

Integrale

1. Să se calculeze:

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin 2x} dx,$

b) $I_2 = \int_0^{2a} \frac{(a-x) + (a-x)^3 + \dots + (a-x)^{2021}}{1+(a-x)^2 + \dots + (a-x)^{2022}} dx,$ unde $a \in (0, \infty)$ este fixat.

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^{2022}}$. Se notează cu

$$a = \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ şi cu } b = \int_0^1 (f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2) dx.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

☐ A $a \in [\frac{\pi}{2}, 2];$ ☐ B $a \in [1, 2];$ ☐ C $b = \frac{1011}{4};$ ☐ D $b = -\frac{1011}{4}.$

3. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şirul definit prin $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

☐ A $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e;$ ☐ B $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0;$ ☐ C $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \infty;$ ☐ D $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = e.$

4. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ fie

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

- ☐ A Şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător.
☐ B Şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător.
☐ C $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{4}.$
☐ D $I_{2022} = \pi.$

5. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şirul definit prin

$$x_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}}{n}.$$

Se notează cu $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

☐ A $\ell = 1;$ ☐ B $\ell = 0;$ ☐ C $\ell = \frac{2}{\pi};$ ☐ D $\ell = \frac{\pi}{2}.$