Matrici și determinanți

Matrice de tipul $m \times n$ (m-linii și n-coloane) cu coeficienți în K, unde K este $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (sau chiar $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$a_{ij} \in K, \forall i, j.$

Operații

- adunarea: $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\dots} = (c_{ij})_{\dots}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ — de același tip.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\alpha & y+\beta \\ z+\gamma & t+\delta \end{pmatrix}$$

- înmulțirea: $(a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = (d_{ij})$ — nr de coloane pt (a_{ij}) = nr de linii din (b_{ij})

$$d_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ \cancel{b_{41}} & \cancel{b_{42}} & \cancel{b_{43}} & \cancel{b_{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ & \_ & d_{13} \end{pmatrix}$$

$$d_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} b_{33}$$

! Înmulțirea matricilor **nu** este comutativă:

dacă $\exists$ AB și BA nu știm că $AB = BA$.

1. Fie X o matrice cu coeficienți reali a.î.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A) 26
B) 51
C) 21
D) 2

$(x^2 = 1 \cancel{\Rightarrow} x = 1$
$\Rightarrow x = \pm 1)$

Alegeți variantele corecte din cele de mai jos:

A) $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; B) $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{3\beta}{2} & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

C) $X = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ $m = q$, $2p = 3n$

$m = \beta \Rightarrow p = \frac{3\beta}{2}$

$n = 2b \Rightarrow p = 3b$

! D) Orice matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică egalitatea de mai sus.

Soluție: $\exists \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \Rightarrow X$ are 2 linii
$\exists\ X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X$ are 2 coloane
$\Rightarrow X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$X = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m + 2p & n + 2q \\ 3m + p & 3n + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + 3n & 2m + n \\ p + 3q & 2p + q \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2p = 3n \\ 2q = 2m \\ 3m = 3q \\ 3n = 2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p = 3n \\ m = q \end{cases}, \quad m, n, p, q \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$