Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Consultaţii la Matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2020

9 noiembrie 2019 Asist. dr. Mihai Iancu

Inducţie

Notaţii:
- $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale.
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale nenule.

Inducţie matematică (în două versiuni):

Fie $P(n)$ o propoziţie care depinde de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, unde $m \in \mathbb{N}$ este fixat. Demonstrăm că $P(n)$ e adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, prin inducţie matematică, verificând următorii paşi:

Versiunea I:
1) $P(m)$ e adevărată;
2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : P(k)$ e adevărată $\implies$ $P(k+1)$ e adevărată.

Versiunea a II-a:
1) $P(m), \ldots, P(m+l-1)$ sunt adevărate, unde $l \in \mathbb{N}^*$ este fixat;
2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : P(k)$ e adevărată $\implies$ $P(k+l)$ e adevărată.
sau
2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m+l-1 : P(m), P(m+1), \ldots, P(k)$ sunt adevărate $\implies$ $P(k+1)$ e adevărată.

Probleme

Demonstraţi că următoarele propoziţii sunt adevărate:

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 12$: n se poate scrie ca o sumă de termeni egali doar cu 4 sau 5.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$: ecuaţia $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 1$ are o soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \ldots \times \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$: oricare n pătrate pot fi tăiate în bucăţi ce pot fi asamblate (fără suprapuneri sau spaţii goale) într-un pătrat mai mare.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $2^{2^n} + 3^{2^n} + 5^{2^n} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 19)$.

6. $\forall n \in \mathbb{N}^*$: există un număr natural format din n cifre impare divizibil cu 5^n.

7. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$: dacă $x_1, \ldots, x_n > 0$ şi $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, atunci $x_1 + \ldots + x_n \geq n$.
(*Indiciu: dacă* $a > 1$ *şi* $b < 1$, *atunci* $a + b > ab + 1$.)
Deduceţi inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică.

Bibliografie

[1] D.S. Gunderson, *Handbook of mathematical induction: theory and applications*, CRC Press, 2011.

[2] `https://www.cut-the-knot.org/induction.shtml`.