

Consulțări pentru elevii de liceu

Structuri algebrice I: Grupuri

O operatie pe o multime G este o functie

$$*: G \times G \rightarrow G$$

$$G \times G = \{(x, y) \mid x, y \in G\} \quad (x, y) \mapsto x * y \in G.$$

Un grup este o structură (G, \cdot) unde G este o multime n. o. și operatie pe G a. i. pt orice $x, y, z \in G$

(1) Asociativ. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(2) $\exists 1 \in G$ a. i. $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$

(3) $\exists x^{-1} \in G$ a. i. $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$

• Elementul neutru, dacă există este unic.

• În prezența asociativității dacă există inversul lui x , atunci el este unic.

• (G, \cdot) și $x \in G$: $(x^{-1})^{-1} = x$
 $y \in G$: $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$

Un grup se numește abelian (sau comutativ) dacă $x, y \in G$:

Comut. $x \cdot y = y \cdot x$

Ex. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$

(\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{C}^*, \cdot) grupuri abeliene

$(\mathbb{N}, +)$ nu este grup pt. că $x=2 \nexists -x \in \mathbb{N}$: $2 + (-2) = 0$

$\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \nexists -x \in \mathbb{N}$.

(altfel spus $\forall y \in \mathbb{N} \quad x + y \neq 0$)

(\mathbb{Z}, \cdot) nu este grup $x=2 \nexists x^{-1} \in \mathbb{Z}$

(\mathbb{Q}, \cdot) nu este grup $\nexists 0^{-1}$

Un morf. între două grupuri (G, \cdot) și (H, \cdot) este o funcție $f: G \rightarrow H$ cu prop. $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in G$. Dacă în plus f este bij. atunci $G \cong H$. (f este izomorfism)

Probleme propuse

1. Fie $G = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

(a) Arătați că operația $\circ: G \times G \rightarrow G$, $x \circ y = x^{\ln y}$ este bine definită.

(b) Arătați că (G, \circ) este un grup abelian

(c) Să se determine un izomorfism de la G la (\mathbb{R}^*, \cdot) .

2. Notăm $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ și $G = \{A(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}\}$.

(a) Arătați că G este un grup abelian în raport cu înmulțirea matricilor

(b) Arătați că $GL_3(\mathbb{R}) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ este un grup în raport cu înmulțirea matricilor

(c) Este G un subgrup al lui $GL_3(\mathbb{R})$?

3. Să se arate că grupul (\mathbb{P}^*, \cdot) are exact un subgrup U_n cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ este un număr dat. Găsiți un izomorfism de la U_n la $(\mathbb{Z}_n, +)$.

4. Să se arate că următoarele perechi de grupuri nu sunt izomorfe:

a) $(\mathbb{Z}_2, +)$ și $(\mathbb{Z}_3, +)$

b) $(\mathbb{Z}_4, +)$ și $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

c) $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{R}^*, \cdot)

d) (\mathbb{R}^*, \cdot) și (\mathbb{C}^*, \cdot)

Soluție. (1) $\forall x, y \in G = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ există $\ln y \in \mathbb{R}$ deci există $x^{\ln y} \in (0, \infty)$

Dar dacă $x \neq 1$ și $y \neq 1 \Rightarrow \ln y \neq 0$. Din inj. funcției exponențiale
cu baza $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ avem $x^{\ln y} \neq x^0 = 1$. Deci $x \circ y = x^{\ln y} \in G$.

(2). $x, y \in G$ $x \cdot y = x^{\ln y} = e^{\ln(x^{\ln y})} = e^{\ln y \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln y}$

Asociat. $x, y, z \in G$: $(x \cdot y) \cdot z = (e^{\ln x \cdot \ln y}) \cdot z = e^{(\ln x \cdot \ln y) \cdot \ln z}$
 $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot (e^{\ln y \cdot \ln z}) = e^{\ln x \cdot (\ln y \cdot \ln z)}$

Com. $x, y \in G$ $x \cdot y = e^{\ln x \cdot \ln y} = e^{\ln y \cdot \ln x} = y \cdot x$

Cent $u \in G$ a.i. $u \cdot x = x \Leftrightarrow e^{\ln u \cdot \ln x} = x = e^{\ln x} \Rightarrow \ln u \cdot \ln x = \ln x$
 $x \neq 1 \Rightarrow \ln x \neq 0 \Rightarrow \ln u = 1 \Rightarrow u = e.$

Fie $x \in G$; caut $x' \in G$ a.i. $x \cdot x' = e \Leftrightarrow e^{\ln x \cdot \ln x'} = e \Leftrightarrow \ln x \cdot \ln x' = 1 \Rightarrow \ln x' = \frac{1}{\ln x} = (\ln x)^{-1} \Rightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G.$

(3) $f: G = (0, \infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \ln x$ bij.

$f(x \cdot y) = \ln(x \cdot y) = \ln(e^{\ln x \cdot \ln y}) = \ln x \cdot \ln y = f(x) \cdot f(y).$

(2). (a) $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$, $A(y) = \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix}$

$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y+2xy & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 1-x-y+2xy \end{pmatrix} = A(x+y-2xy). \quad (*)$

$(1-x) \cdot (1-y) + xy = 1-x-y+xy+xy$ ca $x+y-2xy = 2(x-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-y) + \frac{1}{2}$

In mulțimea matricilor i-drum o operație pe G dacă și numai

dacă $A(x) \cdot A(y) \in G, \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \Leftrightarrow x+y-2xy \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2(x-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-y) + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ adică pt. că $\underbrace{(x-\frac{1}{2})}_{\neq 0} \underbrace{(\frac{1}{2}-y)}_{\neq 0} \neq 0.$

Asociativitatea este automat verificată pt. operația este înmulțirea mat.

Comut. $A(x) \cdot A(y) = A(x+y-2xy) = A(y) \cdot A(x)$

Căutăm $A(u)$ a.i. $A(u) \cdot A(x) = A(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$$A(u+x-2ux) = A(x) \Rightarrow u+x-2ux = x$$

$$\Rightarrow u(1-2x) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Deci $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ este elem. neutru în G .

Pentru $A(x) \in G$; cautăm $A(x')$ în G a.i. $A(x) \cdot A(x') = A(0)$

$$A(x+x'-2xx') = A(0) \Rightarrow x+x'-2xx' = 0$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - x'\right) + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - x'\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{2} - x' = \frac{1}{2(1-2x)} \Rightarrow x' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1-2x)} = \frac{1-2x-1}{2(1-2x)} = \frac{-2x}{2(1-2x)}$$

Deci (G, \cdot) este un grup.

(3). (\mathbb{C}^*, \cdot) grup.

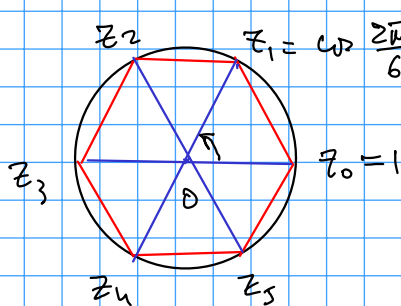
Proprietate: (G, \cdot) grup finit $|G| = n$ atunci $\forall x \in G : x^n = 1$.

Dacă G este un subgrup cu n elemente al lui (\mathbb{C}^*, \cdot) atunci elem. lui G trebuie să satisfacă prop. de mai sus deci trebuie să fie rădăcini de ordinul n ale unității.

Sol. ec. $x^n = 1$ în \mathbb{C} sunt:

$$\left\{ z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

$n=6$



$$z_k^n = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1$$

$$z_0 = \cos \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} + i \sin \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} = z_0$$

$$z_2 = z$$

$$z_1^2 = z_2, z_1^3 = z_3, \dots, z_1^6 = z_0 = 1, z_1^7 = z_1, z_1^8 = z_2 \text{ ș.a.m.d.}$$

Notăm $U_n = \{ z_k \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \} = \{ z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \} = \{ z_1^0, z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^{n-1} \}$

Verificăm că U_n este un subgrup al lui (\mathbb{C}^*, \cdot)

$$1 = z_0 \in U_n$$

$$z_k, z_t \in U_n \Rightarrow z_k \cdot z_t = z_{k+t \pmod n} \in U_n$$

$$z_k \in U_n \Rightarrow z_{n-k} \in U_n \text{ și } z_k \cdot z_{n-k} = z_n = z_0 = 1. \Rightarrow z_{n-k} = z_k^{-1}$$

Funcția $f: U_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$

x	z_0	z_1	\dots	z_{n-1}
$f(x)$	$\hat{0}$	$\hat{1}$		$\hat{n-1}$

este un izomorfism.

(k) (a) $\nexists f: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ bij. pt. că $|\mathbb{Z}_2| = 2$ și $|\mathbb{Z}_3| = 3$

$\Rightarrow \nexists$ izomorfism

$$(b). \mathbb{Z}_4 = \{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3} \}; \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{ (\hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}), (\hat{1}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{1}) \}$$

În (G, \cdot) grup spurem cu $x \in G$ este de ordin finit dacă $\exists n \in \mathbb{N}^*$ a.c. $x^n = 1$; cel mai mic n natural nenul cu această prop. este $\text{ord}(x)$. Dacă x nu este de ordin finit el este de ordin infinit.

În \mathbb{Z}_4 $\text{ord}(\hat{1}) = 4$ (deci \mathbb{Z}_4 este ciclic generat de $\hat{1}$).

În $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ avem $(x, y) + (x, y) = (\hat{0}, \hat{0}) \Rightarrow$ nu există elem. de ordin 4 (nu e ciclic).

Deci $(\mathbb{Z}_4, +)$ și $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ nu sunt izomorfe.