16 ianuarie 2021 Prof. dr. habil. Nicolae Popovici

Continuitate şi derivabilitate

1. Fie $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ un număr natural şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{|x|} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

a) Determinaţi valorile lui n pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Determinaţi valorile lui n pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

c) Determinaţi cea mai mică valoare a lui n pentru care f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Fie n un număr natural nenul şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} \sin \dfrac{1}{x^n} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Demonstraţi că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi studiaţi continuitatea funcţiei $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în 0.

3. Să se demonstreze că

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

pentru orice număr real $x > 0$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Să se demonstreze că dacă f este mărginită iar g este nemărginită (atât inferior cât şi superior), atunci ecuaţia

$$f(x) = g(x)$$

are cel puţin o soluţie în $\mathbb{R}$.

5. Fie $a > 0$ un număr real iar $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[-a, a]$ şi derivabilă pe $(-a, a)$. Construiţi o funcţie $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ care satisface ipotezele teoremei lui Rolle şi are proprietatea că

$$g'(x) = [2x + (x^2 - a^2) f'(x)] e^{f(x)}$$

pentru orice $x \in (-a, a)$. Deduceţi că există un număr $b \in (-a, a)$ astfel încât

$$f'(b) = \frac{2b}{a^2 - b^2}.$$