

Reprezentări grafice ale funcțiilor

A. Asimptote - breviar teoretic

Fie $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ și funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Observație: Asimptotele atașate oricărei funcții se determină analizând limitele funcției f în punctele de acumulare ale domeniului de definiție, care nu aparțin domeniului, deci din mulțimea

$$D' \setminus D.$$

Reamintim definiția mulțimii punctelor de acumulare

$$D' = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \quad V \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \right\}.$$

O submulțime V a lui $\mathbb{R} \cup \{\pm\}$ este vecinătate a lui x_0 (deci $\in \mathcal{V}(x_0)$) dacă, atunci când:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists r > 0$ astfel încât $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq V$;
- $x_0 = \infty$ $\exists r > 0$ astfel încât $(r, \infty] \subseteq V$;
- $x_0 = -\infty$ $\exists r > 0$ astfel încât $[-\infty, -r) \subseteq V$;

Folosind aceste formulări echivalente prin intervale centrate (degenerate pentru $\pm\infty$), obținem următoarele formulări echivalente pentru punctele de acumulare ale unei mulțimi. Astfel

$$\begin{aligned} \text{dacă } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ atunci } x_0 \in D' &\iff \forall r > 0, \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \\ \infty \in D' &\iff \forall r > 0, \quad (r, \infty] \cap D \neq \emptyset \\ -\infty \in D' &\iff \forall r > 0, \quad [-\infty, -r) \cap D \neq \emptyset \end{aligned}$$

Observație:

- Dacă D este nemărginită inferior, atunci $-\infty \in D'$.
- Dacă D este nemărginită superior, atunci $\infty \in D'$.
- Dacă $x_0 \in D$, dar **nu este punct izolat** atunci $x_0 \in D'$, deci $D \setminus IzoD \subset D'$.
- De cele mai multe ori, chiar și pentru mulțimi mărginite, $D' \setminus D \neq \emptyset$.
- Fie $a < b \in \mathbb{R}$. Atunci
 - dacă $(a, b) \in D$, atunci $a \in D' \setminus D$;
 - dacă $[a, b) \in D$, atunci $b \in D' \setminus D$;
 - dacă $(a, b) \in D$, atunci $a, b \in D' \setminus D$.

Studiind limitele funcției f către ∞ și respectiv $-\infty$ putem obține în cazuri particulare, fie asimptote **orizontale**, fie **oblice** la graficul funcției f . Astfel, diferențiem:

- **Asimptote orizontale**

– Dacă D este nemărginită inferior (deci $-\infty \in D'$), se verifică existența

$$a := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Dacă $\exists a \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuație

$$y = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

este **asimptota orizontală către $-\infty$** a funcției f .

– Dacă D este nemărginită superior (deci $\infty \in D'$), se verifică existența

$$b := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Dacă $\exists b \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuație

$$y = b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

este **asimptota orizontală către ∞** a funcției f .

- **Asimptote oblice** (se verifică existența lor doar atunci când nu există cele orizontale)

– Dacă D este nemărginită inferior și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm

$$m := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dacă $m \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în \mathbb{R}

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx).$$

Atunci, dreapta de ecuație

$$y = mx + n$$

este **asimptota oblică către $-\infty$** a funcției f .

– Dacă D este nemărginită inferior și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm

$$m' := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dacă $m' \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în \mathbb{R}

$$n' = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m'x).$$

Atunci, dreapta de ecuație

$$y = m'x + n'$$

este **asimptota oblică către ∞** a funcției f .

- **Asimptote verticale** se caută analizând limitele laterale în puncte situate în mulțimea

$$\left(D' \setminus D\right) \cap \mathbb{R}.$$

În fapt, aceste puncte sunt toate capetele reale ale intervalelor deschise incluse în D . Fiecare astfel de punct trebuie analizat în parte. Astfel, pentru fiecare

$$x_0 \in \left(D' \setminus D\right) \cap \mathbb{R},$$

se analizează limitele laterale ale lui f în x_0 .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 - 0) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală la stânga** la graficul funcției f .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală la dreapta** la graficul funcției f .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală** la graficul funcției f .

B. Algoritm de abordare al graficului unei funcții

I. Analiza lui D și a lui D'

1. Determinarea mulțimii de definiție
2. Studiul parității (simetrie față de axa Oy), imparității (simetria față de origine) sau a periodicității.
3. Intersecția cu axele de coordonate
4. Asimptote
5. Mulțimea de continuitate $C \subseteq D$.

II. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul 1

1. Determinarea mulțimii de derivabilitate $D_1 \subset D$.

2. Calcularea valorilor funcției derivate f' .
3. Studiarea pentru fiecare punct $x_0 \in C \setminus D_1$ a derivatelor laterale la stânga și la dreapta și determinarea
 - **punctelor unghiulare**, atunci când există ambele derivate laterale, și cel puțin una e finită.
 - **punctelor de întoarcere**, atunci când există amândoua derivatele laterale, sunt infinite și diferite.
4. Determinarea soluțiilor reale ale ecuației $f'(x) = 0$.
5. Studiarea monotoniei și a punctelor de extrem ale f prin analizarea tabelului de variație funcției derivate derivatei.

III. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul al II-lea

1. Determinarea mulțimii de derivabilitate pentru derivate de ordinul 2 $D_2 \subset D_1$.
2. Calcularea valorilor funcției derivate de ordinul 2, f'' .
3. Determinarea soluțiilor reale ale ecuației $f''(x) = 0$.
4. Stabilirea
 - **intervalelor de convexitate**, când $f''(x) \geq 0$;
 - **intervalelor de concavitate**, când $f''(x) \leq 0$;
 - **punctelor de inflexiune** în care derivata de ordinul 2 are o schimbare de semn.

C. Aplicații

a) Reprezentați grafic funcțiile definite prin:

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$;
2. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$;
3. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$;
4. $f(x) = \frac{|1 + x|}{1 + |x|}$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$
6. $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^2}$;
7. $f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$.

b) Analizând reprezentarea grafică, prin discuție după parametrul $m \in \mathbb{R}$, stabiliți numărul de soluții reale ale ecuației

$$f(x) = m,$$

pentru funcțiile 1, 6 și 7 de la subpunctul a). Indicație: translați graficul de-a lungul axei Oy .