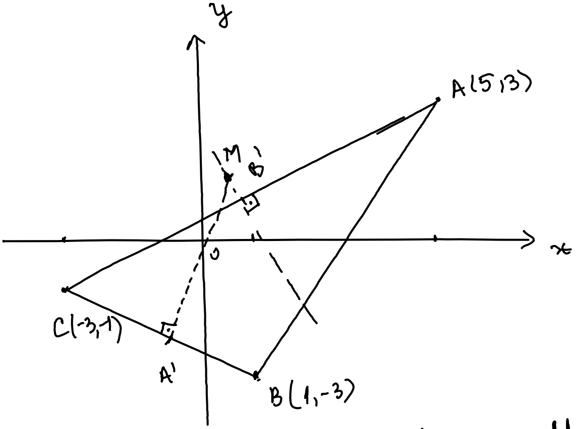
$$d_3 : y - 4 = 5(x + 3) \Leftrightarrow d_3 : 5x - y + 19 = 0$$

$$d_4 : y - y_D = m_{d_4}(x - x_D)$$

$$d_4 : y + 2 = -\frac{1}{5}(x - 1)$$

$$d_4 : x + 5y + 9 = 0$$

3. Un triunghi are vârfurile $A(5,3)$, $B(1,-3)$, $C(-3,-1)$. Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris.



Centrul cercului circumscris triunghiului se află la intersecția mediatoarelor

Fie A' mijlocul $[BC]$ $\Rightarrow x_{A'} = \frac{x_B + x_C}{2}$, $y_{A'} = \frac{y_B + y_C}{2}$

Met. B' mijlocul $[AC]$

$A'(-1,-2)$, $B'(1,1)$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1-3}{-3-5} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1+3}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

d_1 mediatoarea segmentului $[BC] \Rightarrow$

$$d_1 : y - y_{A'} = -\frac{1}{m_{BC}} \cdot (x - x_{A'}) \Rightarrow$$

$$d_1 : y + 2 = 2(x+1) \Rightarrow d_1 : 2x - y = 0$$

d_2 mediatoarea segmentului $[AC] \Rightarrow$

$$d_2 : y - y_{B'} = -\frac{1}{m_{AC}}(x - x_{B'}) \Rightarrow d_2 : y - 1 = -2(x-1)$$

$$d_2 : 2x + y - 3 = 0$$

$$\{M\} = d_1 \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

Met II M - centrul cercului circumscris $\Rightarrow$

$$MA = MB = MC \ (= R) \iff MA^2 = MB^2 = MC^2$$

$$MA = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

$M(x, y)$

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 = (y+3)^2 = (x+3)^2 + (y+1)^2$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 = (x+3)^2 + (y+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

MULT SUCCES LA EXAMENE!