



Reprezentări grafice ale funcțiilor

A. Asimptote - breviar teoretic

Fie $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ și funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Observație: Asimptotele atașate oricărei funcții se determină analizând limitele funcției f în punctele de acumulare ale domeniului de definiție, care nu aparțin domeniului, deci din mulțimea

$$D' \setminus D.$$

Reamintim definiția mulțimii punctelor de acumulare

$$D' = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \quad V \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \right\}.$$

O submulțime V a lui $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ este vecinătate a lui x_0 (deci $\in \mathcal{V}(x_0)$) dacă, atunci când:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists r > 0$ astfel încât $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq V$;
- $x_0 = \infty$ $\exists r > 0$ astfel încât $(r, \infty] \subseteq V$;
- $x_0 = -\infty$ $\exists r > 0$ astfel încât $[-\infty, -r) \subseteq V$;

Folosind aceste formulări echivalente prin intervale centrate (degenerate pentru $\pm\infty$), obținem următoarele formulări echivalente pentru punctele de acumulare ale unei mulțimi. Astfel

$$\begin{aligned} \text{dacă } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ atunci } x_0 \in D' &\iff \forall r > 0, \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \\ \infty \in D' &\iff \forall r > 0, \quad (r, \infty] \cap D \neq \emptyset \\ -\infty \in D' &\iff \forall r > 0, \quad [-\infty, -r) \cap D \neq \emptyset \end{aligned}$$

Observație:

- Dacă D este nemărginită inferior, atunci $-\infty \in D'$.
- Dacă D este nemărginită superior, atunci $\infty \in D'$.
- Dacă $x_0 \in D$, dar **nu este punct izolat** atunci $x_0 \in D'$, deci $D \setminus \text{Izo}D \subset D'$.
- De cele mai multe ori, chiar și pentru mulțimi mărginite, $D' \setminus D \neq \emptyset$.
- Fie $a < b \in \mathbb{R}$. Atunci
 - dacă $(a, b] \in D$, atunci $a \in D' \setminus D$;
 - dacă $[a, b) \in D$, atunci $b \in D' \setminus D$;
 - dacă $(a, b) \in D$, atunci $a, b \in D' \setminus D$.

Studiind limitele funcției f către ∞ și respectiv $-\infty$ putem obține în cazuri particulare, fie asimptote **orizontale**, fie **oblice** la graficul funcției f . Astfel, diferențiem:

- **Asimptote orizontale**

- Dacă D este nemărginită inferior (deci $-\infty \in D'$), se verifică existența

$$a := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Dacă $\exists a \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuație

$$y = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

este **asimptota orizontală către $-\infty$** a funcției f .

- Dacă D este nemărginită superior (deci $\infty \in D'$), se verifică existența

$$b := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Dacă $\exists b \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuație

$$y = b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

este **asimptota orizontală către ∞** a funcției f .

- **Asimptote oblice** (se verifică existența lor doar atunci când nu există cele orizontale)

- Dacă D este nemărginită inferior și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm

$$m := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dacă $m \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în $\mathbb{R}$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx).$$

Atunci, dreapta de ecuație

$$y = mx + n$$

este **asimptota oblică către $-\infty$** a funcției f .

- Dacă D este nemărginită superior și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm

$$m' := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dacă $m' \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în $\mathbb{R}$

$$n' = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m'x).$$

Atunci, dreapta de ecuație

$$y = m'x + n'$$

este **asimptota oblică către ∞** a funcției f .

- **Asimptote verticale** se caută analizând limitele laterale în puncte situate fie în mulțimea

$$\left(D' \setminus D\right) \cap \mathbb{R},$$

fie în puncte din D , dar în care funcția are o schimbare de formulă (de exemplu la intersecția a două ramuri).

În fapt, aceste puncte sunt de obicei (dar nu numai) capetele reale ale intervalelor deschise incluse în D . Fiecare astfel de punct trebuie analizat în parte. Astfel, pentru fiecare

$$x_0 \in \left(D' \setminus D\right) \cap \mathbb{R},$$

se analizează limitele laterale ale lui f în x_0 .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 - 0) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală la stânga** la graficul funcției f .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală la dreapta** la graficul funcției f .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală** la graficul funcției f .

B. Algoritm de abordare al graficului unei funcții

I. Analiza lui D și a lui D'

1. Determinarea mulțimii de definiție.
2. Studiul **parității** (simetrie față de axa Oy), **imparității** (simetria față de origine) și al **periodicității**.
3. Intersecția cu axele de coordonate.
4. Determinarea mulțimii de acumulare și studiarea asimptotelor.
5. Mulțimea de continuitate $C \subseteq D$.

II. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul 1

1. Determinarea mulțimii de derivabilitate $D_1 \subset D$.
2. Calcularea valorilor funcției derivate f' .
3. Studierea pentru fiecare punct $x_0 \in C \setminus D_1$ a derivatelor laterale la stânga și la dreapta și determinarea
 - **punctelor unghiulare**, atunci când există ambele derivate laterale, și cel puțin una e finită.
 - **punctelor de întoarcere**, atunci când există amândoua derivatele laterale, sunt infinite și diferite.
4. Determinarea soluțiilor reale ale ecuației $f'(x) = 0$.
5. Studierea monotoniei și a punctelor de extrem ale f prin analizarea tabelului de variație funcției.

III. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul al II-lea

1. Determinarea mulțimii de derivabilitate pentru derivate de ordinul 2, $D_2 \subset D_1$.
2. Calcularea valorilor funcției derivate de ordinul 2, f'' .
3. Determinarea soluțiilor reale ale ecuației $f''(x) = 0$.
4. Stabilirea
 - **intervalelor de convexitate**, când $f''(x) \geq 0$;
 - **intervalelor de concavitate**, când $f''(x) \leq 0$;
 - **punctelor de inflexiune** în care derivata de ordinul 2 are o schimbare de semn.

C. Tabelul de variație

Tabelul se structurează pe patru linii:

Linia 1 cuprinde **valorile remarcabile ale lui x** : mulțimea de definiție D , evidențierea punctelor din $D \setminus D'$, intersecția cu axele de coordonate, soluțiile reale ale ecuațiilor $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ și $f''(x) = 0$, etc.

Linia 2 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui f'** , și semnelor acestei derivate.

Linia 3 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui f''** , și semnelor acestei derivate de ordin 2.

Linia 4 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui f** , și monotoniei acesteia.

D. Aplicații

1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \frac{1+x}{e^{|x-1|}}, \forall x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A Dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- ☐ B Funcția f nu are asimptote orizontale.
- ☐ C Punctul de coordonate $(1, 2)$ este un punct de întoarcere al graficului funcției f .
- ☐ D Ecuația $f(x) = 1$ are exact două soluții reale.

Răspuns:

- ☐ A falsă; ☐ B falsă; ☐ C falsă; ☐ D adevărată.

Soluție: ☐ A Această proprietate este fals deoarece asimptotele verticale au ecuații de forma $x = \text{constant}$. Verificând clasic existența asimptotelor verticale, constatăm că existența lor se pune doar în punctul $a = 1$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \in \mathbb{R}$, funcția nu are asimptote verticale.

☐ B. Această proprietate este fals. Constatăm că

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

deci dreapta de ecuație $y = 0$ este o asimptotă orizontală la atât la stânga cât și la dreapta graficului funcției f .

☐ C Această proprietate este fals. Constatăm că funcția f este continuă în punctul 1 deoarece

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 2 = \lim_{x \downarrow 1} f(x).$$

Ea este derivabilă pe $(-\infty, 1)$ și $(1, \infty)$. Constatăm că:

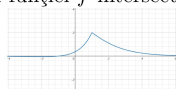
$$\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = \lim_{x \uparrow 1} (2+x)e^{x-1} = 3 \in \mathbb{R}$$

și

$$\lim_{x \downarrow 1} f'(x) = \lim_{x \downarrow 1} -xe^{1-x} = -1 \in \mathbb{R}.$$

Deoarece ambele limite laterale există și sunt finite, punctul $(1, f(1)) = (1, 2)$ este un punct unghiular, nu un punct de întoarcere.

☐ D Această afirmație este adevărată deoarece analizând graficul funcției, constatăm că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = 1$ în două puncte.



2. Fie funcția f definită prin $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9 \ln x$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A Domeniul de definiție al funcției f este $\mathbb{R}^*$.
- ☐ B Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f .
- ☐ C Funcția f nu are puncte unghiulare.
- ☐ D Punctul $(1, 4)$ este un punct de extrem global al funcției f .

Răspuns:

☐ A falsă;

☐ B falsă;

☐ C adevărată;

☐ D adevărată.

Soluție: ☐ A Această proprietate este falsă deoarece funcția logaritmică este definită pe $(0, \infty)$. Celelalte componente fiind polinomiale, sunt definite pe $\mathbb{R}$. De aceea domeniul acestei funcții este $(0, \infty)$.

☐ B. Această proprietate este falsă. Constatăm că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - 9 \frac{\ln x}{x^3} \right).$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = 0$, constatăm că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

deci funcția nu are asimptotă orizontală.

☐ C. Această proprietate este adevărată, deoarece problema existenței punctelor unghiulare se pune în acele puncte în care funcția este continuă, dar nu este derivabilă. Funcția f este derivabilă pe întreg domeniul de definiție.

☐ D. Această proprietate este adevărată. Funcția f este de două ori derivabilă pe întreg domeniul de definiție. Deoarece derivata de ordinul întâi

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - \frac{9}{x} = \frac{3}{x}(x^3 + 2x^2 - 3) = \frac{3}{x}(x-1)(x^2 + 3x + 3)$$

are ca singură soluție reală $x = 1$. Din moment ce ecuația $x^2 + 3x + 3 = 0$ nu are soluții reale, semnul funcției f este determinat doar de $(x-1)$. Constatăm astfel că f este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deci $(1, 4)$ este un punct de minim global al funcției f .

E. Aplicații ample

a) Reprezentați grafic funcțiile definite prin:

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

2. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$;

3. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$;

4. $f(x) = \frac{|1+x|}{1+|x|}$;

5. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

6. $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^2}$;

7. $f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$.

8. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x = 0 \\ \cos x & x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q} \\ \sin x & x \in (0, \infty) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

b) Analizând reprezentarea grafică, prin discuție după parametrul $m \in \mathbb{R}$, stabiliți numărul de soluții reale ale ecuației

$$f(x) = m,$$

pentru funcțiile 1, 6 și 7 de la subpunctul a). Indicație: translați graficul de-a lungul axei Oy .

Ex: $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

I $(0, \infty)$ - dom. logaritmic

$x^2 - 4x + 5 = 0$, $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 > 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}$

$D' = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$

$\hookrightarrow$ an. oare sau oblice.

• paritatea $\left. \begin{aligned} f(-x) &= \ln(x^2 + 4x + 5) \neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{nu e nici pară nici impară}$

• periodicitate $\nexists$

• N axele de coordonate: $N_{Oy} \quad x=0 \Rightarrow \ln(5) \Rightarrow (0, \ln(5)) \in G_f$

$$N_{Ox} \quad y=f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x^2-4x+5)=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+5=1 \Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0$$

$$\Rightarrow (2, 0) \in G_f$$

• Asimptotele:

$\bullet \infty \in D'$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2-4x+5) = \infty$ $\nexists$ asimptote orizontale
 $\bullet -\infty \in D'$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2-4x+5) = \infty$ nici cãtre $-\infty$
 nici cãtre $+\infty$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2-4x+5)}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} =$$

$$\exists \in \mathbb{R} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-1)}{x^2-4x+5} = 0 \text{ (?) } \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \nexists$ as. oblice

cãtre $+\infty$

analog $[-\infty]$

verticale $\rightarrow$ nu se studiazã qã. arecãtã, fãrã deosece $D' \setminus D \cap \mathbb{R} = \emptyset$

$$C = \mathbb{R}$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad D_1 = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$$

$$\boxed{f'(x)=0} \Leftrightarrow 2x-4=0 \quad \boxed{x=2}$$

$\downarrow$
punte critice

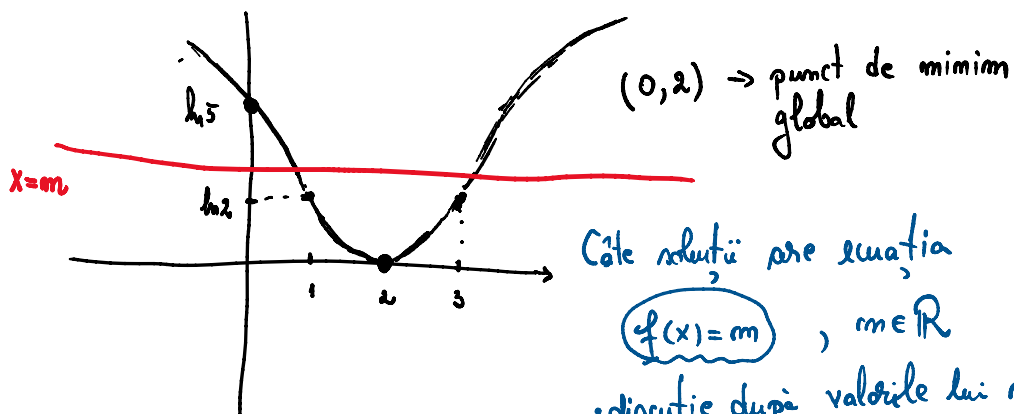
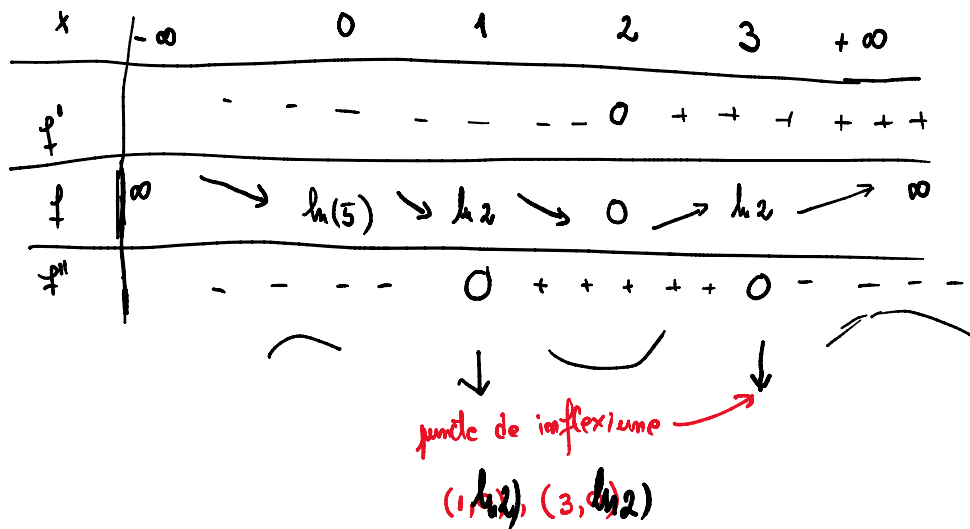
$$\textcircled{\text{III}} \quad D_2 = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 2 \cdot \frac{x^2-4x+5 - (2x-4) \cdot (x-2)}{(x^2-4x+5)^2} =$$

$$= \frac{x^2-4x+5 - 2x^2+8x-8}{(x^2-4x+5)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2 - 4x + 5 - 2x^2 + 8x - 8}{(x^2 - 4x + 5)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x^2 - 4x + 5)^2} = -2 \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$f''(x) = 0 \quad (x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x=1 \\ \text{sau} \\ x=3 \end{matrix}$$



- $m = 0 \Rightarrow$ o singură soluție $x = 2$
- $m \geq 0 \Rightarrow$ 2 soluții reale
- $m < 0 \Rightarrow$ 4 soluții reale

$$\ln(x^2 - 4x + 5) = 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = e^7 \dots$$

Exemplu 2:

$$f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$$

(I) $D = \mathbb{R} \Rightarrow D' = \overline{\mathbb{R}} \rightarrow$ se justifică natural ca. or. or. ob.
 $\hookrightarrow$ as. verticale

• $f(-x) = \sin(-x) \sin(-2x) = (-\sin x)(-\sin 2x) = \sin x \sin 2x = f(x) \rightarrow$ funcție pară
 • (?) periodicitatea

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) \cdot \sin(2x + 4\pi) = \sin x \cdot \sin 2x = f(x)$$

$\Rightarrow 2\pi$ este perioada funcției noastre

$\rightarrow$ ajunge să reprez. graf. funcție pe $[0, 2\pi]$.
 A

• Nu $x=0$ $f(0)=0 \Rightarrow (0,0) \in G_f$.

• Nu $f(x)=0 \Leftrightarrow \sin x \cdot \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}$ pe A

• $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = \pi$ sau $x = 2\pi$

• $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ sau $2x = \pi$ sau $2x = 2\pi$

$2x = 3\pi$ sau $2x = 4\pi$

$x = 0$ sau $x = \frac{\pi}{2}$ sau $x = \pi$ sau $x = \frac{3\pi}{2}$ sau $x = 2\pi$

$\Rightarrow (0,0), (\frac{\pi}{2},0), (\pi,0), (\frac{3\pi}{2},0), (2\pi,0)$ sunt puncte de intersecție cu axa O_x

• Asimptote or. sau oblice

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \sin 2x$ $\nexists$

(Heine)
 Caracterizarea cu ajutorul a limitelor de funcții:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $a \in D' \} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall (a_n) \subseteq D \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 să $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$

$$a \in D \quad \checkmark$$

$$m \rightarrow \infty$$

Se folgerste pl. a dem. $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. anstel:

es gibt 2 nst. $(a_n), (b_n) \in D \setminus \{a\}$

$$\text{d.h. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \text{ aber } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

$$? \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) \cdot \sin(2x) \quad ? (a_n) \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$a_n := 2n\pi \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad f(a_n) = \sin(2n\pi) \sin(4n\pi) = 0 \cdot 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$$

$$b_n := \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad f(b_n) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6} + 4n\pi\right) =$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \sin(2x)$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\rightarrow$ pl. $(-\infty)$ analog

$$C = \mathbb{R}$$

$$\text{II } D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (\sin x \cdot \sin 2x)' = \cos x \cdot \sin 2x + \sin x \cdot (2 \cos 2x) = \cos x \sin 2x + 2 \sin x \cos 2x$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(2x - x) = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x \\ \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \end{aligned} \quad \left| - \right.$$

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (-\sin x + 3 \sin 3x) = \frac{1}{2} (3 \sin 3x - \sin x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \sin 3x - \sin x = 0 \quad \checkmark$$

$$. 2$$

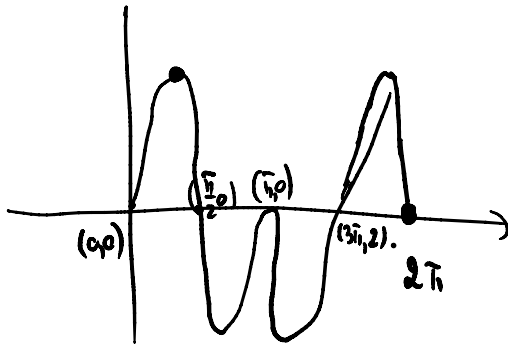
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \sin 3x - \sin x = 0 \\ \downarrow \\ [3 \sin x - 4 \sin^3 x] \end{array} \right\} \Leftrightarrow 9 \sin x - 12 \sin^3 x - \sin x = 0$$

$$\dot{\vee} 0, \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}, \pi - \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}, \pi + \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$2\pi - \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}, 2\pi \text{ sol.}$$

→ min

→ max



$$\boxed{f(x) = m} \quad m \in [\quad] \quad \exists \infty \text{ de solutii}$$

$$\left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}, 0,77 \right)$$

$$\pi - \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} (\sim 0,77)$$