

## **Inducție matematică**

Demonstrați că următoarele propoziții sunt adevărate.

**1.** Într-un arhipelag cu 11 insule, distanțele dintre oricare două insule sunt distincte. Dacă locuitorii fiecărei insule vizitează doar insula cea mai apropiată, atunci există o insulă care nu este vizitată.

**2.** Există  $x_1, x_2, \dots, x_{20} \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $x_1 < x_2 < \dots < x_{20}$  și

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{20}} = 1.$$

**3.** Oricare 30 de pătrate pot fi tăiate în bucăți ce pot fi asamblate (fără suprapuneri sau spații goale) într-un pătrat.

**4.** Există un număr natural format din 40 cifre impare divizibil cu  $5^{40}$ .

**5.**  $T_{50} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T_{50}(x) = \cos(50 \cdot \arccos x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ , este o funcție polinomială.

**6.** Oricare ar fi  $P_1, P_2, \dots, P_{61}$  puncte pe un semicerc centrat în  $O$  și de rază 1,

$$\left| \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 + \dots + \overrightarrow{OP}_{61} \right| \geq 1.$$

**7.** Pentru orice  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , oricare ar fi  $y_1, \dots, y_n > 0$ ,  $\sqrt[n]{y_1 \cdot \dots \cdot y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$ . Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $y_1 = \dots = y_n$ .

## **Bibliografie**

[1] <https://artofproblemsolving.com/>

[2] <https://cut-the-knot.org/>