Trigonometrie

1. Determinaţi mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x) = \cos x + i \cdot \sin x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

   $\boxed{\text{A}}$ f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. $\boxed{\text{B}}$ f este injectivă.
   $\boxed{\text{C}}$ f este surjectivă. $\boxed{\text{D}}$ f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

3. Dacă $\sin\alpha + \sin\beta = a$ şi $\cos\alpha + \cos\beta = b$, atunci aflaţi $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos(\alpha-\beta)$ şi $\cos(\alpha+\beta)$ în funcţie de a şi b.

4. Să se simplifice expresia
$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \cdot \left(\frac{1+\cos x}{\cos x}\right)^{-1} \cdot \frac{\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}.$$

5. Demonstraţi că pentru $x \in (0, \pi/2)$ are loc relaţia
$$\sqrt{2+2\cos x} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}} = \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{8}}.$$

6. Numerele reale a şi b satisfac egalitatea $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 2\cos^2\frac{a-b}{2}$. Să se determine mulţimea soluţiilor pentru $a - b$.

7. Rezolvaţi ecuaţia $4^{\sin 2x} + 4^{3-\sin 2x} = 65$, unde $x \in \mathbb{R}$.

8. Demonstraţi că dacă $\alpha + \beta - \gamma = \pi$, atunci
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

9. Rezolvaţi ecuaţia
$$\sin(x+30^\circ) + \cos(x+60^\circ) = 1 + \cos 2x.$$

10. Să se determine soluţiile ecuaţiei
$$\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$$
situate în intervalul $(0, 2)$.

11. Rezolvaţi şi discutaţi rădăcinile ecuaţiei
$$(2m-1)\cos 2x - 9\cos x + m - 5 = 0$$
după valorile parametrului real m.

27 Noiembrie 2021 Lect. dr. George Ţurcaş

1. Determinaţi mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$.

Ecuaţia se rescrie

$$\sin x - \cos x = \underbrace{\sin^3 x - \cos^3 x}_{x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)}.$$

$\Leftrightarrow$

$$\sin x - \cos x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x) = 0.$$

$$\therefore \; x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x) = \cos x + i \cdot \sin x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

A f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. B f este injectivă.

C f este surjectivă. D f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

B - fals

$$f(0) = f(2\pi) = 1.$$

C - fals.

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

D - fals, deoarece B este fals.

A - este adevărat

$$f(0) = 1.$$

$$f(x+y) \stackrel{?}{=} f(x) \cdot f(y)$$

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i\sin x) \cdot (\cos y + i\sin y).$$

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}.$$

3. Dacă $\sin\alpha+\sin\beta = a$ şi $\cos\alpha+\cos\beta = b$, atunci aflaţi $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos(\alpha-\beta)$ şi $\cos(\alpha+\beta)$ în funcţie de a şi b.

$$a^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$b^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

$+$

$$a^2 + b^2 = 2 + 2\sin\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

$$= 2 + 2\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 1.$$

$$\therefore \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}.$$

$$b^2 - a^2 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\cdot\cos(\alpha+\beta).$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cdot \cos \frac{2\alpha + 2\beta}{2} \cdot \cos \frac{2\alpha - 2\beta}{2}$$

$$= 2\cos(\alpha - \beta) \cdot \underline{\underline{\cos(\alpha+\beta)}}.$$

4. Să se simplifice expresia

$$E(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \left(\frac{1+\cos x}{\cos x}\right)^{-1} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{1+\cos \frac{x}{2}}.$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x.$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$E(x) = \frac{\cancel{2}\sin x \cdot \cancel{\cos x}}{\cancel{2}\cancel{\cos^2 x}} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{2\cos^{2}\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cancel{\cos \frac{x}{2}}}{2 \cdot \cos^2 \frac{x}{4}}$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cancel{\cos \frac{x}{2}}}{\cancel{2}\cancel{\cos \frac{x}{2}} \cdot 2\cos^2 \frac{x}{4}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin \frac{x}{4} \cdot \cancel{\cos \frac{x}{4}}}{\cancel{2} \cdot \cos^{\cancel{2}} \frac{x}{4}}$$

$$= \operatorname{tg} \frac{x}{4}. \qquad \boxtimes$$

5. Demonstraţi că pentru $x \in (0, \pi/2)$ are loc relaţia

$$E(x) := \sqrt{2+2\cos x} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}} = \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{8}}.$$

$$2 + 2\cos x = 2(1+\cos x) = 4\cos^2 \frac{x}{2}.$$

$$\sqrt{2+2\cos x} = 2\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} = \sqrt{2+2\cos\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{4}.$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cos x}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{x}{4}} = 2\cos\frac{x}{8}$$

$$E(x) = 8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8} \overset{?}{=} \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$8\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\underbrace{\cos\frac{x}{8}\cdot\sin\frac{x}{8}}_{\frac{\sin\frac{x}{4}}{2}} =$$

$$4\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\sin\frac{x}{4} = 2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

$$= \sin x.$$

$\boxtimes$

7. Rezolvaţi ecuaţia $4^{\sin 2x} + 4^{3-\sin 2x} = 65$, unde $x \in \mathbb{R}$.

$$t := 4^{\sin 2x} \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]. \quad (*)$$

$$t + \frac{64}{t} = 65 \quad \Big| \cdot t$$

$$t^2 - 65t + 64 = 0.$$

$$(t-1)(t-64) = 0.$$

Din (*) $t \le 4$, deci

$\boxed{t = 1}$.

$4^{\sin 2x} = 1$

$\Rightarrow \sin 2x = 0$, deoarece $f(x) = 4^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este injectivă.

$2x \in \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

$\boxed{x \in \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$.

8. Demonstraţi că dacă $\alpha + \beta - \gamma = \pi$, atunci

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Din ipoteză, $\beta - \gamma = \pi - \alpha$.

$\sin(\beta - \gamma) = \sin\alpha$.

$\sin^2\beta - \sin^2\gamma = \sin(\beta - \gamma)\sin(\beta + \gamma)$.

Membrul stâng:

$MS = \sin\alpha\left(\sin\alpha + \sin(\beta + \gamma)\right)$

$\overset{?}{=} MD = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

Dar $\sin\alpha + \sin(\beta+\gamma) = \sin(\pi-(\beta-\gamma)) + \sin(\beta+\gamma) =$

$$= \sin(\beta-\gamma) + \sin(\beta+\gamma) = 2\sin\beta\cos\gamma.$$

$\blacksquare$