

Inducție

Notatii:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ reprezintă mulțimea numerelor naturale.
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ reprezintă mulțimea numerelor naturale nenule.

Inducție matematică (în două versiuni):

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, unde $m \in \mathbb{N}$ este fixat. Demonstrăm că $P(n)$ e adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, prin inducție matematică, verificând următorii pași:

Versiunea I:

- 1) $P(m)$ e adevărată;
- 2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : P(k)$ e adevărată $\implies P(k+1)$ e adevărată.

Versiunea a II-a:

- 1) $P(m), \dots, P(m+l-1)$ sunt adevărate, unde $l \in \mathbb{N}^*$ este fixat;
- 2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : P(k)$ e adevărată $\implies P(k+l)$ e adevărată.

Probleme

1. Fie $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șirul lui Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrați că $\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

Deduceți identitatea: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie α un număr real. Demonstrați că $\forall n \in \mathbb{N}^* : |\sin(n\alpha)| \leq n|\sin(\alpha)|$.

3. Demonstrați că următoarea propoziție este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 14$:
 $P(n)$: n se poate scrie ca o sumă de termeni egali doar cu 3 sau 8.

4. Demonstrați că următoarea propoziție este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6$:
 $P(n)$: orice pătrat se poate împărți în n pătrate mai mici.

5. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de numere din intervalul $[-1, \infty)$ care au același semn.

Demonstrați că $\forall n \in \mathbb{N}^* : \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$.

Deduceți inegalitatea: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Demonstrați că $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^{2^n} + 3^{2^n} + 5^{2^n} \equiv 0 \pmod{19}$.

7. Demonstrați că $\forall n \in \mathbb{N}^* : \text{oricare ar fi } x \geq 0, \text{ avem } \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n} < x+2$.

Deduceți inegalitatea: $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Bibliografie

- [1] T. Andreescu, V. Crișan: *Mathematical Induction: A Powerful and Elegant Method of Proof*, XYZ Press, 2017.
- [2] D.S. Gunderson: *Handbook of mathematical induction : theory and applications*, CRC Press, 2011.
- [3] L. Panaitopol et al.: *Inducția matematică*, Editura Gil, 2002.