Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Consultaţii la Matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2021

16 ianuarie 2021 Conf. dr. Cosmin Pelea

Combinatorică

Programa şcolară în vigoare ne pune cel mai adesea în situaţia de a număra pentru o mulţime finită nevidă A (sub)mulţimi finite de elemente din A, (sub)mulţimi ordonate finite de elemente din A şi sisteme ordonate finite de elemente din A.

Să începem cu ultimele dintre ele. Un *sistem ordonat finit de elemente din A* este un element $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ al produsului cartezian $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ mulţimi}}$ ($k \in \mathbb{N}$). O simplă schimbare de reprezentare — eliminarea parantezelor şi a virgulelor — conduce la scrierea

$$a_1 a_2 \dots a_k,$$

care justifică denumirea de *cuvânt de lungime k peste A* sau *cuvânt cu elemente din A* pe care o preferăm celei de mai sus. Numărul k se numeşte *lungimea cuvântului*, iar elementele $a_1, \dots, a_k$ se numesc *componentele cuvântului*. Pentru două cuvinte $a_1 a_2 \dots a_k$ şi $b_1 b_2 \dots b_s$,

$$a_1 a_2 \dots a_k = b_1 b_2 \dots b_s \;\Leftrightarrow\; k = s \text{ şi } a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Cuvântul vid (peste A) este singurul cuvânt (peste A) care are lungimea 0.

Observaţiile 1 *i) Subliniem câteva deosebiri esenţiale între mulţime şi cuvânt:*
a) Într-o mulţime, ordinea în care scriem elementele nu contează, pe când în cuvânt ordinea componentelor este importantă.
b) Elementele unei mulţimi sunt distincte, în timp ce componentele unui cuvânt pot să şi coincidă.
ii) Dacă mulţimea A are n elemente, atunci numărul cuvintelor de lungime k peste A este

$$|A^k| = n^k \ (k, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0).$$

Acest număr este egal cu numărul funcţiilor de la $\{1, \dots, k\}$ *la A şi, printr-o generalizare simplă, şi cu numărul funcţiilor de la o mulţime cu k elemente la o mulţime cu n elemente.*

O submulţime finită a mulţimii nevide A în care elementele sunt aranjate într-o anumită ordine se numeşte *submulţime ordonată a mulţimii A*. Dacă evidenţiem ordinea prin numerotarea elementelor, o submulţime ordonată cu k elemente din A ($k \in \mathbb{N}$) este un sistem ordonat $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ cu toate componentele distincte, adică un cuvânt $a_1 a_2 \dots a_k$ (peste A) care are componentele distincte.

Definiţia 2 *Fie A o mulţime finită nevidă cu* $|A| = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) *şi fie* $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. *Submulţimile ordonate de k elemente ale lui A se numesc* aranjamente ([redacted]) *de n (elemente) luate câte k.*

Observaţia 3 *Două aranjamente de n luate câte k se deosebesc prin natura elementelor lor sau prin ordinea elementelor lor (sau ambele).*

Notaţia 4 *Notăm cu* A_n^k *numărul aranjamentelor de n luate câte k.*

Observaţia 5 *Dacă $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ atunci*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\ .$$

Cum pentru un alfabet vid se poate forma un singur cuvânt, cuvântul vid, iar acesta nu are componente care să se repete, putem scrie $A_0^0 = 1$. Aşadar, $A_n^0 = 1$ chiar şi atunci când $n = 0$.

Definiţia 6 *Fie A o mulţime finită (nevidă) cu $|A| = n$. Se numeşte* permutare a mulţimii A *sau* permutare de n elemente *orice mulţime ordonată (cuvânt cu componentele distincte) care se poate forma cu toate cele n elemente ale mulţimii A. Cu alte cuvinte, o permutare de n elemente este un aranjament de n elemente luate câte n.*

Observaţia 7 *Două permutări de n elemente se deosebesc doar prin ordinea elementelor lor.*

Notaţia 8 *Notăm cu P_n numărul permutărilor mulţimii A cu n elemente.*

Observaţia 9 *Ţinând cont de definiţia permutărilor, $P_n = A_n^n$. Aşadar,*

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Definiţia 10 *Pentru o mulţime (nevidă) A cu n elemente, submulţimile lui A având fiecare câte k elemente, unde $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, se numesc* combinări de n (elemente) luate câte k.

Observaţia 11 *Două combinări de n luate câte k se deosebesc prin natura elementelor lor.*

Notaţia 12 *Notăm cu C_n^k* numărul combinărilor de n luate câte k.

Observaţia 13 *Dacă $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ atunci*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k \leq n)\,.$$

Chiar şi când $A = \emptyset$ există o singură submulţime cu 0 elemente a mulţimii A, prin urmare putem scrie $C_n^0 = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Enunţuri

1. a) În câte moduri se pot aşeza pe un raft 14 cărţi?
b) În câte moduri se pot aşeza 14 persoane la o masă circulară (2 aşezări la masă sunt egale dacă fiecare persoană are acelaşi vecin în stânga şi acelaşi vecin în dreapta)? Generalizare.
c) În câte moduri se poate forma un colier cu 14 mărgele de culori distincte?

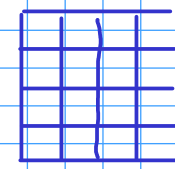
2. O sesiune de examene durează 21 de zile. O grupă de studenţi trebuie să programeze în sesiune 5 examene. În câte moduri se poate face programarea? Dar dacă ultimul examen trebuie dat în ultima zi din sesiune? (Se consideră că nu pot fi date 2 examene sau mai multe în aceeaşi zi.)

3. La 9 clase trebuie repartizaţi 3 profesori de matematică, fiecărui profesor revenindu-i câte 3 clase. În câte moduri se poate face repartizarea?

4. Să se determine numărul legilor de compoziţie ce pot fi definite pe o mulţime M cu 3 elemente. Câte dintre acestea sunt comutative? Câte legi de compoziţie admit element neutru? Să se generalizeze la o mulţime cu n elemente ($n \in \mathbb{N}^*$). [redacted]

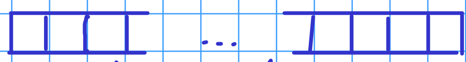
5. Considerăm cifrele 0, 1, 2, 3, 4 şi 5.
a) Câte numere de 8 cifre pot fi formate cu aceste cifre? Câte dintre acestea sunt pare?
b) Câte numere pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare exact o dată? Câte dintre acestea sunt pare?
c) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare o singură dată? Câte dintre acestea sunt pare?
d) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră este strict mai mică (respectiv mai mare) decât precedenta? Câte dintre acestea sunt pare?

Combinatorică – observații și schițele soluțiilor



$n, k \in \mathbb{N}^*$

Obs:



n căsuțe

$\exists\ n^k$ moduri de a aranja k elem. în n căsuțe

$b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k \longleftarrow$ k elemente

---

1. a) Nr. căutat este $P_{14} = 14!$

b) 14 persoane $\longrightarrow$ masă circulară $\longrightarrow$ 14! moduri (dacă ar fi un rând de 14 scaune)

Dar, odată așezați la masă cei 14 participanți, o rotație a ansamblului nu reprezintă o nouă așezare. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $\dfrac{14!}{14} = 13!$

Generalizare: n persoane $(n \in \mathbb{N}^*)$

Fixăm o persoană la masă. Așezările la masă din problemă corespund distribuirii celorlalte $n-1$ persoane pe locurile rămase

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $(n-1)!$

c) $13! \cdot \dfrac{1}{2}$ deoarece un colier este același și „văzut de sus" și „văzut de jos".

2. O repartizare a examenelor = o submn. ordonată a mulțimii zilelor din sesiune = aranjament de 21 luate câte 5

$\Longrightarrow$ nr. de programări este $A_{21}^5 = \dots$

Dacă un examen se dă în ultima zi ($\exists$ 5 moduri de a alege care), rămân 20 de zile pentru celelalte 4 examene $\Longrightarrow$ programarea lor se poate face în A_{20}^4 moduri.

$\Longrightarrow$ răspunsul final este $5 \cdot A_{20}^4 = \dots$

---

3. O repartizare a 3 clase către un profesor $\longleftrightarrow$ unei submn. cu 3 elemente din mulțimea celor 9 clase $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ C_9^3 repartizări $\longleftarrow$

Rămân 2 profesori și 6 clase. Următoarea repartizare se poate face în C_6^3 (nr. de clase) moduri. $\longleftarrow$

Rămân 3 clase și 1 profesor $\Longrightarrow$ $1 = C_3^3$ repartizare $\leftarrow$

Deci, nr. căutat este $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \dots$

---

4. M mulțime, $|M| = 3$, $M = \{a, b, c\}$

$\circ : \underbrace{M \times M}_{9} \longrightarrow \underbrace{M}_{3}$ — lege de compoziție pe M

Nr. legilor de comp. pe M = nr. fcțiilor de la o mulțime cu 9 elem. la o mulțime cu 3 elemente $= 3^9$.

$\circ$	a	b	c
a			
b			
c			

A construi o lege de comp. pe M =
= a completa cele 9 căsuțe libere din tablă cu a, b, c.

$\Longrightarrow$ nr. căutat este 3^9.

$\circ$	a	b	c
a			
b	×		
c	×	×	

A construi o lege de comp. comutativă pe M =
= a completa cele 6 căsuțe libere cu a, b, c

$\Longrightarrow$ nr. căutat este 3^6.

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b		
c	c		

Fixăm a elem. neutru

O lege de comp. cu a el. neutru $\longleftrightarrow$ completarea celor 4 căsuțe libere cu a, b, c.

Aceasta se poate face în 3^4 moduri.
Cum orice el. din M poate fi ales ca el. neutru $\Bigg\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $3^4 \cdot 3 = 3^5$ operații.

$|M| = n \ (\in \mathbb{N}^*) \Longrightarrow$ nr. op. pe $M = n^{n^2}$

— " — " — comutative $= n^{n+(n-1)+\dots+2+1} = n^{\frac{n(n+1)}{2}}$

— " — " — care admit el. neutru $= n^{(n-1)^2} \cdot n = n^{(n-1)^2+1}$.

---

5. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad$ cuvinte $\quad$ numere

a) Nr. de 8 cifre ?

Cuvinte de lungime 8 peste $A \longrightarrow 6^8$ cuvinte

Dintre acestea, cuvintele care încep cu $\underline{0}$ nu sunt nr. de 8 cifre $\longrightarrow$ 6^7 cuvinte

$\Longrightarrow$ nr. nr. de 8 cifre pentru A este $6^8 - 6^7$.

Între acestea sunt pare: ? $\underline{5 \cdot 6^6 \cdot 3}$?

$$\left.\begin{array}{ll} \text{- se termină în } 0: & 6^7 - 6^6 \\ \qquad\qquad\quad\;\; 2: & 6^7 - 6^6 \\ \qquad\qquad\quad\;\; 4: & 6^7 - 6^6 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

nr. nr. pare de 8 cifre este $3 \cdot (6^7 - 6^6)$.

---

b), c), d) — acasă