Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică

Consultaţii la Matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2020

11 ianuarie 2020

Asist. drd. Tudor Micu

Polinoame

Introducere

Vom privi polinoamele într-o variabilă din două puncte de vedere:

1. (Intuitiv) Un polinom este o expresie care conţine simbolul X şi elemente dintr-un inel R (de exemplu $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, orice corp), legate între ele prin operaţii de adunare şi înmulţire:

$$P \in R[X],\ P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

Înzestrăm mulţimea $R[X]$ cu o adunare şi o înmulţire, definite astfel încât să respecte regulile aritmetice uzuale:

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \\ Q &= b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n + \ldots + b_m X^m \\ P + Q &:= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \ldots + (a_n + b_n)X^n + b_{n+1}X^{n+1} + \ldots + b_m X^m \\ PQ &:= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)X^2 + \ldots + (a_n b_m)X^{m+n} \end{aligned}$$

2. (Riguros) Un polinom este un şir finit de elemente dintr-un inel R.

   - f şir de elemente din R:

$$f : \mathbb{N} \to R \iff (f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots)$$

- f şir finit $\iff \exists n$ astfel încât $\forall k > n : f(k) = 0$
- $(f+g)(i) := f(i) + g(i),\ \forall i \in \mathbb{N}$;
- $(fg)(i) := \sum_{j=0}^{i} f(j) \cdot g(i-j)$;
- $(0, 1, 0, 0, \ldots) =: X$

Se poate arăta prin inducţie că

$$X^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots),$$

unde 1 se află pe poziţia $n+1$.

Legătura dintre cele două puncte de vedere este următoarea:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \to R &\longleftrightarrow P = f(0) + f(1) \cdot X + f(2) \cdot X^2 + \ldots + f(n) \cdot X^n \\ (0, 1, 0, \ldots) &\longleftrightarrow P = X \\ (a, 0, 0, \ldots) &\longleftrightarrow P = a \end{aligned}$$

Gradul unui polinom

Definiţie. *Fie R un inel, $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in R[X]$, iar $a_n \neq 0$. Definim gradul polinomului f prin* $\operatorname{grad}(f) := n$.

- dacă $f = a \neq 0$, atunci $\operatorname{grad}(f) = 0$;
- dacă $f = 0$, atunci $\operatorname{grad}(f) = -\infty$;
- $\operatorname{grad}(f+g) \leq \max(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g))$;
  - $(1 + 2X + X^2) + (2 + X^3) = 3 + 2X + X^2 + X^3$
  - $(1 + X^2) + (X - X^2) = 1 + X$
- $\operatorname{grad}(fg) \leq \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$.

– dacă R este inel integru (ex. corp) atunci

$$\mathrm{grad}(fg) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$$

– în $\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{Z}$): $(2 + 3X + 6X^3)(1 + X^2) = 6X^5 + 9X^3 + 2X^2 + 3X + 2$;

– în $\mathbb{Z}_4$: $(\hat{2}X^2 + \hat{3}X)(\hat{2}X^7 + \hat{1}) = \hat{2}X^8 + \hat{2}X^2 + \hat{3}X$.

Polinoame şi funcţii polinomiale

În ceea ce urmează vom evidenţia diferenţele dintre noţiunile de **polinom** şi de **funcţie polinomială**. Considerăm inelele R şi S cu $R \subseteq S$ şi polinomul $f \in R[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$.

Definiţie. *Pentru fiecare $\alpha \in S$ definim valoarea lui f în α:*

$$f(\alpha) := a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n$$

Funcţia definită prin

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : S &\to S \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

*se numeşte **funcţia polinomială pe S asociată polinomului f**.*

Exemple. $f = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$, $R = \mathbb{R}$

- $S = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^2 + 1 \\ i &\mapsto 0 \\ 1 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

- $S = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 1 \\ 1 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

- $S = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 + I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc + 1 & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 + 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- *f poate fi, de exemplu, interpretat şi ca un polinom peste $\mathbb{Z}_4$, $f = X^2 + \hat{1}$.*

  Atunci pentru $S = \mathbb{Z}_4$ avem:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \mathbb{Z}_4 &\to \mathbb{Z}_4 \\ \hat{0} &\mapsto \hat{1} \\ \hat{1} &\mapsto \hat{2} \\ \hat{2} &\mapsto \hat{1} \\ \hat{3} &\mapsto \hat{2} \end{aligned}$$

Observaţie. *Două polinoame distincte pot defini aceeaşi funcţie polinomială pe un inel.*

Fie $f = X^3 - X$ şi $g = X^9 - X$, polinoame cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_3$. Atunci funcţiile polinomiale *asociate acestora sunt:*

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \mathbb{Z}_3 &\to \mathbb{Z}_3 \\ \hat{0} &\mapsto \hat{0} \\ \hat{1} &\mapsto \hat{0} \\ \hat{2} &\mapsto \hat{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{g} : \mathbb{Z}_3 &\to \mathbb{Z}_3 \\ \hat{0} &\mapsto \hat{0} \\ \hat{1} &\mapsto \hat{0} \\ \hat{2} &\mapsto \hat{0} \end{aligned}$$

Teorema împărţirii cu rest pentru numere întregi şi polinoame peste un corp

$\mathbb{Z}$	$K[X]$
$\forall a, b \in \mathbb{Z}$	$\forall f, g \in K[X]$
cu $b \neq 0$	cu $g \neq 0$
$\exists! q, r \in \mathbb{Z}$	$\exists! q, r \in K[X]$
a.î. $a = b \cdot q + r$	a.î. $f = g \cdot q + r$
şi $0 \leq r < \|b\|$	$\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$

Probleme propuse

1. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = \alpha^2 - 16 + (\alpha + 4\beta)X + (\beta^2 - 1)X^2$.

   Pentru ce valori ale parametrilor $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ polinomul f este polinomul nul?

2. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = a + bX + cX^2$.

   Să se determine polinomul f, ştiind că $\widetilde{f}$ este egală cu funcţia polinomială ataşată polinomului $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = \hat{2}X^2 - X + \hat{2}$.

3. Să se determine polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ de gradul 3, ştiind că f împărţit la $X^2 + 2X$ dă restul $r_1 = X + 2$ şi împărţit la $X^2 - X$ dă restul $r_2 = 7X + 2$.

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărţirii lui $f = X^4 - (m^2 - 1)X - 8i$ la $(X + i)$ să fie un număr real.