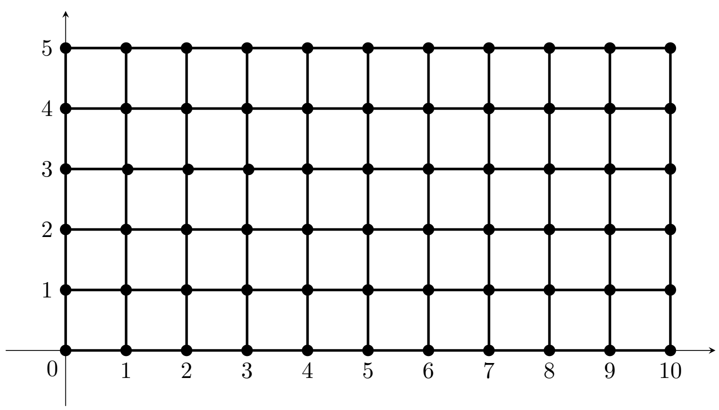
14 decembrie 2019 Asist. dr. Mihai Iancu

Combinatorică

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:
a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?
b) doar romanele să fie neapărat alăturate?
c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

2. În câte moduri se pot îmbarca 9 persoane într-un tren cu 3 vagoane astfel încât:
a) în primul vagon să fie 3 persoane?
b) în fiecare vagon să fie câte 3 persoane?
c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte două vagoane să fie câte 4 persoane?
d) în fiecare vagon să fie cel puţin o persoană?

3. Un purice se deplasează în reţeaua de mai jos dintr-un nod într-un nod vecin fie în sus, fie la dreapta, printr-un salt de lungime 1. Determinaţi numărul de drumuri, pe care le poate parcurge puricele, din nodul $(0,0)$ în nodul $(10,5)$.



4. Fie M o mulţime cu n elemente ($n \in \mathbb{N}^*$).
a) Câte legi de compoziţie pot fi definite pe M?
b) Câte legi de compoziţie comutative pot fi definite pe M?
c) Câte legi de compoziţie cu element neutru pot fi definite pe M?

5. Să se determine termenul în care nu apare x din dezvoltarea binomială a expresiei $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$, $x > 0$.

6. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că:
a) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$;
b) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;
c) $C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}$;
d) $1 + C_n^1 \cos(\alpha) + C_n^2 \cos(2\alpha) + \ldots + C_n^n \cos(n\alpha) = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R}$;
e) $C_n^1 \sin(\alpha) + C_n^2 \sin(2\alpha) + \ldots + C_n^n \sin(n\alpha) = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R}$.

Bibliografie

[1] S. Breaz, C. Pelea, *Elemente de teoria numerelor şi combinatorică prin exerciţii şi probleme*, în colecţia *Teme pentru perfecţionarea profesorilor de matematică*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2017.

[2] A.M. Yaglom, I.M. Yaglom, *Challenging mathematical problems with elementary solutions*, Volume 1: *Combinatorial Analysis and Probability Theory*, Dover Publications, New York, 1964.