

Geometrie analitică

1. Considerăm unghiul BOB' și punctele $A \in (OB)$, $A' \in (OB')$. Arătați că

$$\vec{OM} = m \frac{1-n}{1-mn} \vec{OA} + n \frac{1-m}{1-mn} \vec{OA'} \quad (1)$$

$$\vec{ON} = m \frac{n-1}{n-m} \vec{OA} + n \frac{m-1}{m-n} \vec{OA'}. \quad (2)$$

unde $\{M\} = AB' \cap A'B$, $\{N\} = AA' \cap BB'$, $\vec{OB} = m \vec{OA}$ și $\vec{OB'} = n \vec{OA'}$.

2. Considerăm un patrulater convex $ABCD$ având laturile opuse neperalele. Fie M și N mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$ ale patrulaterului dat, iar P mijlocul segmentului $[EF]$, unde $\{E\} = AD \cap BC$ și $\{F\} = AB \cap CD$. Arătați că vectorii \vec{MN} și \vec{MP} sunt coliniari, adică punctele M, N, P sunt coliniare.

3. Se consideră două puncte A și B și o dreaptă d care este fie paralelă cu dreapta AB , fie trece prin mijlocul segmentului $[AB]$. Să se determine pozițiile punctului $M \in d$ astfel încât produsul $|\vec{MA}| \cdot |\vec{MB}|$ să fie minim.