STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 1

1974

CLUJ

REDACTOR ȘEF: **Acad. prof. ȘT. PASCU**

REDACTORI ȘEFI ADJUNCȚI: **Acad. prof. ȘT. PÉTERFI, prof. VL. HANGA, prof. GH. MARCU**

COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ–MECANICĂ: **Prof. GH. CHIȘ, prof. C. KALIK, prof. P. MOCANU (redactor responsabil), conf. I. A. RUS, lector P. SZILÁGYI (secretar de redacție)**

ANUL XIX **1974**

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 1

Redacţia: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — CONTENTS — SOMMAIRE

Recenzii — Рецензии — Books — Livres parus

SOME PROPERTIES OF THE TOPOLOGICAL Ω-GROUPS (II)

M. SZILÁGYI

§ 4. The Quotient Topology of the Ω-Groups. Let us consider an arbitrary element $(G, +, \Omega, \tau)$ of $Top\ \mathcal{G}_\Omega$, an arbitrary ideal $(N, +, \Omega)$ of $(G, +, \Omega)$, and the canonical mapping $\varphi : G \to G/N$. Let us consider further the quotient topology for G/N relative to φ, that is the finest topology on G/N with respect to which φ is continuous ([3], [11], [12]). Denoting by τ_φ this quotient topology we have: $\forall U((U \subseteq G/N) \wedge (U \in \tau_\varphi) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(U) \in \tau)$. Because $(N, +)\, \Delta\, (G, +)$, from the theory of topological groups it results that ([11], [12]) the canonical mapping $\varphi : G \to G/N$ is a continuous and open mapping. In accordance with the work [15] concerning the topological universal algebras we have: the Higgins mappings attached to the operators $\omega \in \Omega$ are continuous with respect to the quotient topology, if the congruence which corresponds for $(N, +, \Omega)$ is complete in the sense of Malcev.

DEFINITION 4.1. Let $(G, +, \Omega, \tau)$ be an arbitrary element of $Top\ \mathcal{G}_\Omega$ and $q \subseteq G^2$ an equivalence relation on G. We shall say that the equivalence q is complete in the sense of Malcev if:

$$\forall U(U \in \tau \Rightarrow q[U] = \{x \in G \mid \exists u((u \in U) \wedge ((x, u) \in q))\} \in \tau).$$

THEOREM 4.1. *Let us consider an element* $(G, +, \Omega, \tau) \in Top\ \mathcal{G}_\Omega$ *and let* q *be a congruence on* $(G, +, \Omega)$. *Then* q *is complete in the sense of Malcev.*

Proof. Let q be an arbitrary congruence of $(G, +, \Omega)$. Then there exists a unique ideal $(N, +, \Omega)\, \Delta\, (G, +, \Omega)$ such that: $(a, b) \in q \Leftrightarrow a - b \in N$, that is, $(a, b) \in q \Leftrightarrow a \in b + N = N + b$. Hence, the q-class of a: $q(a) = a + N$. In accordance with above, if $\emptyset \neq V \subseteq G$, then we have: $q[V] = \{x \in G \mid \exists v((v \in V) \wedge ((v, x) \in q))\} = \{x \in G \mid \exists v((v \in V) \wedge (x \in v + N))\} = \bigcup_{v \in V} (v + N) = V + N = \bigcup_{n \in N} (V + n)$, which is an τ-open set whenever $V \in \tau$, $q[V]$ being a union of members of τ.

THEOREM 4.2. *Let us consider an arbitrary element* $(G, +, \Omega, \tau) \in$ *Top* $\mathcal{G}_\Omega^{T_2}$ *and let* q *be a congruence on* $(G, +, \Omega)$. q *is a closed subset of* G^2 *with respect to the product topology if, and only if, the ideal* $q(0) = N = \{x \in G \mid (x, 0) \in q\}$ *is a closed subset in* (G, τ).

Proof. Indeed, from the work [15] (theorem 11) it results that: if for all universal algebras belonging to a certain primitive class, the congruences are commutative — with respect to the composition of relation — then on each separable topological universal algebra belonging to this primitive class, the arbitrary congruence q is a closed subset of G^2 with respect to the product topology if, and only if, the q-classes of this congruence are closed subsets in (G, τ). But, in topological Ω-groups $q(0)$ is a closed subset if, and only if, each q-class is closed in (G, τ), because the translation mappings φ_a are continuous. In accordance with the above mentioned, it is sufficient to show that, the congruences are commutative, with respect to the usual composition of relations, for all Ω-groups belonging to a primitive class. In accordance with [5] (Chapter II., Proposition 6.8.): if p and q are two congruences on $(G, +, \Omega)$, then $p \circ q = p \vee q$ too is a congruence on $(G, +, \Omega)$, where $p \vee q$ is the interesection of all Ω — subgroups of $(G^2, +, \Omega)$ containing $X = p \cup q$. From this observation it results that the congruences on $(G, +, \Omega)$ are commutative.

THEOREM 4.3. *Let us consider an arbitrary element* $(G, +, \Omega, \tau)$ *from Top* $\mathcal{G}_\Omega$. *If* $(N, +, \Omega) \Delta (G, +, \Omega)$ *and* $\varphi : G \to G/N$ *is the canonical mapping, then the quotient topology* τ_φ *for* G/N *is compatible with the* Ω*-group structure on* G/N, *and the canonical mapping is open and continuous.*

Proof. In accordance with the theorem 4.1., the congruence q defined by $(a, b) \in q \Leftrightarrow a - b \in N$ is complete in the sense of Malcev. Then — in accordance with [15] — it results that the Higgins mappings are continuous on the quotient algebra.

Observation. Because, the conditions $(G, +, \Omega, \tau) \in$ *Top* $\mathcal{G}_\Omega$ and $(N, +, \Omega,) \Delta (G, +, \Omega)$ imply $(N, +) \Delta (G, +)$, we obtain the following assertions:

1) Let $\varphi : G \to G/N$ be the canonical mapping. If $\mathcal{B}$ is a base of the filter of neighborhoods of the zero element, $0 \in G$, then the family $\varphi(\mathcal{B}) = \{X \subseteq G/N \mid \exists V((V \in \mathcal{B}) \wedge (\varphi(V) = X))\}$ is a complete system of neighborhoods for the element $\varphi(0) \in G/N$.

2) $(G/N, \tau_\varphi)$ is a Hausdorff space if, and only if, N is a closed subset in (G, τ).

3) $(G/N, \tau_\varphi)$ is a discrete topological space if, and only if, N is open in (G, τ).

§ 5. The Filter Topology of Ω-Groups. In this paragraph we shall study those topologies which are compatible with the Ω-group structure and for which the filter $\mathcal{V}_0$ of the neighborhoods of the zero element admits a base containing only ideals of the Ω-group considered. We shall study — in this case — the product topology, the quotient topology, the relative topology, etc.

DEFINITION 5.1. Let us consider an $(G, +, \Omega, \tau) \in Top\ \mathcal{G}_\Omega$. If the filter of neighborhoods of the zero element, $0 \in G$, admits a base containing only ideals of $(G, +, \Omega)$, that is: $\forall V \exists U(V \in \mathcal{V}_0 \Rightarrow (U \subseteq V) \wedge (U \in \mathcal{V}_0) \wedge \wedge ((U, +, \Omega) \Delta (G, +, \Omega)))$, then we shall say that the topology τ is a filter topology for $(G, +, \Omega)$, and $(G, +, \Omega, \tau)$ is a filtered Ω-group.

THEOREM 5.1. *Let $(G, +, \Omega)$ be an arbitrary element of $\mathcal{G}_\Omega$.*

A) *If the following condition is true:*

1^*. $(G, +, \Omega)$ *admits a family $\{G_\xi \mid \xi \in I\}$ containing only ideals, where I is an arbitrary directed index set, and*: $\forall_1^2 \xi_i((\xi_1, \xi_2 \in I) \wedge (\xi_1 \geqslant \xi_2) \Rightarrow \Rightarrow (G_{\xi_1} \subseteq G_{\xi_2}))$; *then there exists a unique filter topology τ on $(G, +, \Omega)$ for which the family $\{G_\xi \mid \xi \in I\}$ is a base for the filter of neighborhoods of the zero element, $0 \in G$.*

B) *If τ is a filter topology on $(G, +, \Omega)$, then it holds the condition* 1^*.

Proof. A) Because, $\forall \xi((G_\xi, +, \Omega) \Delta (G, +, \Omega) \Rightarrow (G_\xi, +) \Delta (G, +))$, in accordance with [16], the family $\{G_\xi \mid \xi \in I\}$ determines a base $\mathfrak{B}$ for a uniformity $\mathcal{U}$ on the set $[G : \mathfrak{B} = \{V \subseteq G \times G \mid \forall (x, y) ((x, y) \in V \Rightarrow \Rightarrow \exists \xi((\xi \in I) \wedge (xy^{-1} \in G_\xi)))$. The topology τ of the uniformity $\mathcal{U}$ is compatible with the group structure of G and the family $\{G_\xi \mid \xi \in I\}$ is a base for the system of neighborhoods $\mathcal{V}_0$ of the zero element, $0 \in G$ [16]. It is clear that the topology τ is uniquely determined by this property. Thus it is sufficient to show that the topology τ is compatible with the Ω-group structure on G. In accordance with the Theorem 2.2 it is sufficient to show that:

$$\forall \omega \forall U \exists V((a(\omega) = n) \wedge (U \in \mathcal{V}_0) \Rightarrow (V \in \mathcal{V}_0) \wedge (\omega VV \ldots V \subseteq U)). \tag{12}$$

Because the family $\{G_\xi \mid \xi \in I\}$ is a base for $\mathcal{V}_0$, it exists some $\xi \in I$ so that $G_\xi \subseteq U$ for each $U \in \mathcal{V}_0$. The property $(G_\xi, +, \Omega) \Delta (G, +, \Omega)$ implies that the assertion (12) is satisfied for $V = G_\xi$.

B) If τ is a filter topology for $(G, +, \Omega)$, then it admits a base $\mathfrak{B}$ for $\mathcal{V}_0$ — the base which contains only ideals of $(G, +, \Omega)$ — and — evidently — this base is directed with respect to the usual inclusion relation.

THEOREM 5.2. *Let us consider an $(G, +, \Omega) \in \mathcal{G}_\Omega$, and let τ be a filter topology of $(G, +, \Omega)$. If $(G', +, \Omega) < (G, +, \Omega)$, then the relative topology on G', $\tau_{G'}$, is a filter topology for $(G', +, \Omega)$.*

Proof. If τ is a filter topology for $(G, +, \Omega)$ then — in accordance with the Theorem 5.1. — there exists a family $\{G_\xi \mid \xi \in I\}$ which satisfies the condition 1^* and which is a base for $\mathcal{V}_0$. Because: $\forall \xi(\xi \in I \Rightarrow (G_\xi \cap G') = = G'_\xi, +, \Omega) \Delta (G', +, \Omega))$ and $\forall_1^2 \xi_i ((\xi_1, \xi_2 \in I) \wedge (\xi_1 \geqslant \xi_2) \Rightarrow G_{\xi_1} \cap G' = = G'_{\xi_1} \subseteq G_{\xi_2} \cap G' = G'_{\xi_2})$, the family $\{G'_\xi \mid \xi \in I\}$ satisfies the condition 1^* in $(G', +, \Omega)$ and — in accordance with the Theorem 5.1. — the family $\{G'_\xi \mid \xi \in I\}$ determines a filter topology τ' for $(G', +, \Omega)$. But, the topology τ' is the relativization of τ to G', consequently $\tau' = \tau_{G'}$.

THEOREM 5.3.[7] *Let us consider a family* $\{(G_\nu, +, \Omega) \mid \nu \in \Delta\}$ *from* Top $\mathcal{G}_\Omega$, *where* Δ *is an arbitrary index set. If* τ *is the product topology of the topologies* τ_ν $(\nu \in \Delta)$, *then* τ *is a filter topology for* $(\Sigma G_\nu, +, \Omega)$.

Proof. In accordance with the Theorem 5.1., for each $\nu \in \Delta$ it exists a base $\left\{G^{(\nu)}_{\xi^{(\nu)}} \,\middle|\, \xi^{(\nu)} \in I^{(\nu)}\right\}$, for the filter of neighborhoods of the zero element, $O_\nu \in G_\nu$ $(\nu \in \Delta)$ — the base which contains only ideals of $(G_\nu, +, \Omega)$. For simplicity, we suppose that $\xi_0^{(\nu)} \in I^{(\nu)}$ and $G^{(\nu)}_{\xi_0^{(\nu)}} = G_\nu$ for each $\nu \in \Delta$. Hence (from the definition of the product to topology itself) it results that a complete system of neighborhoods of the zero element $O = (O_\nu)_{\nu \in \Delta} \in \Sigma\{G_\nu \mid \nu \in \Delta\}$, is even the family of all subsets: $V = \left\{(a_\nu)_{\nu\in\Delta} \,\middle|\, \left(a_\nu \in G^{(\nu)}_{\xi_\lambda^{(\nu)}}\right) \wedge \left(G^{(\nu)}_{\xi_\lambda^{(\nu)}} = G^{(\nu)}_{\xi_0^{(\nu)}}\right.\right.$ if $\nu \notin \Delta_0'$, where Δ_0' is a finite subset of $\left.\left.\Delta\right)\right\}$. Clearly, $\mathfrak{B}$ is a set containing only ideals of $(\Sigma G_\nu, +, \Omega)$ and it is ordered with respect to the usual inclusion relation. Let U be another element of $\mathfrak{B}$: $U = \left\{(b_\nu)_{\nu\in\Delta} \,\middle|\, \left(b_\nu \in G^{(\nu)}_{\xi_\mu^{(\nu)}}\right) \wedge \left(G^{(\nu)}_{\xi_\mu^{(\nu)}} = G^{(\nu)}_{\xi_0^{(\nu)}}\right.\right.$, if $\nu \notin \Delta_0''$, where Δ_0'' is a finite subset of $\left.\left.\Delta\right)\right\}$. Because, the family $\left\{G^{(\nu)}_{\xi^{(\nu)}} \,\middle|\, \xi^{(\nu)} \in I^{(\nu)}\right\}$ is directed with respect to the usual inclusion relation for each $\nu \in \Delta$, it exists for each $\nu \in \Delta_0' \cup \Delta_0'' = \Delta_0$ an element $G^{(\nu)}_{\xi^{(\nu)}}$ such that $G^{(\nu)}_{\xi^{(\nu)}} \subseteq G^{(\nu)}_{\xi_\lambda^{(\nu)}}$ and $G^{(\nu)}_{\xi^{(\nu)}} \subseteq G^{(\nu)}_{\xi_\mu^{(\nu)}}$. Because Δ_0 is a finite subset of Δ — in accordance with above — we have: $W = \left\{(c_\nu)_{\nu\in\Delta} \,\middle|\, \left(c_\nu \in G^{(\nu)}_{\xi^{(\nu)}}\right) \wedge \left(G^{(\nu)}_{\xi^{(\nu)}} = G^{(\nu)}_{\xi_0^{(\nu)}} \text{ if } \nu \notin \Delta_0\right)\right\} \in \mathfrak{B}$, and $W \subseteq V$, $W \subseteq U$. Consequently, the set $\mathfrak{B}$ is directed with respect to the usual inclusion relation, and so — in accordance with the Theorem 5.1. — the topology τ is a filter topology.

THEOREM 5.4. *Let* $(G, +, \Omega, \tau)$ *be a filtered* Ω*-group. If* $(N, +, \Omega)\ \Delta\ (G, +, \Omega)$ *and if* $\varphi : G \to G/N$ *is the canonical mapping, then* τ_φ *is a filtered topology for* $(G/N, +, \Omega)$.

Proof. Because $(G, +, \tau)$ is a filtered group and $(N, +,)\ \Delta\ (G, +)$, from the theory of the topological groups it results ([4], [11] [12]) that, if $\mathfrak{B} = \{G_\xi \mid \xi \in I\}$ is a base for the system of neighborhoods of the zero element, $O \in G$, then the family $\mathfrak{B}' = \{\varphi(G_\xi) \mid \xi \in I\}$ is a base for the system of neighborhoods of the element $\varphi(0) \in G/N$ in the quotient space $(G/N, \tau_\varphi)$. But, in accordance with [19] we have that $(\varphi(G_\xi), +, \Omega)\ \Delta\ (G/N, +, \Omega)$, whenever $(G_\xi, +, \Omega)\ \Delta\ (G, +, \Omega)$.

THEOREM 5.5. *Let us consider two arbitrary elements* $(G_1, +, \Omega, \tau_1)$ *and* $(G_2, +, \Omega, \tau_2)$ *of Top* $\mathcal{G}_\Omega$ *and let* $\alpha : G_1 \to G_2$ *be a homeomorphic izomorphism. If* τ_1 *is a filter topology for* $(G_1, +, \Omega)$, *then* τ_2 *is a filter topology for* $(G_2, +, \Omega)$.

---

[7] In [18] the analogous problem is solved for topological groups.

Proof. Let us suppose that $\mathcal{B}_1 = \{G_\xi^{(1)} \mid (\xi \in I) \wedge ((G_\xi^{(1)}, +, \Omega)\Delta(G, +, \Omega))\}$ is a base for $\mathcal{V}_{0_{G_1}}$ (O_{G_i} is the zero element for $(G_i, +, \Omega)$ $(i = 1, 2)$). Let $V^{(2)}$ be an arbitrary element of $\mathcal{V}_{0_{G_2}}$ and $V^{(1)} = \alpha^{-1}(V^{(2)})$. α being a continuous mapping, we have $V^{(1)} \in \mathcal{V}_{0_{G_1}}$. Hence it exists such a $\xi \in I$ that $G_\xi^{(1)} \subseteq V^{(1)}$. We shall denote by $G^{(2)} = \alpha(G_\xi^{(1)})$. Because α^{-1} is a continuous mapping, $G_\xi^{(2)}$ is a neighborhood for $0_{G_2} \in G_2$, and we have: $G_\xi^{(2)} \subseteq V^{(2)} = \alpha(V^{(1)})$. Consequently, $\mathcal{B}_2 = \{G_\xi^{(2)} \mid \xi \in I\}$ is a base for $\mathcal{V}_{0_{G_2}}$. Because α is an izomorphism we have $(G_\xi^{(2)}, +, \Omega) = (\alpha(G^{(1)}), +, \Omega)\, \Delta\, (G_2, +, \Omega)$ whenever $\xi \in I$. Hence, τ_2 is a filter topology for $(G_2, +, \Omega)$.

§ 6. The Isomorphism Theorems in *Top* $\mathcal{G}_\Omega$. In this paragraph we state the celebrated isomorphism theorems for topological Ω-groups, which are of central interest both in the theory of topological groups (e.g. [11]) and in the theory of Ω- groups ([19], [5]).

The new theorems, when applied to Ω-groups provided with the discrete topology, render the usual isomorphism theorems for the abstract Ω-groups, while when applied in the case with $\Omega = \emptyset$, they render the usual isomoprhism theorems for topological groups. These theorems are concerned with the existence (the unicity) of homomorphisms having some algebrical and topological properties. The existence (the unicity) of the homomorphisms having the mentioned algebraical properties, is guaranted by the theory of Ω-groups ([19], [5]), each topological Ω-group being at the same time an Ω-group, and the hypotheses of the new theorems implying — in algeraical sense — the hypotheses on which the isomorphism theorems for Ω-groups are founded. The topological properties of these homomorphisms are a consequence of the theory of topological groups ([11], III/24), each topological Ω-group being at the same time a topological group, and the hypotheses of the new theorems implying the hypotheses on which the isomorphisms theorems for topological groups are founded.

In the following, whenever a subset of a topological space itself appeares as a topological space, its topology will be the relativized topology. Similarly, if a factor — Ω-group appears in the role of topological Ω-group, it is always understood with the topology induced by the canonical mapping. The new, generalized theorems are:

THEOREM 6.1. *Let us consider* $(G_1, +, \Omega, \tau_1)$ *and* $(G_2, +, \Omega, \tau_2)$ *two arbitrary elements of Top* $\mathcal{G}_\Omega$ *and let* $\alpha: G_1 \to G_2$ *be any open and continuous homomorphism. Then there is a decomposition*

$$\alpha = \mu \circ \bar{\alpha} \circ \varepsilon \tag{12}$$

where $\varepsilon: G_1 \to G_{1/Ker\,\alpha}$ *is the natural homomorphism, which is open and continuous,* $\mu: \alpha(G_1) \to G_2$ *is the inclusion mapping, which is open and continuous, and* $\bar{\alpha}: G_{1/Ker\,\alpha} \to \alpha(G_1)$ *is a homeomorphic isomorphism, defined by* $\bar{\alpha}(x + Ker\ \alpha) = \alpha(x)$ *for each* $x + Ker\ \alpha \in G_{1/Ker\,\alpha}$.

Consequently, the diagram:

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & G_2 \arrow[d, "\mu"] \\
G_{1/Ker\,\alpha} \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] & \alpha(G_1)
\end{tikzcd}$$

is commutative.

THEOREM 6.2. *Let us consider* $(G_1, +, \Omega, \tau_1)$ *and* $(G_2, +, \Omega, \tau_2)$ *two arbitrary elements of Top* $\mathcal{G}_\Omega$ *and let* $\alpha: G_1 \to G_2$ *be any continuous homomorphism. If* $(N, +, \Omega)\ \Delta\ (G, +, \Omega)$ *such that* $Ker\ \alpha \supseteq N$, *then there is a unique continuous homomorphism* $\alpha^*: G_1/N \to G_2$, *such that the diagram:*

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & G_1/N \arrow[dl, "\alpha^*"] \\
& G_2 &
\end{tikzcd}$$

is commutative: $\alpha = \alpha^* \circ \varepsilon$, *where* $\varepsilon: G_1 \to G_1/N$ *is the natural homomorphism, which is open and continuous, and* α^* *is defined by* $\alpha^*(x + N) = \alpha(x)$ *for each* $x + N \in G_1/N$. *If* α *is an open homomorphism, then* α^* *is an open homomorphism.*

THEOREM 6.3. *Let* $(G, +, \Omega, \tau)$ *an arbitrary element of Top* $\mathcal{G}_\Omega$. *If* $(B, +, \Omega) \prec (G, +, \Omega)$, $B \in \tau$ *and* $(A, +, \Omega)\ \Delta\ (G, +, \Omega)$, *then there is a homeomorphic isomorphism* $\varphi: \{A, B\}/_A \to B/_{A \cap B}$ *defined by* $\varphi(b + A) = b + A \cap B$ *for each* $b + A \in \{A, B\}/_A$.

THEOREM 6.4. *Let* $(G, +, \Omega, \tau)$ *be an arbitrary element of Top* $\mathcal{G}_\Omega$. *If* $(A, +, \Omega)\ \Delta\ (G, +, \Omega)$, $(B, +, \Omega)\ \Delta\ (G, +, \Omega)$ *and* $A \subseteq B$, *then there is a unique open, continuous and surjective homomorphism* $\theta: G/A \to G/B$ *such that* $\varepsilon_B = \theta \circ \varepsilon_A$, *and* θ *induces a homeomorphic izomorphism* $\theta': (G/A)/_{Ker\,\theta} \to G/B$ *such that the diagram*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[dr, "\varepsilon_B"'] & G/A \arrow[r, "\varepsilon_{Ker\,\theta}"] \arrow[d, "\theta"] & (G/A)/_{Ker\,\theta} \arrow[dl, "\theta'"] \\
& G/B &
\end{tikzcd}$$

is commutative, where $\varepsilon_A : G \to G/A$, $\varepsilon_B : G \to G/B$, $\varepsilon_{Ker\,\theta} : G/A \to (G/A)/_{Ker\,\theta}$ *are the natural homomorphisms,* θ *is defined by:* $\theta(x + A) = x + B$ *for each* $x+A \in G/A$ *and* θ' *is defined by:* $\theta'(y + Ker\ \theta) = \theta(y)$ *for each* $y + Ker\ \theta \in$ $\in (G/A)_{Ker\,\theta}$.

Let $(G, +, \Omega, \tau)$ be an arbitrary element of $Top\ \mathcal{G}_\Omega$ and let $(A, +, \Omega)$ be an arbitrary closed ideal of $(G, +, \Omega)$. We denote by R_A the set of all closed Ω-subgroups $(B, +, \Omega)$ of $(G, +, \Omega)$ for which $A \subseteq B \subseteq G$, and we denote by R'_A the set of all closed Ω-subgroups of $(G/A, +, \Omega) =$ $= (G', +, \Omega)$. By $\widetilde{R}_A$ we shall denote the set of those elements of R_A which are ideals of $(G, +, \Omega)$, and by $\widetilde{R}'_A$ the set of those elements of R'_A which are ideals of $(G', +, \Omega)$. We have:

THEOREM 6.5. *Let us consider an* $(G, +, \Omega, \tau) \in Top\ \mathcal{G}_\Omega$. *Let* $(A, +, \Omega)$ *be an arbitrary closed ideal of* $(G, +, \Omega)$ *and let* $\varepsilon : G \to G/A$ *be the natural mapping. Then there is a bijective mapping* $\varphi : R'_A \to R_A$, *defined by:* $\varphi((B, +, \Omega)) = (\varepsilon^{-1}(B), +, \Omega)$ *for each* $(B, +, \Omega) \in R'_A$. *The mapping* φ *conserves the usual inclusion relation between* Ω*-subgroups, and the image of an element from* $\widetilde{R}'_A$ *under* φ *is an element of* $\widetilde{R}_A$.

Proof. In accordance with the [19] (III.2.19.) there is a bijection between the set of all Ω-subgroups of $(G, +, \Omega)$ containing $(A, +, \Omega)$ and the set of all Ω-subgroups of $(G', +, \Omega)$ defined by $(B, +, \Omega) \leftrightarrow (\varepsilon^{-1}(B), +, \Omega)$ for each $(B, +, \Omega) \prec (G/A, +, \Omega)$ and this bijection conserves the usual inclusion relation between Ω-subgroups, and the image of an element of $\widetilde{R}'_A$ is an ideal.

We show now that in this bijection the image of a closed Ω-subgroup is a closed Ω-subgroup. If $(B', +, \Omega) \in R'_A$, then $\varepsilon^{-1}(B')$ is closed, because the natural mapping is continuous. On the other hand, if $(B, +, \Omega) \in$ $\in R_A$ and $B' = \varepsilon(B)$, then $B = \varepsilon^{-1}(B')$. Indeed, let $g_1 + A$ be an arbitrary element of B' and let g be an arbitrary element of $g_1 + A$. Because $g_1 +$ $+ A \in B'$, it can be well supposed that the representative of the class g_1+ $+ A$ is an element of $B : g_1 \in B$. Consequently, because $g \in g_1 + A$, there is an element $a \in A$ such that $g = g_1 + a$. But $g_1 \in B$ and $a \in A \subseteq B$, which imply that $g \in B$. Hence, if B contains an element of a class, then B contains all elements of this class. So $\varepsilon^{-1}(B') = B$.

In the quotient topology τ_A on G/A, a subset $B' \subseteq G/A$ is closed subset if, and only if, $\varepsilon^{-1}(B')$ is closed in $(G, +, \Omega)$. This observation implies that $(B', +, \Omega) \in R'_A$ whenever $(B, +, \Omega) \in R_A$.

THEOREM 6.6. *Let us consider* $(G_1, +, \Omega, \tau_1)$ *and* $(G_2, +, \Omega, \tau_2)$ *two arbitrary elements of* $Top\ \mathcal{G}_\Omega$ *and let* $\alpha : G_1 \to G_2$ *be an open continuous and surjective homomorphism. If* τ_1 *is a filter topology for* $(G_1, +, \Omega)$ *then* τ_2 *is a filter topology for* $(G_2, +, \Omega)$.

Proof. In accordance with the Theorem 5.4., the quotient topology τ_φ on $G/Ker\ \alpha$ relative to the natural mapping $\varphi : G \to G/Ker\ \alpha$, is a filter topology. The Theorem 6.1. implies that there is a homeomorphic isomorphism $\bar{\alpha}: G_1/Ker\ \alpha \to G_2$. So, in accordance with the Theorem 5.5., the topology τ_2 for $(G, +, \Omega)$ is a filter topology.

COROLLARY. *Let us consider* $(G_1, +, \Omega, \tau_1)$ *and* $(G_2, +, \Omega, \tau_2)$ *two arbitrary elements of* $Top\ \mathcal{G}_\Omega$ *and let* $\alpha: G_1 \to G_2$ *be an open continuous homomorphism. If* τ_1 *is a filter topology for* $(G_1, +, \Omega)$, *then* $(\tau_2)_{\alpha(G_1)}$ *is a filter topology for* $(\alpha(G_1), +, \Omega)$.

Indeed, the homomorphism $\alpha_1: G_1 \to \alpha(G_1) \subseteq G_2$, defined by $\alpha_1(x) = \alpha(x)$ for each $x \in G_1$, is an open continuous surjective homomorphism. That — in accordance with the Theorem 6.6. — is exactly what we wanted to prove.

(Received June 15, 1971)

REFERENCES

1. Ballier, F., *Über lineartopologische Algebren*, Jour. Reine angew. Math., **195**, 1956, 42—75.
2. Bolker, E. D., *Inverse Limits of Solvable Groups*, Proc. of the Am. Math. Soc., **14**, 1963, 147—152.
3. Bourbaki, N., Él. de Math., Livr. III, *Topologie générale*, ch. 3—4; *Groupes top. — Nombres réels*, Paris, 1960.
4. Bourbaki, N., *Él. de Math.*, fasc. XXVIII, *Algebre commutative*, ch. 3—4, Paris, 1961.
5. Cohn, P. M., *Universal Algebra*, Harper and Row, New York, 1965.
6. Dantzig, D. van, *Einige Sätze über topologische Algebra*, Jahresbericht der D.M.V., **41**, 1932, 42—44.
7. Dantzig, D. van, *Studien über topologische Algebra*, Dissertation, Amsterdam, H.J., Paris, 1931.
8. Dantzig, D. van, *Zur topologischen Algebra*, Math. Ann., **107**, 1933, 587—626.
9. Hall, M. jr., *A Topology for Free Groups and Related Groups*, Annals of Math., **52**, 1, 1950, 127—139.
10. Higgins, P. J., *Groups with Multiple Operators*, Proc. London Math. Soc., **6**, 1956, 366—416.
11. Husain, T., *Introduction to Topological Groups*, W. B. Saundes Company, 1966.
12. Kelley, J. L., *General Topology*, Toronto—New York—London, 1964.
13. Krull, W., *Galoische Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen*, Math. Ann., **100**, 1928, 687—697.
14. Krull, W., *Zur Theorie der Gruppen mit Untergruppentopologie*, Abhandlungen Math. Sem. Univ. Hamburg, **28**, 1965, 1/2, 51—97.
15. Malcev, A. I., *K obščej teorii algebraičeskich sistem*, Mat. sb., **35** (77), 1954.
16. Maurer, I. Gy. and Szilágyi, M., *Über eine Untergruppentopologie der Operatorgruppen*, Publ. of the Techn. Univ. Miskolc, **XXX**, 1970, 289—298.
17. Maurer, I. Gy. and Szilágyi, M., *Über gewisse Topologien, die in der Menge der eindeutigen Abbildungen einer Menge in eine Operatorgruppe definiert sind*, Publ. Math., Debrecen, **14**, 1967, 1/4, 161—168.
18. Maurer, I. Gy. and Szilágyi, M., *Sur les produits filtrés de certains groupes topologiques*, Sem. Mat. Univ. Padova, **XLIII**, 1970, 247—260.
19. Kurosh, A. C., *Lekcii po obščej algebre*, Moskva, 1962.
20. Nagata, M., *Local Rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Math., **13**, New York—London, 1962.

21. Northcott, D. G., *Ideal Theory*, Cambridge Tracts in Math Physics, **42**, Cambridge, 1953.
22. Pontriagin, L., *Topological Groups*, Princeton, 1939.
23. Prüfer, H., *Theorie der Abelschen Gruppen, II*, Math. Zschr., **22**, 1925, 222—249.
24. Radu, N., *Inele locale I—II*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1968—1969.
25. Schöneborn, H., *Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen, I—II*, Math. Zschr., **59**, 1954, 455—473.
26. Schöneborn, H., *Über eine Klasse von topologischen Gruppen*, Math. Zschr., **61**, 1955, 357—373.
27. Szász, F., *Topológikus algebrákról és gyürükről I*, Mat. Lap., **XIII**, 1962, 3/4.
28. Zelinsky, D., *Rings with Ideal Nuclei*, Duke Math. Jour., **18**, 1951, 431—442.
29. Zelinsky, D., *Complete Fields from Local Rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **37**, 1951, 379—381.
30. Zelinsky, D., *Linearly Compact Modules and Rings*, Amer. Jour. Math., **75**, 1953 79—90.

FAMILII DE APLICAŢII ŞI PUNCTE FIXE

NICOLAE MUREŞAN

I. Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Aplicaţia f a spaţiului X în el însuşi este o contracţie generalizată dacă există numerele nenegative α, β, γ astfel încît

$$d(f(x), f(y)) \leqq \alpha d(x, y) + \beta/d(x, f(x)) + d(y, f(y))/ + \gamma/d(x, f(y)) + \\ + d(y, f(x))/ \forall x, y \in X, \ \alpha + 2\beta + 2\gamma < 1 \quad (1)$$

Este cunoscută [1] următoarea teoremă de punct fix: Dacă (X, d) spaţiu metric complet şi $f: X \to X$ îndeplineşte condiţia (1) atunci f are un punct fix unic şi acesta se poate obţine prin metoda aproximaţiilor succesive, pornind de la orice element al spaţiului. În nota de faţă ne propunem să studiem dependenţa de parametru a punctului fix.

II. Are loc:

TEOREMA 1. *Fie (X, d) spaţiu metric complet, Λ spaţiu topologic şi $f: X \times \Lambda \to X$. Considerăm aplicaţiile $f_x: \Lambda \to X$, $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ şi $f_\lambda: X \to X$, $x \mapsto f(x, \lambda)$.*
Dacă: (i) f_x continuă
(ii) f_λ contracţie generalizată cu α, β, γ ce nu depind de λ atunci punctul fix apllicaţiei a f_γ depinde continuu de parametrul λ.

Demonstraţie. Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ şi $f_{\lambda_1}(x_1) = x_1$, $f_{\lambda_2}(x_2) = x_2$ unde x_1 şi x_2 sînt punctele fixe unice ale aplicaţiei f_{λ_1} respectiv f_{λ_2}. Existenţa lor este asigurată de condiţia (ii) în virtutea teoremei dată în [1]. Avem

$$d(x_1, x_2) = d(f_{\lambda_1}(x_1), f_{\lambda_2}(x_2)) \leqslant d(f_{\lambda_1}(x_1), f_{\lambda_1}(x_2)) + d(f_{\lambda_1}(x_2), f_{\lambda_2}(x_2)) \quad (2)$$

Avînd în vedere (ii)

$$d(f_{\lambda_1}(x_1), f_{\lambda_1}(x_2)) \leqslant \alpha d(x_1, x_2) + \beta/d(x_1, f_{\lambda_1}(x_1)) + d(x_2, f_{\lambda_1}(x_2))/ + \\ + \gamma/d(x_1, f_{\lambda_1}(x_2)) + d(x_2, f_{\lambda_1})(x_1))/ \leqq \alpha d(x_1, x_2) + \beta d(x_2, f_{\lambda_1}(x_2)) + \\ + \gamma/d(x_1, x_2) + d(x_2, f_{\lambda_1}(x_2)) + d(x_2, x_1)/ = \\ = (\alpha + 2\gamma) d(x_1, x_2) + (\beta + \gamma) d(f_{\lambda_2}(x_2), f_{\lambda_1}(x_2))$$

Revenind în (2) obţinem

$$d(x_1, x_2) \leqslant (\alpha + 2\gamma)d(x_1, x_2) + (1 + \beta + \gamma)d(f_{\lambda_2}(x_2), f_{\lambda_1}(x_2))$$

$$d(x_1, x_2) \leqslant \frac{1 + \beta + \gamma}{1 - \alpha - 2\gamma} d(f_{\lambda_2}(x_2), f_{\lambda_1}(x_2))$$

Făcînd $\lambda_1 \to \lambda_2$ şi avînd în vedere condiţia (i) din enunţ rezultă

$$d(x_1, x_2) \to 0$$

TEOREMA 2. *Dacă $(X\ d)$ spaţiu metric complet şi $f_n, f : X \to X$ verifică condiţiile:*

(i) *şirul (f_n) converge uniform către f*

(ii) *f_n are cel puţin un punct fix pentru fiecare n*

(*iii*) *f contracţie generalizată*

Atunci x_0 fiind punctul fix unic al lui f şi x_n unul din punctele fixe ale lui f_n, şirul $(x_n)_{n \in N}$ este convergent şi limita sa este x_0.

Demonstraţie. Avem

$$d(x_n, x_0) = d(f_n(x_n), f(x_0)) \leqslant d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_0)) \tag{3}$$

Avînd în vedere condiţia (iii)

$$d(f(x_n), f(x_0)) \leqslant \alpha d(x_n, x_0) + \beta/d(x_n, f(x_n)) + d(x_0, f(x_0))/ +$$

$$+ \gamma/d(x_n, f(x_0)) + d(x_0, f(x_n))| \leqslant \alpha d(x_n, x_0) + \beta d(x_n, f(x_n)) + \gamma/d(x_n, x_0) +$$

$$+ d(x_0, x_n) + d(x_n, f(x_n))/ = (\alpha + 2\gamma)d(x_n, x_0) + (\beta + \gamma)d(f_n(x_n), f(x_n))$$

Revenind la (3) obţinem

$$d(x_n, x_0) \leqslant \frac{1 + \beta + \gamma}{1 - \alpha - 2\gamma} d(f_n(x_n), f(x_n))$$

Făcînd $n \to \infty$ şi avînd în vedere condiţia (i) rezultă

$$d(x_n, x_0) \to 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

III. *Observaţie.* Dacă în teorema 1 luăm $\beta = \gamma = 0$ obţinem o teoremă dată în [4]. Făcînd aceeaşi particularizare în teorema 2 obţinem un rezultat conţinut în [2], iar dacă luăm $\gamma = 0$ obţinem o teoremă dată în [3].

(Intrat în redacţie la 11 decembrie 1972)

BIBLIOGRAFIE

1. C i r i c, L., *Generalized contractions and fix point theorems*, Publication de l'Institut Math., **12** (1971).
2. N a d l e r, S a m. B., *Sequence of contractions and fixed points*, Pacific J. Math., **27** (1968), 579—585.
3. R u s, I. A., *Some fixed point theorems in metric spaces*, Rend. Inst. Matem. Univ. Trieste, **3** (1971), fasc. 2.
4. S c h w a r t z, L., *Cours d'analyse*, Herman, Paris, 1967.

СЕМЕЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

(Р е з ю м е)

Пусть (X, d) — полное метрическое пространство. Отображение $f: X \to X$ называется обобщенным сжатием, если удовлетворяет условию (1).

В работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, Λ — топологическое пространство и $f: X x \Lambda \to X$. Рассматриваются отображения $f_x: \Lambda \to X$, $\lambda \to f(x, \lambda)$ и $f\lambda: X \to X$, $x \to f(x, \lambda)$.

Если: (i) f_x — непрерывна.

(ii) f — обобщенное сжатие с α, β, γ, не зависящими от λ, тогда неподвижная точка отображения f непрерывно зависит от параметра λ.

Теорема 2. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и f_n, $f: X \to X$ удовлетворяет условиям:

(i) последовательность (f_u) равномерно сходится к f,

(ii) f_n имеет по крайней мере одну неподвижную точку для каждого n,

(iii) f обобщенное сжатие. Тогда, x_0 будучи единственной неподвижной точкой f и x_u — одной из неподвижных точек f_u, последовательность $(x_n)_{n \in N}$ сходится к x_0.

FAMILIES OF APPLICATIONS AND FIXED POINTS

(S u m m a r y)

Let (x, d) be a complete metrical space. The application $f: x \to x$ is called generalized contraction if it satisfies condition (1).

The following theorems are demonstrated in the paper:

Theorem 1. Let (x, d) be a complete metrical space, Λ a topological space and $f: X x \Lambda \to x$. We consider the applications $f_x: \Lambda \to x$, $\lambda \to f(x, \lambda)$ and $f_\lambda: x \to x$, $x \to f(x, \lambda)$.

If: (i) f_x continues

(ii) f generalized contradiction with α, β, γ which do not depend on λ; then the fixed point of the application f_λ depends continuously on parameter λ.

Theorem 2. If (x, d) complete metrical space and f_n, $f: x \to x$ verifies the conditions:

(i) range (f_n) converges uniformly towards f.

(ii) f_n has at least a fixed point for each n.

(iii) f generalized contraction.

Then x_0 being the unique fixed point of f and x_n one of the fixed points of f_n, the range $(x_n)_{n \in N}$ is convergent and its limit is x_0.

SUR UNE MÉTHODE DE LOCALISATION DES ZÉROS D'UN POLINÔME

WRONA WLADYSLAW

Le but de cette note est de définir une certaine matrice contenant un paramètre laquelle, transformée par similitude, donne une avantageuse localisation des zéros d'un polynôme.

On indique la manière de calculer la valeur du paramètre pour laquelle les rayons de certains cercles, contenant des zéros du polynôme, sont les plus petits possibles.

Un cas particulier de l'estimation obtenue est un résultat de M. Parodi, donné dans [1].

Considérons le polynôme:

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

à coefficients complexes.

Soit:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -\frac{a_2}{\alpha} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{\alpha^{n-2}} & -\frac{a_n}{\alpha^{n-1}} \\ \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

une matrice associée au polynôme (1) et posons:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \ldots & \alpha \\ & & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix}$$

Considérons la matrice:

$$C = BAB^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 + \alpha - \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha} - \frac{a_3 - \alpha a_2}{\alpha^2} & \dots & - \frac{a_{n-1} - \alpha a_{n-2}}{\alpha^{n-2}} & - \frac{a_n - \alpha a_{n-1} + \alpha^n}{\alpha^{n-1}} \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & -\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

Les valeurs caractéristiques de la matrice des zéros du polynôme (1) sont situées dans le domaine réunion des disques (1)

$$U_{\eta\mu}: |z + a_1 - \alpha| \leqslant \left|\frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha}\right| + \dots + \left|\frac{a_n - \alpha a_{n-2} + \alpha^n}{\alpha^{n-1}}\right| \cup |z| \leqslant 2|\alpha| \tag{2}$$

Dans le cas où, dans (2), $\alpha = 1$, on obtient la localisation de M. Parodi [2].

Nous nous occuperons de la détermination d'une valeur du paramètre pour laquelle le rayon du cercle sera le plus petit possible.

Dans ce cas, nous transformerons l'expression:

$$|a_2 - \alpha a_1| \cdot \frac{1}{|\alpha|} + |a_3 - \alpha a_2| \cdot \frac{1}{|\alpha|^2} + \dots + |a_n - \alpha a_{n-1} + \alpha^n| \cdot \frac{1}{\alpha^{n-1}} \tag{3}$$

en profitant de l'inégalité d'Hölder [3], page 37

$$|z + a_2 - \alpha| \leqslant [|a_2 - \alpha a_1|^q + \dots + |a_n - \alpha a_{n-1} + \alpha^n|^q]^{1/q} \left[\frac{|\alpha|^{(n-1)p} - 1}{|\alpha|^{(n-1)p}(|\alpha|^p - 1)}\right]^{1/p}. \tag{4}$$

Considérons le premier des facteurs:

$$|a_2 - \alpha a_1|^q + \dots + |a_n - \alpha a_{n-1}|^q + |\alpha|^{nq}, \tag{5}$$

ou

$$a_k = \varphi_k + i\psi_k,\ k = 1, 2, \dots, n \text{ et } p = q = 2. \tag{6}$$

De (5) et (6) il résulte:

$$(\varphi_2 - \alpha\varphi_1)^2 + (\psi_2 - \alpha\psi_1)^2 + (\varphi_3 - \alpha\varphi_2)^2 + (\psi_3 - \alpha\psi_2)^2 + \dots +$$

$$+ (\varphi_n - \alpha\varphi_{n-1})^2 + (\psi_n - \alpha\psi_{n-1})^2 + |\alpha|^{2n} = |\alpha|^{2n} + \alpha^2 \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k^2 + \psi_k^2) -$$

$$- 2\alpha \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k\varphi_{k+1} + \psi_k\psi_{k+1}) + \sum_{k=2}^{n} (\varphi_k^2 + \psi_k^2).$$

La fonction

$$Q(\alpha) = |\alpha|^{2n} + \alpha^2 \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k^2 + \psi_k^2) - 2\alpha \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k \varphi_{k+1} + \psi_k \psi_{k+1}) + \sum_{k=2}^{n} (\varphi_k^2 + \psi_k^2)$$

a son minimum au point α_0 pour lequel

$$Q'(\alpha_0) = 0 \quad \text{et} \quad Q''(\alpha_0) > 0$$

$$Q'(\alpha) = 2n|\alpha|^{2n-1} + 2\alpha \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k^2 + \psi_k^2) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k \varphi_{k+1} + \psi_k \psi_{k+1}) \qquad (7)$$

$$Q''(\alpha) = 2n(2n-1)|\alpha|^{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k^2 + \psi_k^2).$$

La dérivée seconde de la fonction $Q(\alpha)$ est positive pour chaque valeur du paramètre α. Pour déterminer le minimum de la fonction $Q(\alpha)$, il suffit de poser:

$$Q'(\alpha) = 0.$$

Posons:

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k^2 + \psi_k^2), \quad b = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k \varphi_{k+1} + \psi_k \psi_{k+1}). \qquad (8)$$

De (7) et (8) il résulte:

$$|\alpha|^{2n-1} = -a\alpha + b \qquad (9)$$

L'équation (9) a deux racines réelles qui peuvent être utilisées pour calculer les rayons des cercles contenant les zéros du polynôme. On peut vérifier laquelle des racines des paramètres donne une localisation plus avantageuse, ou prendre une partie commune des domaines.

On peut transformer la matrice A à l'aide de la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 1! & & & 0 \\ & 2! & & \\ & & 3! & \\ 0 & & & \ddots \; n! \end{pmatrix} \qquad (10)$$

On obtient alors des nouveaux disques contenant les zéros du polynôme.

$S = PAP^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} -a_1 + \alpha & -\frac{a_2 - \alpha a_1}{2!\,\alpha} & -\frac{a_3 - \alpha a_2}{3!\,\alpha^2} & \dots & -\frac{a_{n-1} - \alpha a_{n-2}}{(n-1)!\,\alpha^{n-2}} & -\frac{a_n - \alpha a_{n-1} + \alpha^n}{n!\,\alpha^{n-1}} \\ 2!\,\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{2!}{n!}\alpha \\ 0 & \frac{3!}{2!}\alpha & 0 & \dots & 0 & -\frac{3!}{n!}\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n!}{(n-2)!}\alpha & -\frac{n!}{n!}\alpha \end{pmatrix}$$

Les valeurs caractéristiques de la matrice S sont situées dans le domaine $U_{\eta\mu}$ réunion des disques:

$$U_{\eta\mu}: |z + a - \alpha| \leqslant \left|\frac{a_2 - \alpha a_1}{2!\,\alpha}\right| + \ldots + \left|\frac{a_n - \alpha a_{n-1} + \alpha^n}{n!\,\alpha^{n-1}}\right| \cup$$
$$\cup\, |z| \leqslant (n-1)|\alpha| + \frac{1}{n}|\alpha| \cup |z + \alpha| \leqslant |n\alpha|. \tag{11}$$

Si les coefficients du polynôme (1) sont en progression géométrique, de (11) on déduit:

$$|a_i - \alpha a_{i-1}| = 0. \tag{12}$$

Si les inégalités

$$|a_1 - \alpha| > \left(\frac{1}{n!} + (n-1) + \frac{1}{n}\right)|\alpha|$$

et

$$|a_1 - 2\alpha| > \left(\frac{1}{n!} + n\right)|\alpha|$$

seront accomplies, de (12), on déduit que le cercle de rayon η n'aura pas des points communes avec les cercles de rayons μ et α.

En appliquant le théorème de Brauer [3], on peut énoncer le:

Théorème: Si les coefficients du polynôme sont en progression géométrique et si les inégalitées:

$$\left|\frac{a_1^2 - a_2}{a_2}\right| > n - 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad \left|\frac{a_1^2 - 2a_2}{a_2}\right| > \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}$$

sont vérifiées, alors, dans le cercle:

$$|z + a_1 - a_2/a_1| \leqslant \frac{1}{n!}|a_2/a_1|$$

se situe un et seulement un zéro du polynôme.

L'estimation (6) est intéressante dans le cas: $|a_2/a_1| = 1$. Alors, on obtient l'estimation de M. Parodi [2] pour un seul zéro du polynôme avec les coefficients égaux.

(Manuscrit reçu le 22 ianvier 1972)

BIBLIOGRAPFIE

1. Gerchgorin, S. A., *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Izw. A. N ZSSR otd. fiz.-mat. nauk, 1931, 749—754.
2. Parodi, M., *Sur la localisation des zéros des polynômes dont les coefficientes ont des valeurs voisines*, Bulletin des Sciences mathématiques, 2° série, **84**, 1960, 65—75.
3. Parodi, M., *Lokalizacija charakterističeskich čisel i ejo primenenija*, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moskva, 1960, 71.

ASUPRA UNEI METODE DE LOCALIZARE A ZEROURILOR UNUI POLINOM

(Rezumat)

În lucrare se dă o metodă pentru localizarea zerourilor unui polinom. Astfel se generalizează unele rezultate ale lui M. Parodi.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ ОДНОГО МНОГОЧЛЕНА

(Резюме)

В работе дается метод локализации нулей одного многочлена. Таким образом обобщаются некоторые результаты М. Пароди.

HYPERSURFACES DANS UN ESPACE RIEMANNIEN RÉCURRENT

P. ENGHIŞ

1. Généralités. Soit V_m un espace riemannien à métrique

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \tag{1,1}$$

à tenseur de courbure $\overline{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ et à tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$. On dit que l'espace V_m est récurrent [11] s'il existe un vecteur covariant φ_ρ tel que

$$\overline{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta\,;\,\rho} = \varphi_\rho \overline{R}_{\beta\gamma\delta} \tag{1,2}$$

ou le point et virgule désigne la dérivée covariante par rapport au tenseur métrique de l'espace.

En contractant la relation (1,2) en α et γ on obtient

$$\overline{R}_{\beta\delta\,;\,\rho} = \varphi_\rho \overline{R}_{\beta\delta} \tag{1.3}$$

Un espace riemannian qui vérifie (1,3) est nommé Ricci-récurrent [7]. Il résulte immédiatement qu'un espace récurrent est toujours Ricci-récurrent, la réciproque n'étant pas toujours vraie [9].

Soit maintenant V_n un espace riemannian à métrique

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{1,4}$$

plongé dans l'espace riemannian V_m, c'est-à-dire donné par les équations

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^n) \quad \alpha = 1, \ldots, m,\ m > n \tag{1,5}$$

où rang $\left\| \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\| = n$ [1].

Pour le déplacement dans V_n on a

$$a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = g_{ij} dx^i dx^j$$

(les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ prennent les valeurs $1, 2, \ldots, m$ et les indices $i, j, k, \ldots$ les valeurs $1, 2, \ldots, n$) et donc on a

$$a_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = g_{ij} \tag{1,6}$$

où $a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} = g_{ij}$, ou la virgule désigne la dérivée covariante par rapport à la métrique (1,4).

Désignons par $N^\alpha_p (p = n + 1, \ldots, m)$ $m - n$ normales à V_n unitaires réciproquement ortogonales. On a

$$a_{\alpha\beta} N^\alpha_p N^\beta_p = e_p, \quad a_{\alpha\beta} N^\alpha_p N^\beta_q = 0, \quad p \neq q, \quad a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} N^\beta_p = 0 \tag{1,7}$$

ou $e_p = \pm 1$.

Si l'on pose

$$y^\alpha_{,ij} = \sum_p e_p \Omega_{p|ij} N^\alpha_p \tag{1,8}$$

alors le second tenseur fondamental de V_n est donné par

$$\Omega_{p|ij} = y^\alpha_{,ij} N_{p|\alpha} \quad p = n + 1, \ldots, m \tag{1,9}$$

Supposons l'espace V_m récurrent alors la relation (1,2) où φ_ρ est un gradient [11] est satisfaite. Si on note par φ_r la composante tangentielle de ce gradient on a:

$$\varphi_\rho y^\rho_{,r} = \varphi_r \tag{1,10}$$

En prenant la dérivée covariante de la relation (1,10) par rapport à g_{ij} nous avons

$$\varphi_{\rho,\lambda} y^\lambda_{,i} y^\rho_{,r} + \varphi_\rho y^\rho_{,ri} = \varphi_{r,i}$$

ou tenant compte de (1,8) on a

$$\varphi_{\rho,\lambda} y^\lambda_{,i} y^\rho_{,r} + \varphi_\rho \sum_p e_p \Omega_{p|ri} N^\rho_p = \varphi_{r,i} \tag{1,11}$$

De la relation (1,11), en tenant compte que φ_ρ est un gradient et que $\Omega_{p|ij} = \Omega_{p|ji}$ il résulte $\varphi_{r,i} = \varphi_{i,r}$ et donc φ_r est aussi un gradient [6].

2. Hypersurfaces dans un V_m récurrent. Dans ce qui suit nous supposons l'espace V_m récurrent et $m = n + 1$. Les équations de Gauss et Codazzi pour l'espace V_n plongé dans V_{n+1} sont [1]

$$\begin{aligned} R_{ijkh} &= e(\Omega_{ik}\Omega_{jh} - \Omega_{ih}\Omega_{jk}) + \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} y^\gamma_{,k} y^\delta_{,h} \\ \Omega_{ij,k} - \Omega_{ik,j} &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\alpha_{,i} y^\gamma_{,j} y^\delta_{,k} N^\beta \end{aligned} \tag{2,1}$$

En prenant la dérivée covariante de la première relation (2,1) par rapport à g_{ij} et tenant compte de (1,8) et de la deuxième relation (2,1) on a

$$\begin{aligned} R_{ijkh,r} = e[\Omega_{ik,r}\Omega_{jh} + \Omega_{ik}\Omega_{jh,r} - \Omega_{ih,r}\Omega_{jk} - \Omega_{ih}\Omega_{jk,r} - \\ - \Omega_{jk,h}\Omega_{ir} + \Omega_{jh,k}\Omega_{ir} + \Omega_{ik,h}\Omega_{jr} - \Omega_{ih,k}\Omega_{jr} - \\ - \Omega_{hi,j}\Omega_{kr} + \Omega_{hj,i}\Omega_{kr} + \Omega_{ki,j}\Omega_{hr} - \Omega_{kj,i}\Omega_{hr}] + \\ + \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\rho}y^{\rho}_{,r}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\gamma}_{,k}y^{\delta}_{,h} \end{aligned} \tag{2,2}$$

L'espace V_{n+1} étant récurrent, supposons que le vecteur de récurrence φ_ρ n'est pas orthogonal à V_n, donc $\varphi_r \neq 0$. En tenant compte de (1,2) et (1,10) dans (2,2) nous avons

$$\begin{aligned} R_{ijkh,r} - \varphi_r R_{ijkh} = - e\varphi_r\Omega_{ijkh} + e\Omega_{ijkh,r} - \\ - 4e\{\Omega_{[i|r|]}\Omega_{j][k,h]} + \Omega_{[k|r|]}\Omega_{h][i,j]}\} \end{aligned} \tag{2,3}$$

où par le crochet on a notté l'antisymétrisation et le tenseur $\Omega_{ijkh} = \Omega_{ik}\Omega_{jh} - \Omega_{ih}\Omega_{jk}$. On a donc

PROPOSITION 2.1. Les hypersurfaces d'un espace riemannien récurrent vérifient la relation (2,3).

Le tenseur Ω_{ijkh} introduit dans les relations (2,3) a des propriétés analogues au tenseur de courbure à savoir:

$$\begin{aligned} \Omega_{ijkh} = \Omega_{khij} = - \Omega_{jikh} = - \Omega_{ijhk} \\ \Omega_{ijkh} + \Omega_{ihkj} + \Omega_{ikjh} = 0 \end{aligned} \tag{2,4}$$

et en ce qui concerne les tenseurs contractés, l'un est symétrique et l'autre est nul.

De l'identité de Bianchi

$$R_{ijkh,r} + R_{ijhr,k} + R_{ijrk,h} = 0 \tag{2,5}$$

et des relations (2,3) on déduit

PROPOSITION 2.2. Pour une hypersurface d'un espace riemannien récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface on a

$$\begin{aligned} \varphi_r R_{ijkh} + \varphi_k R_{ijhr} + \varphi_h R_{ijrk} = \varphi_r\Omega_{ijkh} + \\ + \varphi_k\Omega_{ijhr} + \varphi_h\Omega_{ijrk} \end{aligned} \tag{2,6}$$

Si le second tenseur fondamental d'une hypersurface V_n d'un espace riemannien récurrent satisfait les relations

$$\varphi_r\Omega_{ijkh} - \Omega_{ijkh,r} + 4\{\Omega_{[i|r|]}\Omega_{j][h,k]} + \Omega_{[k|r|]}\Omega_{h][i,j]}\} = 0 \tag{2,7}$$

alors de (2,3) on déduit que la hypersurface est elle aussi récurrente avec le vecteur de récurrence φ_r et réciproquement. On a

PROPOSITION 2.3. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface d'un espace riemannien récurrent avec le vecteor de récurrence nonorthogonal à la hypersurface soit récurrent est que le second tenseur fondamental vérifie la relation (2,7).

De (2,6) on déduit

PROPOSITION 2.4. Pour une hypersurface récurrente d'un espace riemannie récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface on a

$$\varphi_r\Omega_{ijkh} + \varphi_k\Omega_{ijhr} + \varphi_h\Omega_{ijrk} = 0 \tag{2,8}$$

Des relations (2,8) si on les multiplie par g^{ri} et si on les contracte on déduit

PROPOSITION 2.5. Le vecteur de récurrence d'une hypersurface récurrente d'un espace riemannien récurrent est une solution du système

$$(\Omega^r_{jkh} - \delta^r_k\Omega^s_{jhs} + \delta^r_h\Omega^s_{jsk})\varphi_r = 0 \tag{2,9}$$

De la proposition 2.5 il résulte immédiatement

COROLLAIRE. *Une condition nécessaire pour qu'une hypersurface d'un espace riemannien récurrent soit récurrent est que*

$$rang(\Omega^r_{jkh} - \delta^r_k\Omega^s_{jhs} + \delta^r_h\Omega^s_{jsk}) < n$$

Une hypersurface d'un espace riemannien est totalement-géodésique [1] si $\Omega_{ij=0}$. Pour les hypersurfaces totalement-géodésiques de (2,3) il résulte

PROPOSITION 2.6. Les hypersurfaces totalement-géodésiques d'un espace riemannien récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface sont récurrentes.

Supposons maintenant que la hypersurface V_n est totalement-ombilicale, donc

$$\Omega_{ij} = \rho g_{ij} \tag{2,10}$$

ou ρ est un scalaire invariant.

En remplaçant (2,10) dans (2,3) nous avons

$$\begin{aligned} R_{ijkh,r} - \varphi_r R_{ijkh} = &- e\varphi_r\rho^2(g_i\, g_{jh} - g_{ih}g_{jk}) + 2\rho[2\rho_{,r}(g_{ik}g_{jh} - \\ &- g_{ih}g_{jk}) + \rho_{,h}(g_{ik}g_{jr} - g_{jk}g_{ir}) + \rho_{,k}(g_{jh}g_{ir} - g_{ih}g_{jr}) + \\ &+ \rho_{,j}(g_{ik}g_{hr} - g_{ih}g_{kr}) + \rho_{,i}(g_{hj}g_{kr} - g_{kj}g_{hr})] \end{aligned} \tag{2,11}$$

En multipliant (2,11) avec g^{ik} et en sommant on a la relation

$$\begin{aligned} R_{jh,r} - \varphi_r R_{jh} = &- e(n-1)\varphi_r\rho^2 g_{jh} + e\rho[2n\rho_{,r}g_{jh} + \\ &+ (n-2)(\rho_{,h}g_{ir} + \rho_{,j}g_{hr})] \end{aligned} \tag{2,12}$$

de laquelle après une nouvelle contraction avec g^{jh} on déduit

$$R_{,r} - \varphi_r R = -en(n-1)\rho^2\varphi_r + 2(n^2+n-2)e\rho\rho_{,r} \qquad (2,13)$$

et ainsi on retrouve pour les hypersurfaces les relations de T. Myazawa [6]. On a donc

PROPOSITION 2.7. Le tenseur de courbure, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire d'une hypersurface totalement-ombilicale d'un espace riemannien récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface vérifient les relations (2,11), (2,12), (2,13).

De l'identité de Bianchi (2,5) contractée en i et r et les relations (2,11) et (2,12) on peut déduire aussi les relations [8]:

$$\begin{aligned} \varphi_r R^r_{ijk} - \varphi_k R_{jh} + \varphi_h R_{jk} &= (2-n)(\varphi_k g_{jh} - \varphi_r g_{jk})\rho^2 \\ 2\varphi_r R^r_k - \varphi_k R &= (2-n)(n-1)\varphi_k\rho^2 \end{aligned} \qquad (2,14)$$

Dans un travail antérieur [2] on a introduit le tenseur $A^i_{jhk} = R^i_{jkh} - (\delta^i_k R_{jh} - \delta^i_h R_{jk})$ à l'aide duquel on a établi une condition nécessaire de récurrence d'un espace riemannien. De (2,14) il résulte:

PROPOSITION 2.8. Le tenseur A^i_{jkh} d'une hypersurface totalement-ombilicale d'un espace riemannien récurrent satisfait les relations:

$$A^i_{jkh}\,\varphi_i = \frac{1}{n-1}\,[2\varphi^i(g_{jh}R_{ik} - g_{jk}R_{ih}) + R(\varphi_h g_{jk} - \varphi_k g_{jh}) \qquad (2,15)$$

En prenant la dérivée covariante de la relation (2,13) par rapport à g_{ij} on a

$$\begin{aligned} R_{,rs} - \varphi_r R_{,s} - \varphi_{r,s} R = &-2en(n-1)(\rho\rho_{,s}\varphi_r + \rho^2\varphi_{r,s}) + \\ &+ 2(n^2+n-2)e(\rho_{,s}\rho_{,r} + \rho\rho_{,rs}) \end{aligned}$$

En permutant les indices r et s, puis en faisant la différence des deux relations et en tenant compte de (2,13) on a la relation

$$\rho_{,r}\varphi_s = \rho_{,s}\varphi_r$$

de laquelle il résulte

$$\rho_{;r} = \alpha\varphi_r \qquad (2,16)$$

ou α est une fonction scalaire.

Si dans (2,16) la fonction $\alpha = 0$, il resulte $\rho = \text{const.}$ Le cas $\rho = 0$ a été étudié dans la proposition 2.6.

Si $\rho = \text{const.} \neq 0$ les équations (2,11) et (2,12) deviennent

$$\begin{aligned} R_{ijkh,r} - \varphi_r R_{ijkh} &= -e\varphi_r\rho^2(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}) \\ R_{jh,r} - \varphi_r R_{jh} &= e(n-1)\varphi_r\rho^2 g_{jh} \end{aligned} \qquad (2,17)$$

En écrivant le tenseur de courbure projective

$$K_{ijkh} = R_{ijkh} - \frac{1}{n-1}(g_{ih}R_{jk} - g_{ik}R_{jh}) \qquad (2,18)$$

et en tenant compte de (2,17) on obtient

$$K_{ijkh,r} - \varphi_r K_{ijkh} = 0 \qquad (2,19)$$

et donc la hypersurface est projectivement-récurrente. Réciproquement si pour une hypersurface d'un espace riemannien récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface a lieu la relation (2,19) en remplaçant les expressions déduites de (2,11) et (2,12) et après la multiplication et contraction avec g^{jh} on trouve $\rho_{,r} = 0$, donc $\rho = \text{const.}$ et on a le résultat suivant

PROPOSITION 2.9. *La condition nécessaire et suffisante qu'une hypersurface totalement-ombilicale d'un espace riemannian récurrent avec le vector de récurrence nonorthogonal à la hypersurface soit projectivement récurrente est que* $\rho = \text{const.}$

Comme tout espace riemannian récurrent est aussi projectivement récurrent [2], de la proposition 2.9 et des relations (2,17) il résulte

PROPOSITION 2.10. *Les hypersurfaces totalement-ombilicales récurrentes d'un espace riemannian récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface sont totalement-géodesiques.*

Des propositions 2.6, 2.9 et 2.10 il résulte les observations suivantes:

1. Si pour une hypersurface totalement-ombilicale plongée dans un espace riemannian récurrent avec le vecteur de récurrance nonorthogonal à la hypersurface nous avons $\rho = \text{const} \neq 0$ elle est projectivement-récurrente sans qu'elle soit récurrente.

2. Les seules hypersurfaces totalement-ombilicales récurrente d'un espace riemannian récurrent sont celles totalement-géodésiques.

Sur la hypersurface V_n considérons le tenseur

$$Z_{ijkh} = R_{ijkh} + \frac{1}{n-2}(R_{ih}g_{jk} - R_{jh}g_{ik} + R_{jk}g_{ih} - R_{ik}g_{jh}) \qquad (2,20)$$

nommé le tenseur coharmonique [3]. Si ce tenseur satisfait les relations

$$Z_{ijkh,r} = \varphi_r Z_{ijkh} \qquad (2,21)$$

la hypersurface est nommée CHK_n (coharmonique récurrente) [5]. En prenant la dérivée covariante des relations (2,20) par rapport à g_{ij} on a

$$Z_{ijkh,r} = R_{ijkh,r} + \frac{1}{n-2}(R_{ih,r}g_{jk} - R_{jh,r}g_{ik} + R_{jk,r}g_{ih} - R_{ik,r}g_{jh}) \qquad (2,22)$$

Si dans les relations (2,22) on tient compte de (2,11) et (2,12) on a

$$Z_{ijkh,r} = \varphi_r Z_{ijkh} + \frac{1}{n-2}[n\varphi_r\rho^2 - 2(n+2)\rho\rho_{,r}](g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}) \qquad (2,23)$$

Dans la relation (2,6) si la fonction α est donnée par

$$\alpha = \frac{n}{2(n+2)}\,\rho \tag{2,24}$$

alors (2,23) devient (2,21) et la hypersurface este CHK_n. Réciproquement, si (2,21) a lieu, de (2,23) il résulte que (2,24) doit avoir lieu, et le théorème 3.8 de T. Myazawa [6] pour les hypersurfaces devient

PROPOSITION 2.11. Les hypersurfaces totalement-ombilicales d'un espace riemannian récurrent avec le vecteur de recurence nonorthogonal à la hypersurface sont hypersurfaces CHK_n si $\rho = Ce^{\frac{n}{2(n+2)}f}$ ou C est une constante positive et f est une fonction scalaire qui satisfait la relation $\frac{\partial f}{\partial x^r} = \varphi_r$.

De la proposition 2.11 et des relations (2,13) on déduit

PROPOSITION 2.12. Les hypersurfaces totalement-ombilicales coharmoniquement-récurrentes d'un espace riemannien récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface sont de courbure scalaire récurrente et réciproquement.

Des propositions 2.11 et 2.12 on débuit que le théorème 3.8 de T. Myazawa [6] peut etre énoncé ainsi:

PROPOSITION 2.13. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface totalement-ombilicale d'un espace reimannian récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface soit coharmoniquement-récurrent est que la hypersurface soit de courbure scalaire récurrente.

Soit maintenant V_n une hypersurface totalement-ombilicale Ricci-récurrente. De (2,12) on déduit

$$(1-n)\rho\varphi_r g_{ih} + 2n\rho_{,r} g_{ih} + (n-2)(\rho_{,h} g_{ir} + \rho_{,i} g_{hr}) = 0 \tag{2,25}$$

Mais une hypersurface Ricci-récurrente est aussi de courbure scalaire récurrente ce qui résulte immédiatement d'une relation analogue à (1,3) écrite pour la hypersurface, donc pour une telle hypersurface a lieu (2,16) avec α donné par (2,24). En remplacant en (2,25) on a

$$-2\varphi_r g_{ih} + n\varphi_r g_{ir} + n\varphi_i g_{hr} = 0 \tag{2,26}$$

Réciproquement, si on considère une hypersurface totalement-ombilicale coharmoniquement-récurrente pour laquelle (2,26) a lieu, de (2,24), (2,13) et (2,12) on déduit qu'elle est Ricci-récurrente. Donc

PROPOSITION 2.14. Une hypersurface totalement-ombilicale d'un espace riemannien récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface, est Ricci-récurrente si elle est coharmoniquement-récurrente et si les relations (2,26) ont lieu.

Si dans (2,16) α est une fonction scalaire arbitraire, en remplaçant dans (2,11), (2,12) et (2,13) et écrivant le tenseur de courbure conforme de la hypersurface.

$$C_{ijkh} = R_{ijkh} + \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{jh} - g_{ih}R_{jk} + g_{jh}R_{ik} - g_{jk}R_{ih}) -$$

$$- \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jh}g_{ik} - g_{jk}g_{ih})$$

on obtient aussi pour les hypersurfaces le résultat de M. Prîvanovih [8] pour les surfaces

$$C_{ijkh,r} = \varphi_r C_{ijkh}$$

donc

PROPOSITION 2.15. Les hypersurfaces totalement-ombilicales d'un espace riemannien récurrent avec le vecteur de récurrence nonorthogonal à la hypersurface sont conformément-récurrentes.

Considérons maintenant le cas où dans les relations (1,10) le vecteur de récurrence de l'espace V_{n+1} est orthogonal à a hypersurface V_n. Dans ce cas les relations (2,3) deviennent

$$R_{ijkh,r} = e\Omega_{ijkh,r} - 4e\{\Omega_{[i|r|}\Omega_{j][k,h]} + \Omega_{[k|r|}\Omega_{h][i,j]}\} \qquad (2,27)$$

donc on a

PROPOSITION 2.16. Le tenseur dérivé covariant du tenseur de courbure d'une hypersurface d'un espace riemannian récurrent avec le vecteur de récurrence orthogonal à la hypersurface est donné par (2,27).

Des relations (2,27) on déduit aussi

PROPOSITION 2.17. Si le tenseur de la seconde forme fondamentale d'une hypersurface d'un espace riemannien récurrent avec le vecteur de récurrence orthogonal à la hypersurface est covariant constant, alors la hypersurface est symétrique dans le sens de Cartan.

Si la hypersurface V_n est totalement-ombilicale, de (2,16) on déduit $\rho = \text{const.}$ et de (2,10) et de la proposition 2.17 il résulte que la hypersurface est symétrique dans le sens de Cartan. Mais dans ce cas de l'identité de Bianchi (2,5) et de la première relation (2,1) on déduit aussi

$$R_{ijkh} = e\rho[(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})$$

et la hypersurface est de courbure constante. On a donc aussi pour les hypersurfaces le résultat de Myazawa [6] énoncé par

PROPOSITION 2.18. Les hypersurfaces totalement-ombilicales d'un espace riemannian récurrent avec le vecteur de récurrence orthogonal à la hipersurface sont de courbure constante.

(Manuscrit reçu le 15 mars 1973)

BIBLIOGRAPHIE

1. Eisenhart, L. P., *Riemannian geometry*, Princeton (1949).
2. Enghiş, P., *Sur les espaces* V_n *récurrents et Ricci-récurrents*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math. Mech., f. 1 (1972), 3—6.
3. Ishii, I., *On coharmonic transformations*, Tensor N. S., **7** (1957), 70—80.
4. Matsumoto, M., *On Riemannian spaces with recurrent projective curvature*, Tensor N. S., **19** (1968), 11—18.
5. Myazawa, T., *On Riemannian spaces admitting some recurrent tensors*, T. R. U. Math. I, **2** (1966), 71—72.
6. Myazawa T. and Goro Chuman, *On certain subspaces of Riemannian recurrent spaces*, Tensor N. S., **23**, nr. 2 (1972), 253—260.
7. Paterson, E. M., *Some theorems on Ricci-recurrent spaces*, Journ. London Math. Soc., **27** (1952), 287—295.
8. Prîvanovih, M., *Neke theoreme o podirastorima sa neodrejenim liniam krivine recurrentnîh Rimannovîh prostora*, Math. Vesnic, **1** (16), 1964, 81—87.
9. Roter, W., *Quelques remarques sur les espaces récurrents et Ricci-récurrents*, Bull. de l'Acad. Pol. de Sci., **X** (1962), 533—536.
10. Sandovici, P. Enghiş, P., Tarină, M., *Spaţii* V_n *de curbură proiectivă recurentă*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Phys., f. 1 (1969), 17—22.
11. Walker, A. G., *On Ruse's spaces of recurrent curvature*, Proc. London Math. Soc., **2**, 52 (1950), 36—64.

HIPERSUPRAFEŢE ÎNTR-UN SPAŢIU RIEMANNIAN RECURENT

(Rezumat)

În lucrare se dau relaţiile (2, 3) şi (2, 6) ce le verifică hipersuprafeţele unui spaţiu riemannian recurent cu vector de recurenţă neortogonal la hipersuprafaţă. Se dă condiţia (2, 7) ca o hipersuprafaţă să fie şi ea recurentă şi relaţiile (2, 8) şi (2, 9) pe care le verifică. Se studiază apoi hipersuprafeţele total geodezice şi cele total ombilicale, dîndu-se condiţiile ca ele să fie recurente, proiectiv recurente, coarmonic recurente, respectiv conform recurente în cazul cînd vectorul de recurenţă este neortogonal la hipersuprafaţă. În încheiere se studiază hipersuprafeţele unui spaţiu riemannian recurent cu vector de recurenţă ortogonal la hipersuprafaţă.

ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В РЕКУРРЕНТНОМ РИМАННОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Резюме)

В работе показано, что гиперповерхности рекуррентного риманнового пространства с неортогональным вектором рекуррентности на гиперповерхности удовлетворяют соотношениям (2,3) и (2,6). Автор дает условие (2,7), чтобы и гиперповерхность была рекуррентной, а также соотношения (2,8) и (2,9), которым удовлетворяет эта гиперповерхность. Изучаются затем вполне геодезические и вполне омбилические гиперповерхности и даются условия, чтобы они были рекуррентными, проективно рекуррентными, когармонически рекуррентными, соответственно конформно рекуррентными в случае, если вектор рекуррентности неортогонален на гиперповерхности. В заключение изучаются гиперповерхности рекуррентного риманнового пространства с ортогональным вектором рекуррентности на гиперповерхности.

GRUPURI (G.S) CU SISTEM DE GENERATORI INVOLUTIVI (II)

ANGELA VASIU

Relații ternare și quaternare de incidență. Fie L o mulțime și ρ o relație ternară definită în L.

DEFINIȚIA 1. Relația ternară ρ se numește o relație ternară de incidență dacă sînt satisfăcute următoarele condiții:

1. relația ρ este reflexivă, adică $(a, b, c) \in \rho$ ori de cîte ori $a, b, c \in L$ nu sînt distincte;

2. relația ρ este simetrică adică $(a_1, a_2, a_3) \in \rho$ implică că orice permutare a lui a_1, a_2, a_3 aparține lui ρ;

3. din $a \neq b$ și $(a, b, c) \in \rho \wedge (a, b, d) \in \rho$ rezultă $(a, c, d) \in \rho$.

DEFINIȚIA 2. O relație quaternară θ definită în L împreună cu o relație ternară de incidență ρ se numește o relație quaternară de incidență față de relația ρ, dacă avem îndeplinite următoarele condiții:

1. $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \theta$ ori de cîte ori trei dintre elementele a_i sînt în relația ρ;

2. din $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \theta$ rezultă $(a_i, a_j, a_k, a_l) \in \theta$ pentru i, j, k, l o permutare oarecare a numerelor 1, 2, 3, 4;

3. dacă $(a_1, a_2, a_3) \overline{\in} \rho$ atunci din $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \theta \wedge (a_1, a_2, a_3, a_5) \in \theta$ rezultă $(a_1, a_2, a_4, a_5) \in \theta$.

Considerăm un grup G care admite un sistem de generatori S pentru care sînt îndeplinite axiomele A, B și C din [9].

În mulțimea S definim o relație ternară ρ prin condiția: $(a, b, c) \in \rho$ dacă $abc \in S$ pentru $a, b, c \in S$ și o relație quaternară θ pentru $a, b, c, d \in S$ prin condiția $(a, b, c, d) \in \theta$ dacă $abcd \in S^2$.

TEOREMA 1. *Relația ternară $\rho(a, b, c)$ definită în S este o relație ternară de incidență.*

Demonstrație. Pentru verificarea primei condiții a definiției 1 presupunem:

$a = b$, atunci $abc = aac \in S$
$a = c$, atunci $abc = aba = a' \in S$ (conform teoremei 2.1 [9].
$b = c$ implică $abc = abb = a \in S$.

Pentru verificarea celei de a doua condiții a definiției 1 va trebui să arătăm că din $a_1a_2a_3 \in S$ rezultă $a_ia_ja_k \in S$ $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Într-adevăr, fie $a_1, a_2, a_3 \in S$ cu $a_1a_2a_3 \in S$ atunci $(a_1a_2a_3)^{-1} \in S$ și deci $a_3a_2a_1 \in S$. Apoi avem $a_2a_3a_1 = a_1a_1a_2a_3a_1 = (a_1a_2a_3)a_1 = a\, a_1 = a_1aa_1 = a' \in S$, unde cu a am notat $a_1a_2a_3 \in S$. Aplicînd acest rezultat la $a_2a_3a_1 \in S$ deducem $a_3a_1a_2 \in S$; rezultă de asemenea $a_1a_3a_2 = (a_2a_3a_1)^{-1} \in S$ și $a_2a_1a_3 = (a_3a_1a_2)^{-1} \in S$.

Fie $a \neq b$ și $(a, b, c) \in \rho \wedge (a, b, d) \in \rho$ adică $abc \in S$ și $abd \in S$. Aceasta înseamnă că $c, d \in D(a, b)$. Avem de asemenea că $a, b \in D(a, b)$ și deci obținem $aba \in S$, $abc \in S$ și $abd \in S$ care pe baza teoremei 2.9 [9] implică că $acd \in S$ și deci $(a, c, d) \in \rho$, ceea ce verifică condiția 3 din definiția 1.

TEOREMA 2. *Relațiile ternară* ρ *și quaternară* θ *definite în* S *constituie o relație quaternară de incidență.*

Demonstrație. Condiția 1 din definiția relației quaternare de incidență rezultă din șirul de relații:

$$a_1a_2a_3a_4 = a_1(a_2a_3a_4) = a_2a_1(a_1a_3a_4) = (a_1a_2a_4)a_3a_4 = (a_1a_2a_3)a_4$$

și din proprietatea de simetrie a relației ternare ρ definite în S.

Dacă $(a_1, a_2, a_3) \in \rho$ atunci condiția 2 din definiția 2 rezultă din relațiile:

$a_1a_2a_3a_4 = (a_1a_2a_3)a_4 \in S^2$

$a_1a_2a_4a_3 = a_1a_2a_3a_3a_4a_3 = (a_1a_2a_3)a_4a_3 \in S^2$

$a_1a_3a_2a_4 = (a_1a_3a_2)a_4 \in S^2$, deoarece din $a_1a_2a_3 \in S$, conform teoremei precedente, rezultă $a_1a_3a_2 \in S$.

$a_1a_4a_2a_3 = a_1a_4a_1a_1a_2a_3 = a_4a_1(a_1a_2a_3) \in S^2$

$a_4a_3a_2a_1 = a_4(a_1a_2a_3) \in S^2$

$a_2a_1a_4a_3 = a_2a_1a_3a_3a_4a_3 = (a_2a_1a_3)a_4a_3 \in S^2$.

Dacă $a_1a_2a_3 \overline{\in} S$ atunci condiția 2 din definiția 2 rezultă din următoarea observație: $a_1a_2a_3a_4 \in S^2$ implică că $a_4 \in P(a_1, a_2, a_3)$. Avem de asemenea conform corolarului 5 al teoremei 2.1 [9] că $a_1, a_2, a_3 \in P(a_1, a_2, a_3)$, iar pe baza teoremei 2.4 [9] rezultă $a_ia_ja_ka_l \in \theta$ pentru i, j, k, l o permutare a numerelor 1, 2, 3, 4.

Pentru a demonstra condiția 3 din definiția 2 observăm că din $(a_1, a_2, a_3) \overline{\in} \rho$ și $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \theta$, rezultă $a_4 \in P(a_1, a_2, a_3)$, iar din $(a_1, a_2, a_3, a_5) \in \theta$ rezultă $a_5 \in P(a_1, a_2, a_3)$. Obținem deci $a_1, a_2, a_4, a_5 \in P(a_1, a_2, a_3)$, iar conform teoremei 2.4 [9] rezultă $(a_1, a_2, a_4, a_5) \in \theta$.

Următoarea teoremă va servi la demonstrarea proprietății că axioma „celor 9 incidențe” pusă la baza lucrărilor [10], [1] și [3] are loc în structura de incidență a spațiilor metrice introduse în [9].

TEOREMA 3. *Din* $c \in D(a, b)$ *și* $a, b \in P(a', b', c')$ *rezultă* $c \in P(a', b', c')$.

Demonstrație. Deoarece $a'b'c' \in S$ rezultă că cel puțin unul din elementele a', b', c' nu aparțin fascicolului $D(a, b)$, avînd în vedere teorema 2.9 [9]. Fie a', astfel ca $a' \overline{\in} D(a, b)$ atunci din $aba' \in S$ [și [din $a, b, a' \in \in P(a', b', c')$ conform teoremei 2.2 din [9] avem $P(a', b', c') = P(a, b, a')$. Avem $abc \in S$ și deci $abca' \in S^2$. Pe baza proprietății de simetrie a relației θ rezultă $aba'c \in S^2$ și deci $c \in P(a, b, a') = P(a', b', c')$, ceea ce trebuia demonstrat.

Demonstrăm acum „axioma celor 9 incidențe". Fie $M = \{\alpha | \alpha abc; a, b, c \in S, abc \in S\}$.

TEOREMA 4. *Dacă* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in M$ *cu* $P(\alpha_1) \neq P(\alpha_2)$ *și* $x, y, z \in S$ cu $x \neq y$ *atunci din* $\alpha_i x \in S^2$ *și* $\alpha_i y \in S^2$ *pentru* $i = 1, 2, 3$ *iar* $\alpha_i z \in S^2$ *pentru* $i = 1, 2$, *atunci rezultă că* $\alpha_3 z \in S^2$.

Demonstrație. Din $\alpha_i x, \alpha_i y, \alpha_i z \in S^2$ pentru $i = 1, 2$ și $P(\alpha_1) \neq P(\alpha_2)$ rezultă pe baza axiomei A din [9] că $xyz \in S$. Condiția $\alpha_3 z \in S^2$ și $\alpha_3 y \in S^2$ înseamnă că $x, y \in P(\alpha_3)$. Conform teoremei precedente avem $z \in P(\alpha_3)$ și deci $\alpha_3 z \in S^2$, ceea ce demonstrează teorema.

Pentru spațiul de incidență $\mathbb{S}$ $(G.S)$ asociat perechii $(G.S)$ în lucrarea [9], teorema afirmă că dacă două plane distincte x, y sînt incidente cu trei puncte P_1, P_2, P_3 cu $P_1 \neq P_2$, atunci orice plan z incident cu P_1 și P_2 este incident de asemenea și cu P_3, adică din opt relații de incidență ale tabelului

	P_1	P_2	P_3
x	x	x	x
y	x	x	x
z	x	x	o

rezultă și a noua relație de incidență notată prin *o*.

(Intrat în redacție la 15 octombrie 1972)

BIBLIOGRAFIE

1. Ahrens, J., *Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff*, Math. Zeitschr., **71** (1959).
2. Bachmann, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Grundlehren d. math. Wiss., **96** (1959).
3. Dicuonzo, V., *Su una classe de spezi metrici generalizzati*, Rend. di Mat. e delle sue appl., **XXIV**, 11–14.
4. Dicuonzo, V., *Sulla construzione gruppale di una geometria metrica a debole struttura d'incidenzo*, Rend. di Mat. e delle sue appl., **XXV**, 593–603.
5. Karzel, H., *Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie*, Arch. Math., **6** (1955), 66–76.
6. Karzel, H., *Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien*, Arch. Math., **6** (1955), 284–295.

7. Lindenberg, R., *Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. I, II, III, IV*, Math. Ann., **137** (1959), 26—41, 83—106; **142** (1961), 184—224; **158** (1965), 297—325.
8. Sperner, E., *Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik*, Arch. Math., **5** (1954), 458—468.
9. Vasiu, A., *Grupuri (G. S) cu sistem de generatori involutivi* (I), Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 2 (1973), 13—20.
10. Winternitz, A., *Zur Begründung der projektiven Geometrie: Einführung idealer Elemente unabhängig von der Anordnung*, Ann. of Math., **41** (1940), 365—390.

($G.S$) ГРУППЫ С СИСТЕМОЙ ИНВОЛЮТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ (II)

(Резюме)

Расширяется исследование пространств $\mathcal{S}(G.S)$, присоединенных к одной группе $(G.S)$ и введенных в [9] на основе определенных третичных и четвертичных соотношений падения. Данное исследование приводит к доказательству свойства, что в структуре падения $\mathcal{S}(G.S)$ имеет место „аксиома девяти падений".

$G.S$ GROUPS WITH A SYSTEM OF INVOLUTIVE GENERATORS II

(Summary)

The study of the $\mathcal{S}(G.S)$ spaces associated to a $(G.S)$ group introduced [9] on the basis of the definite ternary and quaternary relations of incidence, is extended. This study demonstrates that the „axiom of the 9 incidences" holds in the $\mathcal{S}(G.S)$ structure of incidence.

NUMERICAL COMPUTATION OF THE α-CONVEX KOEBE FUNCTION

P. T. MOCANU, GR. MOLDOVAN and M. O. READE

1. Introduction. Let

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

be regular in the unit disc $D: |z| < 1$, with $[f(z)\,f'(z)]/z \neq 0$. and let

$$J(\alpha, f(z)) \equiv (1 - \alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$$

where α is a fixed real number.

The function f is said to be *α-convex*, if the inequality

$$Re\, J(\alpha, f(z)) > 0 \tag{2}$$

holds for all $z \in D$, [3], [4].

Let $\Phi = \arg f(z)$ and $\psi = \arg zf'(z)$. If C_r is the image of the circle $|z| = r$, $0 < r < 1$ under the mapping $w = f(z)$, where $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, then $\Phi = \Phi(\theta)$ is the argument of the position vector of $f(z)$ and $\psi = \psi(\theta)$ is the argument of the outer normal vector to C_r at $f(z)$. Geometrically, the relation (2) states that the angle

$$\chi = (1 - \alpha)\Phi + \alpha\psi \tag{3}$$

is an increasing function of θ for each fixed r. The concept of α-convexity can be looked upon as a „continuous passage" from starlikeness to convexity, to stronger forms of convexity [2], [3], as α increases from zero to infinity.

The function (1) is α-convex for $\alpha > 0$ if and only if there exists a starlike function $F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots$ such that

$$f(z) = \left(\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{F(\zeta)^{\frac{1}{\alpha}}}{\zeta}\, d\zeta\right)^{\alpha} \tag{4}$$

where the powers appearing in the formula are meant as principal values [2], [3].

If in formula (4) we take $F(z)$ to be the Koebe function $z/(1+e^{i\lambda}z)^2$, then we obtain what we define to be the *α-convex Koebe function.*

$$f_\lambda(z,\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+e^{i\lambda})^{-\frac{2}{\alpha}}d\zeta\right)^\alpha$$

These functions serve as extremal functions for many extremal problems within the class of α-convex functions (see, for example, the distortion properties obtained by S. S. Miller [1]).

It is easy to check that for $|z|=1$ we have

$$Re\, J(\alpha, f_\lambda(z,\alpha))=0,$$

i.e.

$$\frac{\partial\chi}{\partial\theta}=0 \text{ for } r=1.$$

This means that the image C_1 of the circle $|z|=1$ under the mapping $w=f_\lambda(z,\alpha)$ has the following *generalized optical property*: the argument χ given by (3) of the vector with the origin at w and which divides the angle between the position vector and the outer normal in the ratio α, is constant. For $\alpha=2$ this is the well-known optical property of the parabola.

The aim of the present paper is to obtain the image of the unit circle under the α-convex Koebe function $f_0(z,\alpha)$ for several values of α.

2. Formulas to be used in the computations. Let

$$f(e^{i\theta})=u(\theta)+iv(\theta)$$

where

$$f(z)=f_0(z,\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^z \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+\zeta)^{-\frac{2}{\alpha}}d\zeta\right)^\alpha, \quad \alpha>0$$

In order to calculate $u(\theta)$ and $v(\theta)$ we remark that

$$f(e^{i\theta})=(A+iB)^\alpha$$

where

$$A=\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+x)^{-\frac{2}{\alpha}}dx=\frac{1}{2\alpha}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \tag{5}$$

$$B=B(\theta)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\theta\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-\frac{2}{\alpha}}d\varphi=\frac{1}{\alpha 2^{\frac{2}{\alpha}-1}}\int_0^{\frac{\theta}{2}}\frac{dt}{\cos^{\frac{2}{\alpha}}t} \tag{6}$$

Hence

$$u(\theta) = (A^2 + B^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos \alpha\omega \tag{7}$$

$$v(\theta) = (A^2 + B^2)^{\frac{\alpha}{2}} \sin \alpha\omega \tag{8}$$

where A and B are given by (5) and (6) and ω is given by

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{B}{A} \tag{9}$$

Because of the symmetry, it is sufficient to calculate the values of $u(\theta)$ and $v(\theta)$ in the interval $[0, \pi]$ only. We remark that

$$u(0) = A^\alpha, \quad \alpha > 0$$

which is the Koebe constant of α-convex functions [1]. Since $B(\pi) = +\infty$ for $0 < \alpha \leqslant 2$, from (7) and (8) we obtain $u(\pi-0) = +\infty$, for $0 < \alpha < 1$ and $u(\pi - 0) = -\infty$, for $1 < \alpha \leqslant 2$; $v(\pi - 0) = +\infty$, for $0 < \alpha \leqslant 2$. For $\alpha > 2$ we have

$$B(\pi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha 2^{\frac{2}{\alpha}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

and

$$u(\pi) = -\left(\frac{A}{\cos \frac{\pi}{\alpha}}\right)^\alpha, \quad v(\pi) = 0.$$

3. An Algorithm. In order to calculate the values of $u(\theta)$ and $v(\theta)$ given by (7) and (8), for $\alpha = \frac{1}{8}$ and $\alpha = \frac{k}{4}$, where $k = \overline{1,20}$, we use the following values of $\theta : \theta = \overline{0, 1.9}\ (0.1)$, for $\alpha \leqslant 2$ and $\theta = \overline{0,3}\ (0.1)$; $\theta = \pi$ for $\alpha > 2$.

The values of A given by (5) are obtained using the incomplete GAMMA FUNCTION (Y). In order to calculate $B(\theta)$ given by (6) the Simpson quadrature formula was used.

The algorithm was written in FØRTRAN for the computer FELIX C—256, as follows:

```
   F(X) = FLØAT(1)/(COS(X))**(2./ALPHA)
   ALPHA=0.125
   DØ 2 K=1.20
   A=1./(2.*ALPHA)*GAMMA(1./ALPHA)*GAMMA(1./ALPHA)/GAMMA(2./ALPHA)
   IF(ALPHA-2.)3.3.4
 3 M=20
   GØ TØ 5
 4 M=31
 5 DØ 6 I=1.M
   TETA=(FLØAT(I)-1.)*0.1
   C=0.
   B=TETA/2.
   N=100
15 L=0
12 N=N+2
   H=(B-C)/FLØAT(N)
   J=1
   S1=0.
   S2=0.
 9 S1=S1+F (C+FLØAT(2*J-1*H)
   S2=S2+F (C+FLØAT(2*.J)*H)
   IF (J-N/2)7,8,8
 7 J=J+1
   GØ TØ 9
 8 S=H/3.*(F (C)+4.*S1+2.*S2-F(B))
   IF (L)10,11,10
11 SA=S
   L=1
   GØ TØ 12
10 SB=S
   IF (ABS(SB-SA)-O.1E-2)13,13,14
14 GØ TØ 15
13 S=SB
   B=1./(ALPHA*(FLØAT(2)**(2./ALPHA-1.)))*S
   PSI=ATAN(B/A)
   DIMENSIØN U(35),V(35),THETA(35)
   U(I)=SQRT(A*A+B*B)**ALPHA*CØS(ALPHA*PSI)
   V(I)=SQRT(A*A+B*B)**ALPHA*SIN(ALPHA*PSI)
   THETA(I)=TETA
 6 CØNTINUE
   WRITE(108,16)ALPHA
16 FØRMAT(/,46X,1H=,F6.3)
   WRITE(108,17)
17 FØRMAT(25X,35(1H*))
   WRITE(108,19)
19 FØRMAT(25X,35H*   I *   *   U( )   *   V( )   *)
   WRITE(108,17)
   DØ 20 I=1,M
20 WRITE(108,21)I,THETA(I),U(I),V(I)
21 FØRMAT(25X,2H* ,I2,3H * ,F4.2,3H * ,2(F8.5,3H * ))
   IF(ALPHA-2.)22, 22, 23
23 I=32
   TTHETA=3.14
   UU=-(A/CØS(3.14/ALPHA))**ALPHA
   VV=0.
   WRITE(108.21)I,TTHETA,UU,VV
```

```
22 WRITE(108,17)
   ALPHA=FLØAT(K)/4.
 2 CØNTINUE
   STØP
   END
   FUNCTIØN GAMMA(Y)
   H=1
45 IF (Y)30,30,31
30 GØ TØ 40
31 IF (Y-2.)32,33,34
33 GØ TØ 50
32 H=H/Y
   Y=Y+1.
   GØ TØ 45
34 IF(Y-3.)35,35,36
36 Y=Y-1.
   H=H*Y
   GØ TØ 45
35 Y=Y-2.
   H=(((((((0.0016063118*Y+0.0051589951)*Y+0.0044511400)*Y+0.072110156
S7)*Y+0.0821117404)*Y+0.4117741955)*Y+0.4227874605)*Y+0.9999999758)
S*H
50 GAMMA=H
   GØ TØ 70
40 WRITE(108,60)
60 FØRMAT(25X,6HERØARE)
70 RETURN
   END
```

4. Numerical tables and grafical illustration.

		α = .125		α = .250		α = .500	
I		$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$
1	.00	.30641	.00000	.34572	.00000	.40825	.00000
2	.10	.30682	.00602	.34611	.00946	.40854	.01532
3	.20	.30808	.01203	.34728	.01896	.40940	.03074
4	.30	.31021	.01804	.34927	.02854	.41087	.04633
5	.40	.31927	.02403	.35211	.03825	.41296	.06220
6	.50	.31736	.03002	.35589	.04814	.41572	.07845
7	.60	.32259	.03598	.36067	.05825	.41920	.09518
8	.70	.32914	.04192	.36660	.06864	.42347	.11253
9	.80	.33721	.04783	.37382	.07937	.42864	.13064
10	.90	.34709	.05373	.38255	.09054	.43482	.14967
11	1.00	.35914	.05963	.39303	.10222	.44216	.16981
12	1.10	.37383	.06558	.40559	.11454	.45084	.19129
13	1.20	.39175	.07168	.42068	.12763	.46112	.21439
14	1.30	.41364	.07805	.43882	.14170	.47329	.23945
15	1.40	.44043	.08489	.46075	.15698	.48776	.26691
16	1.50	.47329	.09251	.48739	.17380	.50502	.29729
17	1.60	.51376	.10127	.51998	.19263	.52577	.33130
18	1.70	.56381	.11167	.56020	.21409	.55088	.36987
19	1.80	.62616	.12432	.61031	.23906	.58158	.41421
20	1.90	.70464	.14006	.67345	.26881	.61956	.46603

		α = .750		α = 1.000		α = 1.250	
I		$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$
1	.00	.45828	.00000	.50000	.00000	.53554	.00000
2	.10	.45843	.02045	.50000	.02502	.53538	.02914
3	.20	.45889	.04101	.50000	.05017	.53491	.05840
4	.30	.45967	.06180	.50000	.07557	.53410	.08792
5	.40	.46077	.08294	.50000	.10136	.53296	.11783
6	.50	.46221	.10457	.50000	.12767	.53147	.14828
7	.60	.46403	.12682	.50000	.15467	.52960	.17941
8	.70	.46626	.14985	.50000	.18251	.52734	.21139
9	.80	.46893	.17384	.50000	.21140	.52463	.24440
10	.90	.47211	.19899	.50000	.24153	.52145	.27866
11	1.00	.47586	.22553	.50000	.27315	.51773	.31439
12	1.10	.48027	.25374	.50000	.30655	.51341	.35187
13	1.20	.48543	.28396	.50000	.34207	.50841	.39141
14	1.30	.49149	.31657	.50000	.38010	.50263	.43338
15	1.40	.49861	.35208	.50000	.42114	.49595	.47823
16	1.50	.50702	.39111	.50000	.46580	.48820	.52651
17	1.60	.51698	.43443	.50000	.51482	.47919	.57889
18	1.70	.52889	.48306	.50000	.56916	.46867	.63620
19	1.80	.54321	.53833	.50000	.63008	.45630	.69952
20	1.90	.56064	.60201	.50000	.69919	.44164	.77023

		α = 1.500		α = 1.750		α = 2.000	
I		$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$
1	.00	.56627	.00000	.59314	.00000	.61685	.00000
2	.10	.56596	.03285	.59267	.03622	.61622	.03929
3	.20	.56500	.06583	.59124	.07256	.61434	.07867
4	.30	.56339	.09905	.58884	.10912	.61118	.11825
5	.40	.56111	.13264	.58545	.14602	.60671	.15814
6	.50	.55813	.16675	.58103	.18339	.60089	.19843
7	.60	.55442	.20151	.57551	.22135	.59365	.23924
8	.70	.54991	.23707	.56884	.26004	.58492	.28068
9	.80	.54456	.27362	.56094	.29962	.57460	.32289
10	.90	.53828	.31133	.55170	.34025	.56256	.36600
11	1.00	.53098	.35042	.54100	.38211	.54867	.41017
12	1.10	.52254	.39113	.52869	.42541	.53274	.45555
13	1.20	.51282	.43374	.51458	.47039	.51457	.50236
14	1.30	.50165	.47858	.49845	.51732	.49390	.55079
15	1.40	.48882	.52604	.48002	.56651	.47041	.60111
16	1.50	.47406	.57658	.45896	.61835	.44372	.65358
17	1.60	.45703	.63075	.43485	.67328	.41337	.70857
18	1.70	.43731	.68927	.40716	.73186	.37876	.76646
19	1.80	.41436	.75299	.37521	.79473	.33916	.82775
20	1.90	.38748	.82302	.33815	.86276	.29363	.89303

I		$\alpha = 2.250$ $U(\theta)$	$V(\theta)$	$\alpha = 2.500$ $U(\theta)$	$V(\theta)$	$\alpha = 2.750$ $U(\theta)$	$V(\theta)$
1	.00	.63794	.00000	.65681	.00000	.67382	.00000
2	.10	.63716	.04208	.65590	.04464	.67277	.04699
3	.20	.63484	.08425	.65317	.08935	.66964	.09403
4	.30	.63095	.12658	.64857	.13419	.66438	.14116
5	.40	.62545	.16916	.64210	.17922	.65697	.18843
6	.50	.61830	.21208	.63367	.22451	.64735	.23588
7	.60	.60942	.25543	.62323	.27015	.63644	.28357
8	.70	.59872	.29930	.61069	.31618	.62114	.33154
9	.80	.58611	.34381	.59592	.36270	.60435	.37984
10	.90	.57144	.38905	.57879	.40978	.58492	.42851
11	1.00	.55457	.43515	.55914	.45751	.56268	.47763
12	1.10	.53529	.48228	.53675	.50598	.53742	.52723
13	1.20	.51338	.53045	.51141	.55528	.50892	.57737
14	1.30	.48856	.57995	.48281	.60553	.47688	.62812
15	1.40	.46050	.63093	.45062	.65684	.44096	.67952
16	1.50	.42880	.68358	.41443	.70934	.40074	.73164
17	1.60	.39294	.73814	.37373	.76317	.35575	.78453
18	1.70	.35234	.79489	.32790	.81849	.30537	.83826
19	1.80	.30622	.85415	.27620	.87549	.24888	.89289
20	1.90	.25362	.91631	.21768	.93436	.18537	.94846
21	2.00	.19332	.98183	.15115	.99535	.11371	1.00503
22	2.10	.12372	1.05129	.07505	1.05873	.03243	1.06262
23	2,20	.04269	1.12541	-.01263	1.12482	-.06034	1.12123
24	2,30	-.05269	1.20512	-.11464	1.19398	-.16712	1.18082
25	2.40	-.16652	1.29165	-.23476	1.26667	-.29135	1.24124
26	2.50	-.30485	1.38667	-.37849	1.34342	-.43791	1.30219
27	2.60	-.47702	1.49258	-.55415	1.42484	-.61410	1.36307
28	2.70	-.69849	1.61297	-.77521	1.51164	-.83151	1.42265
29	2.80	-.99754	1.75375	-1.06565	1.60444	-1.11016	1.47826
30	2.90	-1.43404	1.92568	-1.47448	1.70318	-1.48994	1.52350
31	3.00	-2.17267	2.15293	-2.13035	1.80326	-2.07114	1.53871
32	3.14		.00000		.00000	-7.51967	.00000

I		$\alpha = 3.000$ $U(\theta)$	$V(\theta)$	$\alpha = 3.250$ $U(\theta)$	$V(\theta)$	$\alpha = 3.500$ $U(\theta)$	$V(\theta)$
1	.00	.68922	.00000	.70322	.00000	.71601	.00000
2	.10	.68805	.04916	.70193	.05116	.71461	.05301
3	.20	.68453	.09834	.69806	.10232	.71040	.10600
4	.30	.67865	.14758	.69158	.15350	.70335	.15897
5	.40	.67035	.19689	.68244	.20469	.69343	.21189
6	.50	.65959	.24631	.67061	.25591	.68058	.26476
7	.60	.64629	.29586	.65599	.30715	.66473	.31754
8	.70	.63035	.34556	.63851	.35841	.64587	.37023
9	.80	.61166	.39544	.61804	.40970	.62364	.42278
10	.90	.59008	.44552	.59444	.46101	.59816	.47518
11	1.00	.56543	.49582	.56756	.51232	.56919	.52737
12	1.10	.53752	.54635	.53719	.56363	.53654	.57932
13	1.20	.50611	.59714	.50310	.61491	.49999	.63095
14	1.30	.47092	.64819	.46503	.66612	.45928	.68221
15	1.40	.43162	.69950	.42266	.71722	.41411	.73301

(continuarea tabelului)

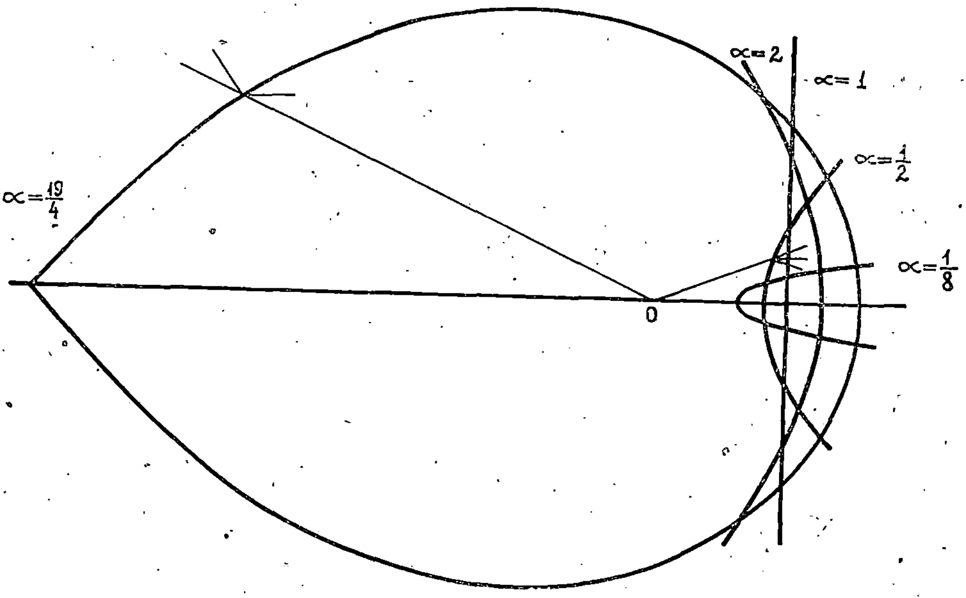
I		$\alpha = 3.000$ $U(\theta)$	$V(\theta)$	$\alpha = 3.250$ $U(\theta)$	$V(\theta)$	$\alpha = 3.500$ $U(\theta)$	$V(\theta)$
16	1.50	.38780	.75108	.37559	.76816	.36412	.78323
17	1.60	.33899	.80292	.32339	.81885	.30888	.83275
18	1.70	.28463	.85497	.26552	.86920	.24790	.88140
19	1.80	.22400	.90720	.20131	.91907	.18058	.92897
20	1.90	.15627	.95954	.12998	.96828	.10617	.97519
21	2.00	.08036	1.01187	.05055	1.01659	.02380	1.01972
22	2.10	-.00507	1.06403	-.03821	1.06369	-.06765	1.06212
23	2.20	-.10173	1.11576	-.13786	1.10912	-.16958	1.10180
24	2.30	-.21192	1.16670	-.25044	1.15227	-.28379	1.13796
25	2.40	-.33869	1.21627	-.37866	1.19227	-.41266	1.16949
26	2.50	-.48627	1.26359	-.52628	1.22780	-.55946	1.19481
27	2.60	-.66126	1.30721	-.69874	1.25687	-.72884	1.21153
28	2,70	-.87321	1.34464	-.90438	1.27617	-.92782	1.21589
29	2.80	-1.13893	1.37121	-1.15707	1.27986	-1.16793	1.20140
30	2.90	-1.49073	1.37693	-1.48299	1.25608	-1.47044	1.15540
31	3.00	-2.00707	1.33480	-1.94390	1.17479	-1.88421	1.04713
32	3.14	-5.49854	.00000	-4.40855	.00000	-3.73380	.00000

I		$\alpha = 3.750$ $U(\theta)$	$V(\theta)$	$\alpha = 4.000$ $U(\theta)$	$V(\theta)$	$\alpha = 4.250$ $U(\theta)$	$V(\theta)$
1	.00	.72775	.00000	.73857	.00000	.74855	.00000
2	.10	.72624	.05473	.73695	.05633	.74684	.05782
3	.20	.72171	.10942	.73211	.11260	.74170	.11556
4	.30	.71412	.16405	.72401	.16877	.73313	.17316
5	.40	.70345	.21857	.71264	.22477	.72108	.23055
6	.50	.68964	.27295	.69792	.28056	.70550	.28763
7	.60	.67262	.32715	.67980	.33606	.68634	.34433
8	.70	.65231	.38113	.65820	.39121	.66352	.40056
9	.80	.62860	.43482	.63301	.44594	.63695	.45622
10	.90	.60136	.48818	.60412	.50016	.60651	.51121
11	.100	.57045	.54114	.57139	.55378	.57208	.56541
12	1.10	.53567	.59361	.53465	.60669	.53350	.61870
13	1.20	.49684	.64551	.49370	.65878	.49060	.67091
14	1.30	.45371	.69674	.44833	.70991	.44317	.72189
15	1.40	.40598	.74716	.39827	.75991	.39096	.77144
16	1.50	.35334	.79663	.34321	.80860	.33371	.81934
17	1.60	.29538	.84496	.28281	.85576	.27108	.86533
18	1.70	.23165	.89194	.21662	.90110	.20270	.90910
19	1.80	.16159	.93728	.14416	.94432	.12812	.94029
20	1.90	.08454	.98066	.06483	.98501	.04681	.98844
21	2.00	-.00030	1.02165	-.02209	1.02268	-.04187	1.02302
22	2.10	-.09393	1.05971	-.11748	1.05673	-.13869	1.05335
23	2.20	-.19758	1.09413	-.22244	1.08636	-.24461	1.07860
24	2.30	-.31285	1.12400	-.33834	1.11054	-.36083	1.09766
25	2.40	-.44181	1.14803	-.46700	1.12792	-.48888	1.10909
26	2.50	-.58728	1.16446	-.61081	1.13657	-.63085	1.11094

(continuarea tabelului)

		$\alpha = 3.750$		$\alpha = 4.000$		$\alpha = 4.250$	
I		$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$
27	2.60	-.75322	1.17067	-.77314	1.13379	-.78954	1.10040
28	2.70	-.94554	1.16264	-.95897	1.11540	-.96914	1.07330
29	2.80	-1.17378	1.13358	-1.17618	1.07457	-1.17617	1.02289
30	2.90	-1.45529	1.07065	-1.43895	.99865	-1.42223	.93693
31	3.00	-1.82898	.94374	-1.77847	.85883	-1.73247	.78822
32	3.14	-3.27756	.00000	-2.94954	.00000	-2.70288	.00000

		$\alpha = 4.500$		$\alpha = 4.750$	
I		$U(\theta)$	$V(\theta)$	$U(\theta)$	$V(\theta)$
1	.00	.75780	.00000	.76639	.00000
2	.10	.75600	.05921	.76450	.06052
3	.20	.75059	.11834	.75883	.12093
4	.30	.74156	.17727	.74937	.18112
5	.40	.72887	.23594	.73607	.24098
6	.50	.71248	.29422	.71892	.30039
7	.60	.69234	.35203	.69784	.35922
8	.70	.66837	.40926	.67279	.41736
9	.80	.64049	.46577	.64368	.47466
10	.90	.60860	.52146	.61042	.53097
11	1.00	.57258	.57617	.57291	.58613
12	1.10	.53229	.62976	.53101	.63997
13	1.20	.48756	.68204	.48459	.69229
14	1.30	.43822	.73284	.43348	.74287
15	1.40	.38404	.78192	.37748	.79147
16	1.50	.32478	.82903	.31638	.83780
17	1.60	.26014	.87388	.24991	.88155
18	1.70	.18979	.91614	.17778	.92234
19	1.80	.11333	.95538	.09964	.95975
20	1.90	.03029	.99114	.01510	.99326
21	2.00	-.05989	1.02284	-.07635	1.02225
22	2.10	-.15787	1.04975	-.17527	1.04599
23	2.20	-.26448	1.07098	-.28238	1.06354
24	2.30	-.38077	1.08540	-.99854	1.07375
25	2.40	-.50804	1.09153	-.52488	1.07511
26	2.50	-.64803	1.08736	-.66287	1.06562
27	2.60	-.80314	1.07010	-.81449	1.04252
28	2.70	-.97684	1.03563	-.98262	1.00176
29	2.80	-1.17451	.97736	-1.17172	.93700
30	2.90	-1.40567	.88358	-1.38956	.83711
31	3.00	-1.69069	.72883	-1.65273	.67835
32	3.14	-2.51090	.00000	-2.35737	.00000



REFERENCES

1. Miller, S. S., *Distortion properties of alpha-starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
2. Miller, S. S., Mocanu, P. T. and Reade, M. O., *Bazilevič functions and generalized convexity*, Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl. (to appear).
3. Mocanu, P. T., *Une propriété de convexité généralisée dans la représentation conforme*, Mathematica (Cluj), **11** (34), 1 (1969), 127—133.
4. Mocanu, P. T. and Reade, M. O., *On generalized convexity in conformal mappings*, Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl., **16** (1971), 1541—1544.

CALCULUL NUMERIC AL FUNCȚIEI α-CONVEXE A LUI KOEBE

(Rezumat)

În această lucrare se calculează valorile funcției α-convexe a lui Koebe pentru mai multe valori ale parametrului pozitiv α. Calculele au fost efectuate la calculatorul FELIX C—256.

ВЫЧИСЛЕНИЕ α-ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ КЁБЕ

(Резюме)

В работе вычисляются значения α-выпуклой функции Кёбе для нескольких значений положительного параметра α. Расчеты произведены при помощи электронной вычислительной машины FELIX C—256.

ASUPRA TEOREMEI GRAFICULUI ÎNCHIS ȘI A TEOREMEI MĂRGINIRII UNIFORME

DAMIAN TRIF

J. D. Stein [1], [2] a demonstrat teorema graficului închis și teorema mărginirii uniforme pentru aplicații afine între spații metrice geodezic convexe. Vom introduce o clasă mai generală de aplicații pentru care, în cazul spațiilor normate, teoremele menționate rămîn valabile.

Fie X și Y spații normate și $A : X \to Y$.

Definiția 1. Aplicația A se numește *local uniform continuă pe drepte* dacă pentru orice $x \in X$, $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ există o funcție φ definită pe un interval $(-t_0, t_0)$, unde $0 < t_0 < 1$ și $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$, așa încît pentru orice $t \in (-t_0, t_0)$ și pentru orice $y, z \in X$, verificînd $||x - y|| < \delta$, $||x - z|| < \delta$, $||Ax - Ay|| < \varepsilon$ și $||Ax - Az|| < \varepsilon$, avem

$$||Ay - A((1-t)y + tz)|| \leqslant \varphi(t).$$

Se constată ușor că aplicațiile liniare, aplicațiile afine, aplicațiile uniform continue sînt local uniform continue pe drepte. Dacă X are dimensiune infinită, atunci există aplicații continue care nu sînt local uniform continue pe drepte; de exemplu aplicația $A : l^2 \to R$ definită prin $A\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \left\|(x_j^j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{l^2}$. Dacă însă X are dimensiune finită, atunci orice aplicație continuă este local uniform continuă pe drepte.

Teorema 1. *Fie X un spațiu normat de categoria a doua, Y un spațiu Banach și $A : X \to Y$ o aplicație local uniform continuă pe drepte. Dacă A are graficul închis, atunci A este continuă.*

Definiția 2. Familia $\mathcal{F}$ de aplicații din X în Y se numește *egal local uniform continuă pe drepte* dacă pentru orice $x \in X$, $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ există o funcție φ, definită pe un interval $(-t_0, t_0)$, unde $0 < t_0 < 1$ și $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$, așa încît pentru orice $t \in (-t_0, t_0)$ și pentru orice $y, z \in X$, verificînd $||x - y|| < \delta$, $||x - z|| < \delta$, $||Ax - Ay|| < \varepsilon$ și $||Ax - Az|| < \varepsilon$ oricare ar fi $A \in \mathcal{F}$, avem

$$||Ay - A((1-t)y + tz)|| \leqslant \varphi(t),$$

oricare ar fi $A \in \mathcal{F}$.

Se constată uşor că orice familie de aplicaţii liniare sau afine este egal local uniform continuă pe drepte.

TEOREMA 2. *Fie X un spaţiu normat de categoria a doua, Y un spaţiu normat şi $\mathcal{F}$ o familie de aplicaţii continue din X în Y, egal local uniform continuă pe drepte. Dacă pentru orice x şi y din X există $M > 0$, aşa încît $\sup \{||Ax - Ay|| \, | A \in \mathcal{F}\} \leqslant M$, atunci $\mathcal{F}$ este egal continuă.*

Vom demonstra teoremele 1 şi 2 cu ajutorul următoarei leme:

LEMĂ. *Fie X un spaţiu normat de categoria a doua şi f o semimetrică pe X.* Dacă

a) pentru orice $x \in X$, $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$ există o funcţie φ definită pe un interval $(-t_0, t_0)$, unde $0 < t_0 < 1$ şi $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$, aşa încît pentru orice $t \in (-t_0, t_0)$ şi pentru orice $y, z \in X$, verificînd $||x - y|| < \delta$, $||x - z|| < \delta$, $f(x, y) < \varepsilon$ şi $f(x, z) < \varepsilon$, avem $f(y, (1-t)y + tz) \leqslant \leqslant \varphi(t)$.

b) pentru orice $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ şi pentru orice şir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ din X, aşa încît $||x_n - x|| < \delta$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = y$, $||x - y|| < \delta$, $f(x, x_n) < \varepsilon$ pentru orice n şi $\lim\limits_{n, m \to \infty} f(x_n, x_m) = 0$, avem $f(x, y) \leqslant \varepsilon$, atunci pentru orice $x \in X$ fixat, funcţionala $f(x, y)$ este continuă în raport cu y în $y = x$.

Demonstraţie. Notăm, pentru orice $x \in X$ şi $r > 0$.

$$S(x, r) = \{y \in X | \, ||x - y|| < r\}, \quad f_x^{-1}(r) = \{y \in X | f(x, y) < r\}.$$

Fie $x \in X$ fixat şi $\varepsilon > 0$.

1. Din condiţia a), (în care ε şi δ se aleg în mod convenabil), rezultă că

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x + n(f_x^{-1}(\varepsilon) - x)\}.$$

Deoarece X este de categoria a doua, există $w \in X$ şi $\delta > 0$, încît

$$S(w, \delta) \subseteq \overline{f_x^{-1}(\varepsilon)}.$$

Tot din condiţia a), există $t_1 \in (-t_0, 0]$ aşa încît $x_0 = (1 - t_1)x + + t_1 w \in f_x^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ şi $\varphi(-t_1/(1 - t_1)) < \frac{\varepsilon}{2}$; de aici $x = (1 - t_2)x_0 + t_2 w$, unde $t_2 = -t_1/(1 - t_1) \in [0, t_0)$. Rezultă că

$$\{u = (1 - t_2)x_0 + t_2 v \mid v \in S(w, \delta)\} \subseteq \overline{f_x^{-1}(\varepsilon)}$$

şi prin urmare, există $\delta_0 > 0$ aşa încît

$$S(x, \delta_0) \subseteq \overline{f_x^{-1}(\varepsilon)}.$$

2. Considerăm funcţia φ_0 definită pe $(-t_0, t_0)$, corespunzătoare lui x, ε şi δ_0 şi fie $\delta_0' = \delta_0 t_0/(2 - t_0) < \delta_0$. Fie $v \in S(x, \delta_0/2) \cap f_x^{-1}(\varepsilon)$ şi

$y \in S(v, \delta_0'/2)$. Există $z \in S(v, \delta_0/2)$ aşa încît $y = (1 - t)v + tz$, unde $t = 2\|v - y\| \Big/ \left(\frac{\delta_0}{2} + \|v - y\|\right) < t_0$. Dar $z = \lim\limits_{n \to \infty} z_n$, unde $z_n \in f_x^{-1}(\varepsilon)$ şi fie $y_n = (1 - t)v + tz_n$. Avem $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ şi $f(v, y_n) \leqslant \varphi_0(t)$, deci pentru orice v şi y ca mai sus şi pentru orice $\eta > 0$, există $u \in S(v, \delta_0'/2)$ aşa încît

$$\|u - y\| < \eta \text{ şi } f(v, u) \leqslant \varphi_0\left(\frac{2\|v - y\|}{\delta_0/2 + \|v - y\|}\right) = \varphi_1(\|v - y\|).$$

3. Fie $\delta_n \in (0, 1)$, aşa încît pentru $|t| < \delta_n$ să avem $\varphi_1(t) < \varepsilon/2^n$. Fie $\delta' = \min(\delta_0'/4, \delta_2)$ şi $\eta_n = \min(\delta_0'/2^n, \delta_{n+1})$.

Fie $y \in S(x, \delta')$ arbitrar. Luăm $v = x \in S(x, \delta_0/2) \cap f_x^{-1}(\varepsilon)$. Din partea a doua a demonstraţiei rezultă existenţa unui $x_1 \in S(x, \delta_0'/2)$, aşa încît

$$\|x_1 - y\| < \eta_1 \text{ şi } f(x, x_1) \leqslant \varphi_1(\|x - y\|).$$

Luăm $v = x_1 \in S(x, \delta_0/2) \cap f_x^{-1}(\varepsilon)$. La fel, punem în evidenţă $x_2 \in \in S(x_1, \delta_0'/2)$, aşa încît

$$\|x_2 - y\| < \eta_2 \text{ şi } f(x_1, x_2) \leqslant \varphi_1(\|x_1 - y\|).$$

Luăm $v = x_2$ şi continuăm, punînd astfel în evidenţă un şir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, care îndeplineşte cerinţele condiţiei b). În concluzie, pentru orice $y \in S(x, \delta')$ avem $f(x, y) \leqslant \varepsilon$ şi lema este demonstrată.

Demonstraţia teoremei 1. Considerăm semimetrica f pe X, definită prin $f(x, y) = \|Ax - Ay\|$, pentru orice $x, y \in X$. Se constată imediat că f verifică condiţia a) din lemă. Fie $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ şi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ un şir din $S(x, \delta)$, ca în condiţia b) din lemă. Rezultă deci că $(A(x_n))_{n=1}^{\infty}$ este fundamental în Y, deci este convergent; fie A_0 limita lui. Deoarece A are graficul închis, $A_0 = A(y)$. Deci

$$\|Ay - Ax\| = \|\lim_{n \to \infty} Ax_n - Ax\| = \lim_{n \to \infty} \|Ax_n - Ax\| \leqslant \varepsilon,$$

adică f verifică şi condiţia b) din lemă. În concluzie, A este continuu în orice $x \in X$.

Demonstraţia teoremei 2. Considerăm semimetrica f pe X, definită prin $f(x, y) = \sup\{\|Ax - Ay\| \mid A \in \mathcal{F}\}$, pentru orice $x, y \in X$. Se constată imediat că f îndeplineşte condiţiile a) şi b) din lemă, deci $\mathcal{F}$ este egal continuă în orice $x \in X$.

Observaţie. Dacă X este un spaţiu Banach de dimensiune finită şi A un operator monoton [3] din X în X, continuu pe drepte, atunci A este continuu.

Într-adevăr, A este în aceste condiţii maximal monoton, deci are graficul închis; pe de altă parte, A transformă mulţimile mărginite în mulţimi mărginite. Se obţine uşor de aici că familia de aplicaţii $\{Ay - A((1-t)y + tz) \mid y, z \in S(x, \delta), Ay, Az \in S(Ax, \varepsilon)\}$ din $(-1, 1)$ în X este egal continuă în 0, oricare ar fi $x \in X$, $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$, deci A este local uniform continuu pe drepte. În acest mod, teorema 1 conţine rezultatul cunoscut enunţat mai sus.

(Intrat în redacţie la 1 mai 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Stein, J. D., *Two uniform boundedness theorems*, Pacif. J. Math., **38**, 1, 1971, 251–260.
2. Stein, J. D., *The open mapping theorem for spaces with unique segments*, Pacif. J. Math., **40**, 2, 1972, 459–462.
3. Marinescu, G., *Tratat de analiză funcţională*, II, Ed. Acad. R.S.R., 1972.

О ТЕОРЕМЕ ЗАМКНУТОГО ГРАФИКА И О ТЕОРЕМЕ РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ

(Резюме)

Работа содержит теорему замкнутого графика и теорему равномерной ограниченности для локально-равномерно непрерывных отображений на прямых в нормированных пространствах.

ON THE CLOSED GRAPH AND UNIFORM BOUNDEDNESS THEOREMS

(Summary)

The paper deals with the closed graph and the uniform boundedness theorem for local. uniform continuous maps on lines in normed spaces.

CONVOLUŢII DISCRETE RELATIVE LA FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE ŞI OPERATORI LINIARI POZITIVI

GRIGOR MOLDOVAN

În această lucrare extindem, pentru funcţii de mai multe variabile, unele rezultate ale noastre conţinute în lucrările [5], [6]. În prima parte ne vom ocupa de convoluţii multidimensionale, iar în partea a doua vom indica un procedeu de a construi operatori liniari pozitivi pornind de la aceste convoluţii.

§ 1. *Convoluţii discrete în R^m.* Pentru uşurarea scrierii anumitor relaţii, în cele ce urmează adesea vom folosi operaţiile obişnuite în $\mathbf{R}^m$ de adunare, înmulţire şi înmulţire cu un scalar, adică, dacă $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ atunci

$$x + y = (x_1 + y_1, \ \ldots, \ x_m + y_m), \qquad x \, . \, y = (x_1 y_1, \ \ldots, \ x_m y_m)$$

şi

$$ax = (ax_1, \ \ldots, \ ax_m), \ a \in R;$$

precum şi notaţiile:

$$n! = n_1! \ldots n_m! \text{ dacă } n = (n_1, \ldots, n_m), \ n_i \in N, \ i = 1,2, \ldots, m;$$

$$\binom{u}{n} = \binom{u_1}{n_1} \cdots \binom{u_m}{n_m}, \ u = (u_1, \ \ldots, \ u_m);$$

$$\binom{u}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{u(u-1) \ldots \left(u - \sum_{i=1}^{m} k_i + 1\right)}{k_1! \ldots k_m!}, \quad u \in R;$$

$$\frac{u^k}{k!} = \frac{u_1^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{u_m^{k_m}}{k_m!}, \quad k = (k_1, \ \ldots, \ k_m), \ u = (u_1, \ \ldots, \ u_m)$$

$$\sum_{k=0}^{n} = \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=0}^{n_m}; \ \sum_{\bar{k} \leqslant n} = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \cdots \sum_{k_m=0}^{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}$$

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^{m} k_i, \quad k = (k_1, \ \ldots, \ k_m).$$

Notăm cu P_n, $n=(n_1, \ldots, n_m)$ un polinom în m variabile de grad efectiv n_i în raport cu a i-a variabilă, $i = 1, \ldots, m$, iar cu $P_{\bar{n}}$ un polinom în m variabile de grad efectiv $\bar{n}$ în raport cu fiecare dintre variabile. Cu $\mathfrak{P}^m(E)$ notăm mulţimea tuturor şirurilor de polinoame în m variabile $P = (P_n)_{n\in N^m}$, $P_n : E \to \mathbf{R}$, $E \subseteq \mathbf{R}^m$.

Fie $\mathfrak{F}(A)$ mulţimea funcţiilor reale definite pe A.

DEFINIŢIA 1. Relaţiile

$$Q_n(u, v) = \sum_{k=0}^{n} P_k^{(1)}(u)\, P_{n-k}^{(2)}(v), \quad k,\ n \in N^m \tag{1.1}$$

$$u,\ v \in E;\ P^{(1)},\ P^{(2)} \in \mathfrak{P}^m(E),\quad E \subseteq \mathbf{R}^m$$

$$Q_n(u, v) = \sum_{\bar{k}\leqslant n} P_k^{(1)}(u)\, P_{n-\bar{k}}^{(2)}(v), \quad n \in N,\ k \in N^m; \tag{1.2}$$

$$u \in E,\ v \in G;\ P^{(1)} \in \mathfrak{P}^m(E),\ P^{(2)} \in \mathfrak{P}(G);\ E \subseteq \mathbf{R}^m,\ G \subseteq \mathbf{R}$$

determină două tipuri de operaţii

$$*_1 : \mathfrak{P}^m(E) \times \mathfrak{P}^m(E) \to \mathfrak{F}(E^2),\ E \subseteq \mathbf{R}^m \tag{1.3}$$

$$*_2 : \mathfrak{P}^m(E) \times \mathfrak{P}(G) \to \mathfrak{F}(E \times G),\ E \subseteq \mathbf{R}^m,\ G \subseteq \mathbf{R}, \tag{1.4}$$

numite *convoluţii discrete*.

DEFINIŢIA 2. Numim *convoluţie binomă* o convoluţie care se bucură de proprietatea

$$(P *_1 P)(u,\ v) = P(u + v) \tag{1.5}$$

sau

$$(P *_2 Q)(u,\ v) = Q(\bar{u} + v) \tag{1.6}$$

pentru anumite şiruri de polinoame.

Vom indica acum două procedee de a obţine convoluţii discrete în R^m, pornind de la convoluţiile discrete unidimensionale considerate în lucrările [5], [6].

1. Făcînd produsul convoluţiilor unidimensionale

$$Q_{n_i}(u_i,\ v_i) = \sum_{k_i=0}^{n_i} P_{k_i}^{(1)}(u_i)\, P_{n_i-k_i}^{(2)}(v_i), \quad k_i,\ n_i \in N \tag{1.7}$$

$$u_i,\ v_i \in E,\ P^{(1)},\ P^{(2)} \in \mathfrak{P}(E_i),\ E_i \subseteq \mathbf{R},\quad i = 1, \ldots, m,\ E = \bigtimes_{i=1}^{m} E_i$$

obţinem convoluţia m-dimensională

$$\prod_{i=1}^{m} Q_{n_i}(u_i,\ v_i) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{m} P_{k_i}^{(1)}(u_i)\, P_{n_i-k_i}^{(2)}(v_i),\ k,\ n \in N^m. \tag{1.8}$$

Vom considera cîteva exemple de convoluţii discrete care se obţin după acest procedeu.

a) Un caz particular al convoluţiilor (1.8) îl constituie convoluţiile binome care se obţin pentru

$$Q_{n_i}(u_i,\ v_i) = P_{n_i}(u_i + v_i)\,;\quad P^{(1)} = P^{(2)} = P, \tag{1.9}$$

adică

$$\prod_{i=1}^{m} P_{n_i}(u_i + v_i) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{m} P_{k_i}(u_i)\cdot P_{n_i-k_i}(v_i),\quad k,\ n \in N^m. \tag{1.10}$$

Ecuaţia funcţională astfel obţinută se verifică, în particular, pentru

$$P_{k_p}(u_p) = \frac{u_p^{k_p}}{k_p\,!}\,;\quad P_{k_p}(u_p) = \binom{u_p}{k_p} \tag{1.11}$$

care conduc respectiv la generalizări ale formulei binomului şi ale lui Vandermonde [2].

b) În mod analog obţinem şi următoarele convoluţii m-dimensionale

$$\prod_{i=1}^{m} P_{n_i}(u_i + v_i\,;\ y_i) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{m} P_{k_i}(u_i\,;\ y_i)\ P_{n_i-k_i}(v_i\,;\ y_i), \tag{1.12}$$

$$\prod_{i=1}^{m} Q_{n_i}(u_i + v_i\,;\ y_i) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{m} P_{k_i}(u_i\,;\ y_i)\ Q_{n_i-k_i}(v_i\,;\ y_i), \tag{1.13}$$

$$Q_{k_p}(u_p\,;\ y_p) = \frac{u_p + y_p k_p}{u_p}\,P_{k_p}(u_p\,;\ y_p),$$

care sînt verificate în particular de

$$P_{k_p}(u_p\,;\ y_p) = \frac{u_p}{u_p + y_p k_p}\binom{u_p + y_p k_p}{k_p} \tag{1.14}$$

şi

$$P_{k_p}(u_p\,;\ y_p) = \frac{u_p}{u_p + y_p k_p}\,\frac{(u_p + y_p k)^{k_p}}{k_p\,!}\,;\quad p = 1,2,\ldots,m. \tag{1.15}$$

Relaţiile considerate sînt exemple ale convoluţiilor de forma (1.1).

2. a) Din clasa convoluţiilor unidimensionale de forma (1.7) considerăm pe cele binomiale (1.9). Să scriem

$$P_n(u_1 + u_2 + \ldots + u_{m+1}) = P_n(u_1 + (u_2 + \ldots + u_{m+1})) \tag{1.16}$$

şi să repetăm de m ori relaţia convolutivă (1.7) pentru cazul binomial. Obţinem

$$P_n(u_1 + u_2 + \ldots + u_{m+1}) = \sum_{k\leqslant n} \prod_{i=1}^{m} P_{k_i}(u_i)\cdot P_{n-k_1-\ldots-k_m}(u_{m+1}). \tag{1.17}$$

Această ecuaţie funcţională este de asemenea verificată de (1.11).

b) Analog se obţin şi următoarele relaţii convolutive

$$P_n(u_1 + \ldots + u_{m+1}\,;\, y) = \sum_{\bar{k} \leqslant} \prod_{i=1}^{m} P_{k_i}(u_i\,;\, y)\, P_{n-k_1-\ldots-k_m}(u_{m+1}\,;\, y), \tag{1.18}$$

$$Q_n(u_1 + \ldots + u_{m+1}\,;\, y) = \sum_{\bar{k} \leqslant n} \prod_{i=1}^{m} P_{k_i}(u_i\,;\, y)\, Q_{n-k_1-\ldots-k_m}(u_{m+1}\,;\, y) \tag{1.19}$$

unde $Q_k(u\,;\,y) = \dfrac{u+yk}{u} P_k(u\,;\,y)$, care sînt verificate în particular de (1.14) şi (1.15). Relaţiile care se obţin constituie noi generalizări ale formulei binomului şi a lui Vandermonde.

Evident că se pot indica şi alte procedee de a generaliza convoluţiile unidimensionale. Aşa sînt, spre exemplu, cele considerate de S.G. Mohanty şi B. R. Handa [4]. Apoi, pentru astfel de generalizări se pot folosi şi alte relaţii convolutive unidimensionale [2], [5].

§ 2. *Operatori convolutivi în R^m.* Cele două operaţii de convoluţie definite în paragraful precedent conduc la considerarea a două tipuri de operatori convolutivi în $\mathbf{R}^m$.

1. Să ne referim la prima operaţie de convoluţie „$*_1$".

Fie

$$f\colon X \to \mathbf{R},\ X \subseteq \mathbf{R}^m \text{ şi fie } \Delta \quad {}^{k} \mid x_k^{(n)} = (x_{k_1}^{(n_1)}, \ldots, x_{k_m}^{(nm)}),$$
$$k_i = 0,1\ \ldots,\ n_i,\ n_i \in N,\ i = 1,2,\ \ldots,\ m\,;\ x_k^{(n)} \in X\}.$$

Fie, de asemenea, $u: X \to E$, $v: X \to E$, $X, E \subseteq \mathbf{R}^m$. Alegem două elemente $P^{(1)}$ şi $P^{(2)}$ din $\mathfrak{L}^m(E)$ pe care le fixăm şi să considerăm $\mathbf{R}^X$ mulţimea funcţiilor reale definite pe X.

DEFINIŢIA 3. Operatorul $L_n(.\,;\,P^{(1)},\ P^{(2)}\,;\ x)\colon \mathbf{R}^X \to \mathbf{R}^X$, $n \in N^m$ unde

$$\begin{aligned} L_n(f\,;P^{(1)},\ P^{(2)}\,;\ x) &= L_n(f\,;x) = \\ &= A_n(x) \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)})\, P_k^{(1)}(u(x))\, P_{n-k}^{(2)}(v(x)),\quad n \in N^m \end{aligned} \tag{2.1}$$

şi $A_n(x) = [Q_n(u(x),\ v(x))]^{-1} < \infty$ se numeşte *operator convolutiv de primul tip.*

Operaţia de convoluţie „$*_1$" a condus la definirea operatorilor (2.1). Fiecare exemplu de convoluţie de primul tip generează un operator convolutiv de primul tip. Natural, operatorii convolutivi definiţi de (2.1) sînt operatori liniari. O clasă particulară de operatori convolutivi o constituie operatorii convolutivi pozitivi.

DEFINIŢIA 4. Operatorul convolutiv $L_n(f\,;x)$ este pozitiv dacă, $f \geqslant 0$ implică $L_n(f\,;x) \geqslant 0$, $\forall\ f \in \mathbf{R}^X$ şi $\forall\ x \in X$.

Exemple de operatori convolutivi pozitivi. a). Să considerăm relaţia convolutivă (1.13) împreună cu (1.14) unde punem

$$u_i(x_i) = -\frac{s_i(x_i)}{\alpha_i},\ v_i(x_i) = -\frac{1 - s_i(x_i)}{\alpha_i},\ y_i = -\frac{\beta_i}{\alpha_i}$$
$$\alpha_i > 0,\ \beta_i \geqslant 0,\ 0 \leqslant s_i(x_i) \leqslant 1,\ x_i \in X_i \subseteq \mathbf{R}, \tag{2.2}$$

iar

$$X_i = \mathrm{pr}_i X = \{x_i \in \mathbf{R} \mid \exists\, x_j \in \mathbf{R}, j = 1,2,\ldots, i-1, i+1, \ldots m;$$
$$(x_1, \ldots, x_m) \in X\};\ i = 1,2, \ldots, m;\ X = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid$$
$$0 \leqslant s_i(x_i) \leqslant 1,\ i = 1,2, \ldots, m\}.$$

Această relaţie convolutivă împreună cu notaţiile date aici ne conduce la operatorul liniar şi pozitiv

$$L_n^{[s,\alpha,\beta]}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)}) \cdot \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{k_i} \cdot \tag{2.3}$$

$$\frac{s_i(x_i) \prod\limits_{\nu=1}^{k_i-1} [s_i(x_i) + \beta_i k_i + \nu\alpha_i] \cdot [1 - s_i(x_i)] \prod\limits_{\mu=1}^{n_i-k_i-1} [1 - s_i(x_i) + \beta_i (n_i - k_i) + \mu\alpha_i]}{\prod\limits_{\tau=1}^{n_i-1} (1 + n_i\beta_i + \tau\alpha_i)}$$

$$s = (s_1, \ldots, s_m),\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m),\ n \in N^m,$$

care este o generalizare a operatorului considerat şi studiat în [5], [6] relativ la funcţii de o singură variabilă.

La construirea operatorului (2.3) am presupus $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, m}$. Acum, însă, în expresia lui, putem pune $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, m}$.

Un prim caz particular al operatorului (2.3) îl constituie operatorul care se obţine pentru $x_{k_i}^{(n_i)} = \frac{k_i}{n_i}$, $s_i(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ şi $X = [0,1]^m$ şi care-l vom nota cu $L_n^{[\alpha,\beta]}$.

b) De asemenea, se pot considera şi următoarele cazuri particulare $L_n^{[s,0,0,]}$, $L_n^{[s,0,\beta]}$, $L_n^{[s,\alpha,0]}$ precum şi $L_n^{[0,0]}$, $L_n^{[0,\beta]}$ $L_n^{[\alpha,0]}$ care reprezintă operatorii lui B e r n s t e i n [3] C h e n e y - S h a r m a şi S t a n c u [7] relativi la funcţii de mai multe variabile.

În mod analog, folosind relaţia convolutivă (1.12) împreună cu (1.14) şi notaţiile (2.2) obţinem operatorul

$$\overline{L}_n^{[s,\alpha,\beta]}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^{(n)}) \cdot \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{k_i} \cdot \tag{2.4}$$

$$\frac{s_i(x_i) \prod\limits_{\nu=1}^{k_i-1} [s_i(x_i) + k_i\beta_i + \nu\alpha_i] \prod\limits_{\mu=0}^{n_i-k_i-1} [1 - s_i(x_i) + (n_i - k_i)\beta_i + \mu\alpha_i]}{\prod\limits_{\sigma=0}^{n_i-1} (1 + n_i\beta_i + \sigma\alpha_i)}$$

Dacă $x_{k_i}^{(n_i)} = \frac{k_i}{n_i}$, $s_i(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ şi $X = [0, 1]^m$, atunci notăm acest operator cu $\overline{L}_n^{[\alpha, \beta]}$. Şi de data aceasta putem considera cazurile particulare $\overline{L}_n^{[s, 0, 0]}$, $\overline{L}_n^{[s, 0, \beta]}$, $\overline{L}_n^{[s, \alpha, 0]}$ precum şi $\overline{L}_n^{[0, 0]}$, $\overline{L}_n^{[0, \beta]}$, $\overline{L}_n^{[\alpha, 0]}$ care reprezintă operatorii lui Bernstein, Cheney-Sharma şi Stancu.

Soluţia (1.15) pentru ecuaţiile funcţionale (1.12) şi (1.13) ne conduce la tipuri noi de operatori convolutivi pozitivi.

2. Considerăm acum relaţia convolutivă (1.18) împreună cu soluţia (1.14), unde punem $u_i(x_i) = -\frac{s_i(x_i)}{\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $u_{m+1} = -\frac{1 - \sum_{i=1}^{m} s_i(x_i)}{\alpha}$, $y = -\frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, iar $0 \leqslant s_i(x_i) \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{m} s_i(x_i) \leqslant 1$, $x_i \in X_i$ $X_i = \mathrm{pr}_i X = \{x_i \in \mathbf{R} \mid \exists\, x_j \in R, j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m; (x_1, \ldots, \ldots, x_m) \in X\}$ $i = 1, 2, \ldots, m$; $X = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid 0 \leqslant s_i(x_i) \leqslant 1, \sum_{i=1}^{m} s_i(x_i) \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, m\}$.

În acest caz obţinem operatorul liniar şi pozitiv

$$\mathfrak{L}_n^{[s, \alpha, \beta]}(f; x) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \ldots \sum_{k_m=0}^{n-k_1-\ldots-k_{m-1}} f(x_{k_1}^{(n)}, \ldots, x_{k_m}^{(n)}).$$

$$\frac{\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}{k_m}}{\prod_{\tau=1}^{n-1}(1+n\beta+\tau\alpha)} \cdot \prod_{i=1}^{m} s_i(x_i) \prod_{\nu=1}^{k_i-1}[s_i(x_i)+\beta k_i+\alpha\nu].$$

$$\left[1-\sum_{i=1}^{m} s_i(x_i)\right] \prod_{\mu=1}^{n-\sum_{i=1}^{m} k_i-1} \left[1-\sum_{i=1}^{m} s_i(x_i)+\left(n-\sum_{i=1}^{m} k_i\right)\beta+\alpha\mu\right].$$

Dacă $x_{k_i}^{(n)} = \frac{k_i}{n}$, $s_i(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ atunci notăm acest operator cu $\mathfrak{L}_n^{[\alpha, \beta]}$. Ca exemple de operatori convolutivi pozitivi de această formă avem: $\mathfrak{L}_n^{[s, 0, 0]}$, $\mathfrak{L}_n^{[s, 0, \beta]}$, $\mathfrak{L}_n^{[s, \alpha, 0]}$ precum şi $\mathfrak{L}_n^{[0, 0]}$, $\mathfrak{L}_n^{[0, \beta]}$, $\mathfrak{L}_n^{[\alpha, 0]}$.

Un operator analog cu (2.5) obţinem dacă folosim relaţia convolutivă (1.19). În general, folosind operaţia de convoluţie „$*_2$" putem defini *operatorii convolutivi de al doilea tip.*

(Intrat în redacţie la 30 octombrie 1972)

BIBLIOGRAFIE

1. Cheney, E. W., Sharma, A., *On a generalization of Bernstein polynomials*, Rev. Math. Univ. Parma, (2) **5** (1964), 77 — 84.
2. Gould, H. W., *Some generalizations of Vandermonde's convolution*, Amer. Math. Monthly. **63** (1956), 84—91.
3. Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*, Toronto, 1953.
4. Mohanty, S. G., Handa, B. R., *Extensions of Vandermonde type convolutions with several summations and their applications — I*, Canad. Math. Bull., **12** (1969); 45 — 62.
5. Moldovan, Gr., *Discrete convolutions and positive operators I*, Annales Univ. Scient. Budapestiensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Math.
6. Moldovan, Gr., *Sur la convergence de certains opérateurs convolutifs positifs*, C.R. Acad. Sc. Paris, *272* (1971), 1311 — 1313, Série A.
7. Stancu, D. D., *Probabilistic methods in the theory of approximation of functions of several variables by liniar positive operators*, From: *Aproximation theory*, edited by A. Talbot. Acad. Press, 1970.

ДИСКРЕТНЫЕ КОНВОЛЮЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Резюме)

Автор распространяет на случай нескольких переменных результаты работы [5]. В § 1 определены при помощи последовательностей многочленов в m переменных операции конволюции „$*_1$" и „$*_2$", заданные соотношениями (1.1), (1.2). Даются два метода построения m-мерных конволютивных соотношений.

В § 2 определены конволютивные операторы, присоединенные к конволютивным соотношениям, определенным операциями „$*_1$", „$*_2$". Произведя преобразования (2.2), из (1.13) вместе с (1.14) получается положительный конволютивный оператор (2.3) $L_n^{[s,\alpha,\beta]}$. Аналогичным образом из соотношения (1.18) вместе с решением (1.14), используя подстановки (2.5), получается оператор $\mathfrak{L}_n^{[s,\alpha,\beta]}$. Эти операторы обобщают несколько известных линейных положительных операторов.

DISCREET CONVOLUTIONS RELATING TO FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AND POSITIVE LINEAR OPERATORS

(Summary)

The author extends the results of the paper [5] to several variables. În § 1 are defined ranges of polynomials in m variables, the operations of convolutions „$*_1$" and „$*_2$" determined by the relations (1.1), 1.2). There are given two methods of building m-dimension convolutive relations.

În § 2 are defined convolutive operators attached to the convolutive relations defined by the operations „$*_1$", „$*_2$". Making the transformations (2.2), from (1.13) together with (1.14) we get the positive convolutive operator (2.3) $L_n^{[s,\alpha,\beta]}$ Analogously, from the relation (1.18) together with the solution (1.14), by using the substitutions(2.5)we obtain the operator $\mathfrak{L}_n^{[s,\alpha,\beta]}$. These operators generalize several known positive linear operators.

BIVARIATE SPLINE APPROXIMATION

GH. COMAN and M. FRENŢIU

I. J. Schoenberg [5] had constructed a generalization of the Bernstein approximating polynomial, which associates to each function f, defined on $[0, 1]$, the spline approximation of degree k

$$S_{\Delta}^{k} f(x) = \sum_{j=k}^{n-1} f(\xi_j)\, N_j(x), \quad (n > 0,\ k > 0), \tag{1}$$

where

$$\Delta = \{x_i\}_0^n,\ x_{i-k} < x_i,\ k < i < n,\ (x_{-k} = \ldots = x_0 = 0 < x_1 \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant x_{n-1} < x_n = 1 = x_{n+1} = \ldots = x_{n+k})\quad \xi_j = \frac{x_{j+1} + \ldots + x_{j+k}}{k}$$

$$N_j(x) = \frac{x_{j+k+1} - x_j}{k+1} M_j(x),\ M_j(x) = [x_j, \ldots, x_{j+k+1}\,;\,(k+1)\,(x-t)_+^k],$$

for

$$j = -k, \ldots, n-1.$$

If $k = 1$, then the operator S_{Δ}^{k} reduces to the operator of linear interpolation on each $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, and if $n = 1$, then $S_{\Delta}^{k} f$, defined by (1), is identical with the Bernstein polynomial of degree k. Also, the operator (1) reproduces linear functions and has the property of *„variation-diminishing”*. More than that, in [2] has been shown that $S_{\Delta}^{k} f$ converges uniformly to f, for any $f \in C\ [0, 1]$, if and only if $\frac{||\Delta||}{k} \to 0$, where $||\Delta|| = \max_j\, (x_{j+1} - x_j)$.

In this paper these results are extended to the functions of two variables. Let $\pi = \Delta_x \times \Delta_y$, where $\Delta_x = \{x_i\}_0^m$, $\Delta_y = \{y_j\}_0^n$,

$(x_{-r} = \ldots = x_0 = 0 < x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{m-1} \leqslant 1 = x_m = \ldots = x_{m+r}\,;\ x_{i-r} < x_i,\ r < i < m)$
$(y_{-s} = \ldots = y_0 = 0 < y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_{n-1} < 1 = y_n = \ldots = y_{n+s}\,;\ y_{j-s} < y_j,\ s < j < n)$

and the function $M(x, y\,;\, t, \tau) = (r+1)(x+1)\,(x-t)_+^r\,(y-\tau)_+^s$.

Let M_{ij} be the divided difference of order (r, s) of the function M with regard to t and τ, i.e.

$$M_{i,j}(x, y) = \left[\begin{matrix} x_i, \ldots, x_{i+r+1} \\ y_j, \ldots, y_{j+s+1} \end{matrix}; M(x, y; t, \tau)\right], \quad \begin{pmatrix} i = -r, \ldots, m-1 \\ j = -s, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

LEMMA 1. *For all t and τ and any $(x, y) \in D$, we have*

$$(r+1)(s+1)(t-x)^r (\tau - y)^s =$$

$$= \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} (x_{i+r+1} - x_i)(y_{j+s+1} - y_j)(t - x_{i+1}) \cdots$$

$$\cdots (t - x_{i+r})(\tau - y_{j+1}) \ldots (\tau - y_{j+s}) M_{ij}(x, y)$$

The proof of this lemma follows immediately from [2].
Let

$$N_{i,j}(x, y) = \frac{x_{i+r+1} - x_i}{r+1} \cdot \frac{y_{j+s+1} - y_j}{s+1} M_{ij}(x, y), \tag{3}$$

$$\xi_i = \frac{x_{i+1} + \ldots + x_{i+r}}{r}, \quad \eta_j = \frac{y_{j+1} + \ldots + y_{j+r}}{s}$$

$$\xi_i^{(2)} = \frac{x_{i+1}x_{i+2} + \ldots + x_{i+r-1}x_{i+r}}{\binom{r}{2}},$$

$$\eta_j^{(2)} = \frac{y_{j+1}y_{j+2} + \ldots + y_{j+s-1}y_{j+s}}{\binom{s}{2}}, \qquad \begin{pmatrix} -r \leqslant i < m \\ -s \leqslant j < n \end{pmatrix};$$

From lemma 1 there follows

LEMMA 2. *If $r \geqslant 2$ and $s \geqslant 2$, then*

$$\sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} N_{ij}(x, y) = 1$$

$$\sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} (A\xi_i + B\eta_j) N_{ij}(x, y) = Ax + By \tag{4}$$

$$\sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} (A\xi_i^{(2)} + B\eta_j^{(2)}) N_{ij}(x, y) = Ax^2 + By^2$$

for all $A, B \in R$ and $(x, y) \in D$.

Now we shall construct a spline approximation.
Let f be a function defined on D. Then

a) *the spline function*

$$(S_\pi f)(x, y) = \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} f(\xi_i, \eta_j) N_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{5}$$

one called the spline approximation of the function f,

b) *the functions N_{ij} are called the fundamental approximation splines*

c) *the formula*

$$f(x, y) = (S_\pi f)(x, y) + R(x, y) \tag{6}$$

is called the spline approximation formula of the function f.

From [5] it follows that the fundamental approximation splines N_{ij} are nonnegative and from (4) it follows that the $S_\pi f$ reproduces the linear function.

LEMMA 3. *If $g(x, y) = x^2 + y^2$ and $E(x, y) = (S_\pi g - g)(x, y)$, then*

$$0 \leqslant E(x, y) \leqslant \min\left\{\frac{1}{2r}, \frac{r\|\Delta_x\|^2}{2}\right\} + \min\left\{\frac{1}{2s}, \frac{s\|\Delta_y\|^2}{2}\right\}, \tag{7}$$

for all $(x, y) \in D$, where $\|\Delta_x\| = \max_i (x_{i+1} - x_i)$ and $\|\Delta_y\| = \max_j (y_{j+1} - y_j)$

Proof. From (4) we have $E(x, y) = \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} [\xi_i^2 - \xi_i^{(2)} + \eta_j^2 - \eta_j^{(2)}] N_{ij}(x, y) =$

$$= \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} [\xi_i^2 - \xi_i^{(2)}] N_{ij}(x, y) + \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} [\eta_j^2 - \eta_j^{(2)}] N_{ij}(x, y) = E_1(x, y) + E_2(x, y).$$

Using the procedure from [2], one obtains

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant E_1(x, y) \leqslant \min\left\{\frac{1}{2r}, \frac{r\|\Delta_x\|^2}{2}\right\} \\ 0 &\leqslant E_2(x, y) \leqslant \min\left\{\frac{1}{2s}, \frac{r\|\Delta_y\|^2}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Thus the lemma is proved.

THEOREM 1. *A necessary and sufficient condition that*

$$\lim (S_\pi f)(x, y) = f(x, y) \tag{9}$$

uniformly on the domain D, for all $f \in C(D)$, is that

$$\lim \left(\frac{\|\Delta_x\|}{r} + \frac{\|\Delta_y\|}{s}\right) = 0. \tag{10}$$

Proof. The lemma 3 and (10) implies that $\lim E(x, y) = 0$. Taking into account that S_π is a linear and positive operator, from [8] follows (9) and the sufficiency is proved.

Because $\frac{\|\Delta_x\|}{r} \leqslant \max_i (\xi_i - \xi_{i-1})$, $\frac{\|\Delta_y\|}{s} \leqslant \max_j (\eta_j - \eta_{j-1})$, from ([1], pp. 43—45) there follows that the condition (10) is necessary.

Remark. The proof of this theorem can also be given by using theorem 2 from [3].

Special cases. a) If $r = s = 1$, then the formula (6) reduces to the formula of piecewise linear interpolation of the function f.

b) If $m = n = 1$, then $S_\pi f$ is identical with the Bernstein polynomial of degree (r, s).

Now, we shall study the remainder term of the spline approximation formula (6).

From (4) and (6), we have $R_f(x, y) = \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} [f(x, y) - f(\xi_i, \eta_j)] N_{ij}(x, y)$, which permits us to write successively

$$\begin{aligned}
|R_f(x, y)| &\leqslant \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} |f(x, y) - f(\xi_i, \eta_j)|\, N_{ij}(x, y) \\
&\leqslant \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} \omega(|x - \xi_i|, |y - \eta_j|) N_{ij}(x, y) \\
&\leqslant \sum_{i=-r}^{m-1} \sum_{j=-s}^{n-1} \left[1 + \frac{|x - \xi_i|}{\delta_1} + \frac{|y - \eta_j|}{\delta_2}\right] \cdot N_{ij}(x, y) \omega(\delta_1, \delta_2) \\
&\leqslant \left[1 + \frac{1}{\delta_1} E_1(x, y) + \frac{1}{\delta_2} E_2(x, y)\right] \omega(\delta_1, \delta_2).
\end{aligned}$$

By a convenient selection of δ_1, δ_2 and by taking into account (8), we have

THEOREM 2. 1) *If r and s are finite numbers, then*

$$\|R_f\| = \sup_{(x, y) \in D} |R_f(x, y)| \leqslant \left(1 + \sqrt{\frac{r}{2}} + \sqrt{\frac{s}{2}}\right) \omega(\|\Delta_x\|, \|\Delta_y\|).$$

2) *If $r \to \infty$ and $s \to \infty$, then* $\|R_f\| \leqslant (1 + \sqrt{2}) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{r}}, \frac{1}{\sqrt{s}}\right)$.

3) *If $r \to \infty$, $s \to \infty$ and $r\|\Delta_x\| < 1$, $s\|\Delta_y\| < 1$, then* $\|R_f\| \leqslant (1 + \sqrt{2}) \omega(\|\Delta_x\| \sqrt{r}, \|\Delta_y\| \sqrt{s})$.

Remark. In the theorem 2 it is possible to consider and other cases, for example $r < \infty$ and $s \to \infty$, etc.

We shall give now an integral representation of R_f. Using the Taylor's formula with the remainder of the integral form (*see* [4], [7]) $f(x, y) = f(0, 0) + x f^{(1,0)}(0, 0) + y f^{(0,1)}(0, 0) + r(x, y)$ where $r(x, y) =$

$$= \sum_{j=0}^{1} \int_0^1 (x - t)_+ y^j f^{(2,j)}(t, 0) dt + \sum_{i=0}^{1} \int_0^1 x^i (y - \tau)_+ f^{(i,2)}(0, \tau) \cdot d\tau +$$

$$+\int_0^1\int_0^1 (x-t)_+(y-\tau)_+f^{(2,2)}(t,\tau)dt\,d\tau,\quad \text{one obtains } R_f(x,y)=r(x,y)-$$

$$-(S_\pi r)(x,y)=\sum_{j=0}^{1}\int_0^1 y^j\varphi(x,t)f^{(2,j)}(t,0)dt+\sum_{i=0}^{1}\int_0^1 x^i\psi(y,\tau)f^{(i,2)}(0,\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\Phi(x,y;t,\tau)f^{(2,2)}(t,\tau)\,dt\,d\tau, \tag{11}$$

where

$$\varphi(x,t)=(x-t)_+-\sum_{i=-r}^{m-1}\sum_{j=-s}^{n-1}(\xi_i-t)_+N_{ij}(x,y),$$

$$\psi(y,\tau)=(y-\tau)_+-\sum_{i=-r}^{m-1}\sum_{j=-s}^{n-1}(\eta_j-\tau)_+N_{ij}(x,y)$$

and

$$\Phi(x,y;t,\tau)=(x-t)_+\varphi(x,t)+(y-\tau)_+\psi(y,\tau)-\varphi(x,t)\psi(y,\tau).$$

Because the functions φ and ψ are negative on D, it follows that Φ is also negative. Using the first law of the mean, we obtain

$$R_f(x,y)=\sum_{j=0}^{1}\mu_{2j}y^j\int_0^1\varphi(x,t)\,dt+\sum_{i=0}^{1}\mu_{i2}\,x^i\int_0^1\psi(y,\tau)d\tau+\mu_{22}\int_0^1\int_0^1\Phi(x,y;t,\tau)dt\,d\tau$$

where

$$\inf_D f^{(k,l)}(x,y)\leqslant\mu_{kl}\leqslant\sup_D f^{(k,l)}(x,y),\ k,l=0,1,2.$$

Since

$$\int_0^1\varphi(x,t)\,dt=-\frac{1}{2}E_1(x),\ \int_0^1\psi(y,\tau)\,d\tau=-\frac{1}{2}E_2(y),$$

$$\int_0^1\int_0^1\Phi(x,y;t,\tau)\,dt\,d\tau=-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}E_2(y)-\frac{1}{2}\frac{y^2}{2}E_1(x)-\frac{1}{4}E_1(x)E_2(y),$$

it follows that

$$R_f(x,y)=-\frac{1}{2}\left(\mu_{20}+\mu_{21}y+\frac{1}{2}\mu_{22}y^2\right)E_1(x)-\frac{1}{2}\left(\mu_{02}+\mu_{12}x+\frac{1}{2}\mu_{22}x^2\right)\cdot$$

$$\cdot E_2(y)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\mu_{22}E_1(x)E_2(y).$$

(Received January 15, 1973)

REFERENCES

1. Bohman, H., *On approximation of continuous and of analytic functions*, Arkiv Mat. **2** (1952), 43–56.
2. Marsden, M. J., *An identity for spline functions with applications to variation-diminishing spline approximation*, Journal of Approximation Theory, **3** (1970), 1, 7–49.
3. Moldovan, Gr., *Convergența șirurilor valorilor unor operatori convolutivi în R^m*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 1 (1973), 69–80.
4. Sard, A., *Linear approximation*, Amer. Math. Soc., Providence, 1963.
5. Schoenberg, I. J., *On spline functions*, în „Inequalities", Symposium at Wright-Patterson Air Force Base (O. Shisha, ed.), 255–291, Academic Press, New York, 1967.
6. Stancu, D. D., *A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables*, Amer. Math. Monthly, **70**, 3 (1963), 260–264.
7. Stancu, D. D., *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*, J. SIAM Numer. Anal., ser. B., **1** (1964), 137–163.
8. Volkov, V. I., *O schodimosti posledovatel'nostej linejnych položitel'nych operatorov v prostranstve nepreryvnych funkcij dvuch peremennych*, Dokl. AN SSSR, **115**, 1 (1957), 17–19.

SPLINE BIDIMENSIONALE DE APROXIMARE

(Rezumat)

În lucrare sînt extinse unele rezultate ale lui L. J. Schöenberg și M. J. Marsden privind aproximarea funcțiilor continue de o variabilă prin funcții spline, la cazul a două variabile.

„SPLINE" ДВУМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ АППРОКСИМИРОВАНИЯ

(Резюме)

В работе обобщаются некоторые результаты, полученные И. Ж. Шёнбергом и М. Ж. Марсденом относительно аппроксимирования непрерывных функций одного переменного через „spline" функции для случая двух переменных.

A METHOD FOR GENERATION OF PSEUDO—RANDOM NUMBERS

M. FRENȚIU

1. There are many methods for obtaining pseudo-random numbers. The classical methods (the middle-square method, the additive method, the multiplicative method etc. (see [1])) have a finite period, i.e. the whole sequence of generated numbers or at least some part of it sooner or later repeats identically.

In this paper we propose a new random number generator.

Our aim here is to obtain a sequence (n_k) of pseudo-random integers with r digits. Let us take at random the integers n_1, n_2, n_3 of r digits. To generate n_4 we take r digits from the integer $P_2(n_3)$ where the polynomial P_2 is given by

$$P_2(x) = n_1x + n_2.$$

After $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$ are generated, n_{k+2} is obtained by taking r digits from the integer $P_k(n_{k+1})$, where the polynomial P_k is given by

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^{k} n_j x^{k-j} = xP_{k-1}(x) + n_k.$$

If $n_{k+1} = 0$ we can take the value of the polynomial P_k in another arbitrary positive integer a, otherwise it is possible that $n_k = 0$, $n_{k+1} = 0$ and then all $n_j = 0$ for $j > k$.

It is interesting to know if the sequence thus obtained has a finite period or not.

2. The disadvantage of this number random generator consists in the fact that it needs a lot of computation work. It is possible to remove this disadvantage in many manners. For example, if the numbers $n_1, n_2, \ldots n_{99}, n_{100}$ are already obtained, then one can take three of them and resume the same algorithm to obtain another 100 numbers, etc. In this way we have obtained 10,000 numbers of two digits (taking from $P_k(n_{k+1})$ the second and the third digit).

We shall not give here these numbers but only the program in FORTRAN for the computer FELIX C—256 to generate them.

```
      INTEGER N(100),FREQ(100)
      DATA N(1),N(2),N(3)/48,37,16/
      NR=97
      DO 1 L=1,100
    1 FREQ(L)=0
      DO 10 J=1,100
      CALL NUMBER(NR,N,FREQ)
      WRITE(108,20) N
   20 FORMAT(10X,40I3)
      N(1)=N(17)
      N(2)=N(29)
      N(3)=N(71)
   10 CONTINUE
      HI=0
      DO 30 K=1,100
   30 HI=HI+(FREQ(K)-100.)**2/100.
      WRITE(108,40) HI
      WRITE(108,50) FREQ
   40 FORMAT(1H1,39X,5HHI = ,E15.7//)
   50 FORMAT (20X,10I8)
      STOP
      END
      SUBROUTINE NUMBER(NT,M,FREQ)
      INTEGER FREQ(100),M(100)
      DO 60 K=1,NT
      LIM=K+1
      CALL POLYNOM(OIM,M,NPOL)
      M(K+3)=NPOL
      IND=NPOL+1
   60 FREQ(IND)=FREQ(IND)+1
      RETURN
      END
      SUBROUTINE POLYNOM(NG,M,NSUM)
      DIMENSION M(100)
      NSUM=M(1)
      NX=M(NG+2)
      DO 70 J=1,NG
      NSUM=NSUM*NX+M(J+1)
      NC=NSUM/1000
      NSUM=NSUM-1000*NC
   70 NSUM=NSUM/10
      RETURN
      END
```

For testing the uniformity of the numbers 0, 1, 2, ..., 98, 99 in the sequence of these 10,000 numbers, we applied the test χ^2. The theoretical frequences m_i must be equal to 100 and

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{100} \frac{(f_i - m_i)^2}{m_i}$$

where f_i is the frequency of the number $i - 1$ in the obtained sequence.

The computer gave us $\chi^2 = 97.44$. For the level of significance $q = 1\%$ one must have $66.5 < \chi^2 < 139$ and that is satisfied.

In the following we shall give the frequences f_i:

93	105	92	113	99	111	88	82	96	108
96	98	95	98	93	97	101	92	103	97
111	101	83	112	108	95	95	91	99	106
105	115	108	93	102	97	95	100	89	97
110	94	98	94	71	110	118	91	87	82
99	98	106	105	96	106	123	95	97	93
99	88	102	106	112	86	99	116	101	93
86	104	88	97	110	102	102	85	111	101
108	134	109	110	101	105	89	100	110	104
119	82	102	110	103	102	90	102	89	112.

The rule of uniformity (see [2] pg. 20)

$$\left| f_j^* - \frac{1}{n} \right| \leqslant \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{nN}}$$

is also checked, where $f_j^* = f_j/N$ is the relative frequency of the number $j - 1$, $n = 100$ and $N = 10{,}000$. Note that in our case $\sqrt{20/nN} = 0.0045$ and

$$\max_{j=1,100} \left| f_j^* - \frac{1}{n} \right| = 0.0034.$$

3. Since in order to find the number n_{k+2} we calculate all the polynomials $P_2, P_3, P_4, \ldots, P_k$ in the point n_{k+1} we may also use these results to obtain another sequence (n_k^*) of random numbers. Thus, after finding 500 numbers n_k, we shall find another $1 + 2 + 3 + \ldots + 496 = 123{,}256$ numbers n_k^*.

It would be useful to find these numbers effectively and also test of their uniformity.

(Received March 16, 1973)

REFERENCES

1. Janson, B., *Random Numbers Generators*, Stockholm, 1966.
2. Onicescu, O., *Numere și sisteme aleatoare*, București, 1962.

O METODĂ DE GENERARE DE NUMERE PSEUDOALEATOARE

(Rezumat)

În lucrare se dă o metodă de generare de numere pseudoaleatoare. Se dă şi un program în FORTRAN pentru generarea a 10 000 numere de două cifre. Şirul astfel obţinut este testat cu testul χ^2.

МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

(Резюме)

Дается метод получения псевдослучайных чисел. Указывается также программа в ФОРТРАН для получения 10000 чисел с двумя цифрами. Полученная таким образом последовательность проверена тестом χ^2.

PRINCIPIUL MAJORANTEI ÎN REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE

SEVER GROZE

1. În lucrarea de față ne propunem să stabilim condiții de existență și unicitate ale soluțiilor unei ecuații operaționale, precum și condiții de convergență, folosind principiul general al majorantei folosit de L. V. Kantorovici [1]. Astfel, pe lîngă ecuația

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

se consideră simultan o ecuație reală majorantă

$$Q(z) = 0 \tag{2}$$

iar pe baza condițiilor de convergență folosite pentru ecuația majorantă se stabilesc condiții de existență și unicitate pentru soluțiile ecuației (1).

În lucrarea [2] este aplicat acest principiu al majorantei folosind metoda aproximațiilor succesive în aflarea soluțiilor ecuației (1), dîndu-se condiții pentru existența soluțiilor și unicitatea lor. În [3] este aplicat acest principiu la metoda nemodificată a coardei, caracterizată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n P(x_n)$$

unde $\Lambda_n = -[P_{x_n, x_{n-1}}]^{-1}$, $n = 0, 1, \ldots$ Presupunîndu-se fie existența operatorului invers $\Lambda_0 = [P_{x_0, x_{-1}}]^{-1}$ și a diferențelor divizate de ordinul doi pentru operatorul $P(x)$, fie numai existența diferențelor divizate de ordinul întîi ale lui $P(x)$ și existența lui Λ_0, dar și mărginirea lui, sînt date condiții pentru existența și unicitatea soluțiilor ecuației (1).

Prezentînd interes pentru cele ce urmează, reamintim una din teoremele demonstrate în [3].

TEOREMĂ. *Dacă pentru aproximațiile inițiale* x_0, x_{-1} *ale ecuației* (1) *respectiv pentru aproximațiile inițiale* z_0, z_{-1} *ale ecuației* (2) *sînt verificate condițiile*

1° *Există* $\Lambda_0 = -[P_{x_0, x_{-1}}]^{-1}$ și $\rho_{X,X}(\Lambda_0) \leq B_0$

unde $B_0 = -\dfrac{1}{Q_{z_0, z_{-1}}} > 0$

2° $\rho_X(P(x_i)) \leqslant Q(z_i), \quad i = 0, -1$

3° $\rho_{X,X}(P_{x^{(1)}, x^{(2)}} - P_{x^{(2)}, x^{(3)}}) \leqslant Q_{z^{(1)}, z^{(2)}} - Q_{z^{(2)}, z^{(3)}})$

pentru orice triplet $x^{(i)} \in S$, *unde* S *este definită de*

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant z - z_0, \quad i = 1, 2, 3,$$

atunci din existența rădăcinii $z^* \in [z_0, z']$ *a ecuației reale* (2), *rezultă că ecuația operațională* (1) *are cel puțin o soluție* $x^* \in S$ *și procedeul nemodificat al coardei este convergent, rapiditatea convergenței precum și eroarea fiind caracterizate de relația*

$$\rho_X(x^* - x_n) \leqslant z^* - z_n. \tag{3}$$

În lucrarea de față, presupunînd existența numai a diferențelor divizate de ordinul întîi ale lui $P(x)$ și existența inversului $\Lambda_0 = -[P_{x_0, x_{-1}}]^{-1}$, vom da condiții suficiente de existență a soluțiilor ecuației operaționale (1).

2. Fie ecuația operațională (1) unde $P(x)$ este un operator, neliniar și continuu, care transformă spațiul supermetric X [4] în spațiul de același tip Y, θ fiind elementul nul al spațiului Y. Presupunem de asemenea că operatorul $P(x)$ admite diferențe divizate de ordinul întîi.

Pentru rezolvarea ecuației (1) se folosește algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n P(x_n) \tag{4}$$

deci metoda nemodificată a coardei.

Considerăm de asemenea ecuația reală (2) unde $Q(z)$ este o funcție monotonă definită pe intervalul I, ecuație majorantă a ecuației (1) [1, 2], pentru rezolvarea căreia se folosește algoritmul

$$z_{n+1} = z_n - [Q_{z_n, z_{n-1}}]^{-1} Q(z_n) \tag{5}$$

folosind aceeași notație pentru diferențele divizate ale funcției reale $Q(z)$ ca și pentru operatori, deci

$$[Q_{z_n, z_{n-1}}]^{-1} = \frac{z_n - z_{n-1}}{Q(z_n) - Q(z_{n-1})}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Demonstrăm atunci

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximațiile inițiale* x_0, x_{-1}, *respectiv* z_0, $z_{-1} \in I$, $z_{-1} \leqslant z_0$, *avem îndeplinite condițiile*

1° *Există operatorul* $\Lambda_0 = -[P_{x_0, x_{-1}}]^{-1}$

2° $\rho_X(\Lambda_0 P(x_i)) \leqslant B_0 Q(z_i)$, $i = 0, -1$, unde $B_0 = -\dfrac{1}{Q_{z_0, z_{-1}}} > 0$

3° $\rho_{X,X}(\Lambda_0[P_{x^{(1)}, x^{(2)}} - P_{x^{(2)}, x^{(3)}}]) \leqslant B_0(Q_{z^{(1)}, z^{(2)}} - Q_{z^{(2)}, z^{(3)}})$

oricare ar fi $x^{(i)} \in S$ *definită de* $\rho_X(x^{(i)} - x_0) \leqslant z' - z_{-1} \subset I$ $i = 1, 2, 3,$

atunci din existenţa rădăcinii $z^* \in [z_0, z']$ a ecuaţiei reale (2) rezultă existenţa unei soluţii $x^* \in S$ a ecuaţiei operaţionale (1), procedeul (4) fiind convergent, rapiditatea convergenţei precum şi eroarea fiind caracterizate de relaţia

$$\rho_X(x^* - x_n) \leqslant z^* - z_n. \tag{6}$$

Demonstraţie. Pentru demonstrarea teoremei considerăm ecuaţia operaţională

$$\tilde{P}(x) \equiv \Lambda_0 P(x) = \theta \tag{1'}$$

echivalentă cu ecuaţia (1), iar ca majorantă ecuaţia reală

$$\tilde{Q}(z) \equiv B_0 Q(z) = 0. \tag{2'}$$

Corespunzător acestor ecuaţii, considerăm algoritmurile

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \tilde{\Lambda}_n \tilde{P}(\tilde{x}_n) \tag{4'}$$

respectiv

$$\tilde{z}_{n+1} = z_n - \left[\tilde{Q}_{\tilde{z}_n, \tilde{z}_{n-1}}\right]^{-1} \tilde{Q}(\tilde{z}_n). \tag{5'}$$

Vom arăta, folosind inducţia completă, că dacă $\tilde{x}_0 \equiv x_0$, $\tilde{x}_{-1} \equiv x_{-1}$, respectiv $\tilde{z}_0 \equiv z_0$, $\tilde{z}_{-1} \equiv z_{-1}$, atunci şirurile date de (4') şi (5') coincid cu cele date de (4) şi (5).

Într-adevăr, avem

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 - \tilde{\Lambda}_0 \tilde{P}(\tilde{x}_0) = x_0 - \tilde{\Lambda}_0 \tilde{P}(x_0) = x_0 - \left[\Lambda_0 P_{x_0, x_{-1}}\right]^{-1} \cdot \Lambda_0 P(x_0)$$

$$= x_0 - \Lambda_0 P(x_0) = x_1$$

deoarece $[\Lambda_0 P_{x_0, x_{-1}}]^{-1} = I$, operatorul identic al spaţiului.

Din presupunerea $\tilde{x}_n \equiv x_n$, deducem

$$\tilde{x} = x_n - \tilde{\Lambda}_n \tilde{P}(x_n) = x_n - \left[\Lambda_0 P_{x_n, x_{n-1}}\right]^{-1} \cdot \Lambda_0 P(x_n)$$

$$= x_n - \left[P_{x_n, x_{n-1}}\right] \cdot \Lambda_0^{-1} \Lambda_0 P(x_n) = x_{n+1}.$$

La fel se demonstrează că $\tilde{z}_{n+1} = z_{n+1}$.

Vom avea atunci

$1°$ $\tilde{\Lambda}_0 = -\left[\tilde{P}_{x_0, x_{-1}}\right]^{-1} = -\left[\Lambda_0 P_{x_0, x_{-1}}\right]^{-1} = -I$

deci $\tilde{\Lambda}_0$ există, iar norma lui generalizată este $\rho_{X,X}(\tilde{\Lambda}_0) = 1 \equiv B_0$

$$2^\circ \ \rho_X(\tilde{P}(x_i)) = \rho_X(\Lambda_0 P(x_i)) \leqslant B_0 Q(z_i) = \tilde{Q}(z_i) \quad i = 0, -1$$

$$3^\circ \ \rho_{X,X}(\tilde{P}_{x^{(1)},x^{(2)}} - P_{x^{(2)},x^{(3)}}) \leqslant \rho_{X,X}(\Lambda_0 [P_{x^{(1)},x^{(2)}} - P_{x^{(2)},x^{(3)}}]) \leqslant$$

$$\leqslant B_0 (Q_{z^{(1)},z^{(2)}} - Q_{z^{(2)},z^{(3)}}) = \tilde{Q}_{z^{(1)},z^{(2)}} - \tilde{Q}_{z^{(2)},z^{(3)}}$$

Se observă că sînt îndeplinite condițiile 1°—3° ale teoremei enunțate mai sus și demonstrate în [3], iar pe baza acesteia rezultă că ecuația (1′) admite cel puțin o soluție și atunci și echivalenta ei (1) va admite soluții.

3. Metoda nemodificată a coardei caracterizată de algoritmul (4) prezintă dezavantajul că, în practică, pentru construirea șirului aproximațiilor succesive ale soluțiilor ecuației la fiecare pas trebuie calculat inversul operatorului $P_{x^{(1)},x^{(2)}}$. Acest dezavantaj poate fi înlăturat înlocuind algoritmul (4) cu

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_0 P(x_a) \tag{4$_1$}$$

unde $\Lambda_0 = [P_{x_0, x_{-1}}]^{-1}$, care caracterizează metoda modificată a coardei. Se observă că în cazul acestei metode se calculează o singură dată inversul $[P_{x_0,x_{-1}}]^{-1}$ pentru aproximațiile inițiale date x_0, x_{-1}.

Pe marginea acestei metode vom demonstra, privind existența soluțiilor unei ecuații operaționale date,

TEOREMA 2. *Dacă ecuația operațională* (1) *admite majoranta* (2) *și dacă pentru* $z_{-1}, z_0 \in I$, $z_{-1} \leqslant z_0$ *și aproximațiile inițiale* x_{-1}, x_0 *au loc relațiile*

1° *Există* $\Lambda_0 = -[P_{x_0,x_{-1}}]^{-1}$

2° $\rho_X(\Lambda_0 P(x_i)) \leqslant B_0 Q(z_i)$ unde $B_0 = -\dfrac{1}{Q_{z_0,z_{-1}}} > 0$ și $i = 0, -1$

3° Pentru orice triplet $x^{(i)}$ respectiv $z^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, avem

$$\rho_{X^2,X}(\Lambda_0 P_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}}) \leqslant B_0 \quad Q_{z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)}} \text{ unde}$$

$$\rho_X(x^{(i)} - x_0) \leqslant z^{(i)} - z_0 \leqslant z' - z_0 \subset I$$

$$\rho_X(x^{(i)} - x_{-1}) \leqslant z^{(i)} - z_{-1} \leqslant z' - z_{-1} \subset I, \qquad i = 1, 2, 3$$

atunci, ecuația majorantă (2) avînd o rădăcină aparținînd intervalului I, rezultă că și ecuația operațională (1) admite cel puțin o soluție x^*, astfel încît

$$\rho_X(x^* - x_0) \leqslant z' - z_0 \subset I$$

soluție către care converge algoritmul (4_1).

Demonstrație. Procedeul modificat al coardei dat de algoritmul (4_1) poate fi privit ca un procedeu cu aproximații succesive pentru ecuația

$$x = U(x) = x + \Lambda_0 P(x) \tag{7}$$

pentru care luăm ca ecuaţie majorantă ecuaţia reală

$$z = V(z) = z + B_0Q(z). \tag{7'}$$

Se observă că în acest caz avem

$$U_{x^{(1)},x^{(2)}} = I + \Lambda_0 P_{x^{(1)},x^{(2)}}$$

$$V_{z^{(1)},z^{(2)}} = 1 + B_0 Q_{z^{(1)},z^{(2)}}$$

unde am notat cu I operatorul identic al spaţiului X.

Ţinînd seama de (7) şi (7') putem scrie

(A) $\rho_X(U(x_0) - x_0) = \rho_X(\Lambda_0 P(x_0)) \leqslant B_0 Q(z_0) = V(z_0)$

(B) $U_{x^{(1)},x^{(2)}} = I + \Lambda_0 P_{x^{(1)},x^{(2)}} = \Lambda_0(P_{x^{(1)},x^{(2)}} - P_{x_0,x_{-1}})$

$$= \Lambda_0(P_{x^{(1)},x^{(2)}} - P_{x_0,x_{-1}} + P_{x^{(1)},x_0} - P_{x^{(1)},x_0})$$

$$= \Lambda_0[P_{x^{(1)},x^{(2)},x_0}(x^{(2)} - x_0) + P_{x^{(1)},x_0,x_{-1}}(x^{(1)} - x_{-1})]$$

şi deci

$$\rho_{X,X}(U_{x^{(1)},x^{(2)}}) \leqslant B_0 Q_{z^{(1)},z^{(2)},z_0}(z^{(2)} - z_0) + B_0 Q_{z^{(1)},z_0,z_{-1}}(z^{(1)} - z_{-1})$$

$$= B_0(Q_{z^{(1)},z^{(2)}} - Q_{z^{(1)},z_0} + Q_{z^{(1)},z_0} - Q_{z_0,z_{-1}})$$

$$= 1 + B_0 Q_{z^{(1)},z^{(2)}} = V_{z^{(1)},z^{(2)}}.$$

Subliniem că în cadrul lucrării [2] s-a demonstrat

TEOREMA. *Dacă ecuaţia operaţională*

$$x = U(x)$$

este majorată de ecuaţia reală

$$z = V(z)$$

adică avem satisfăcute condiţiile

(a) $\rho_X(U(x_0) - x_0) \leqslant V(z_0) - z_0$

(b) $\rho_{X,X}(U_{x^{(1)},x^{(2)}}) \leqslant V_{z^{(1)},z^{(2)}}$

unde $\rho_X(x^{(i)} - x_0) \leqslant z' - z^{(i)} \leqslant z' - z_0,\ i = 1, 2$

şi dacă ecuaţia majorantă are ca cea mai mică rădăcină pe $z^* \in (z_0, z')$ *atunci şi ecuaţia operaţională considerată admite o soluţie* x^**, care satisface relaţia*

$$\rho_X(x^* - x_0) \leqslant z^* - z_0 \leqslant z' - z_0$$

soluţie ce este limita către care converge şirul aproximaţiilor succesive dat de algoritmul $x_{n+1} = U(x_n)$.

Se observă că relaţiile (A) şi (B) deduse sînt tocmai condiţiile (a) şi (b) din enunţul teoremei de mai sus şi deoarece ecuaţia $z=V(z)$, echivalentă cu (1), admite o rădăcină în intervalul $(z_0, z') \subset I$, conchidem asupra convergenţei procedeului iterativ pentru ecuaţia (7), respectiv asupra procedeului modificat al coardei pentru ecuaţia (1).

(Intrat în redacţie la 25 octombrie 1971)

BIBLIOGRAFIE

1. Kantorovici, L. V., *Prinţip majorant i metoda Niutona*, D.A.N., **74**, 1, 1951, 17–20.
2. Groze, S., *Principiul majorantei şi rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare definite în spaţii supermetrice prin metoda aproximaţiilor succesive* (sub tipar).
3. Groze, S., *Principiul majorantei şi metoda coardei* (sub tipar).
4. Collatz, L., *Funktionalanalysis und Numerische Matematik*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

ПРИНЦИП МАЖОРАНТЫ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

Автор установил условия существования и единственности решения операторного уравнения, определенного в сверхметрических пространствах, применяя принцип мажоранты к неизмененному методу хорды, данному алгоритмом

$$x_{n+1} = x_n - [P_{x_n}, x_{n-1}]^{-1} P(x_n).$$

В предположениях доказанных теорем избегается ограничение некоторых операторов и существование разностных отношений второго порядка, причем улучшаются таким образом результаты работ [2] и [3].

PRINCIPE DE LA MAJORANTE DANS LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONELLES NON-LINÉAIRES

(Résumé)

Le travail établit des conditions d'existence et d'unicité de la solution d'une équation opérationelle définie dans des espaces supermétriques, en utilisant le principe de la majorante à la méthode non-modifiée de la corde donnée par l'algorithme

$$x_{n+1} = x_n - [P_{x_n}, x_{n-1}]^{-1} P(x_n)$$

Dans les hypothèses des théorèmes démontrés on évite la limitation de certains opérateurs et l'existence des différences divisées de second ordre, améliorant de la sorte les résultats des travaux [2] et [3].

DISTRIBUŢIA TEMPERATURII ÎNTR-UN LICHID ÎN MIŞCARE PE UN PLAN ÎNCLINAT

PETRE BRĂDEANU şi DAN DUMITRAŞ

Notaţii

Ox, axă de coordonate dirijată de-a lungul planului înclinat
Oy, axă de coordonate perpendiculară pe Ox
$u(x, y)$, viteza fluidului în punctul (x, y)
$T(x, y)$, temperatura absolută a fluidului în punctul (x, y)
h, grosimea stratului de lichid
p, presiunea în lichid
u_S, viteza fluidului pe suprafaţa liberă, formula (0.1)
μ, ρ, λ, vîscozitatea, densitatea, conductibilitatea termică
c_p, căldura specifică a lichidului
σ, numărul lui Prandtl
θ, coeficientul dat de formula (6)
A, k, constante date în formula (14)
ϵ, are valoarea 0 sau 1, vezi (20)
a, b, mărimi date de formulele (20)
g, acceleraţia gravitaţională
α, unghiul planului înclinat cu orizontala
q_w, fluxul de căldură pe planul înclinat
Re, numărul lui Reynolds
p_0, presiunea pe suprafaţa liberă (atmosferă)
w, indice (indică valori pe suprafaţa planului înclinat).

Introducere. Se consideră un strat de lichid vîscos greu, de grosime h, mărginit superior de o suprafaţă liberă (S) iar inferior de un plan fix care este deviat cu unghiul α de la orizontală. Fluidul incompresibil se găseşte în mişcare plană şi staţionară de-a lungul planului înclinat. Fie Oxy reperul planului mişcării.

Ecuaţia continuităţii şi ecuaţiile lui Navier-Stokes, cu condiţiile la limită

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, h) = 0, \ p(x, h) = p_0 \ \ (u(x, h) \equiv u_S),$$

au soluţiile [4]

$$p = \rho g(h - y)\cos\alpha + p_0$$

$$u(y) = \frac{\rho g}{2\mu}(2h - y)y\sin\alpha, \quad u_S = \frac{\rho g h^2 \sin\alpha}{2\mu} \tag{0.1}$$

Profilul de viteză are, în planul Oxy, o formă parabolică.

Ne vom ocupa cu determinarea cîmpului de temperatură şi transferul de căldură în regim staţionar pentru scurgerea fluidului vîscos incompresibil, cu suprafaţă liberă, pe planul înclinat presupunînd valabile legile (0.1). Într-un fluid incompresibil, cîmpul vitezelor este independent de cîmpul temperaturilor.

Vom încadra această problemă în următoarea problemă **la limită termică**: Să se determine repartiţia temperaturii $T(x, y)$ în fluidul în mişcare pe planul înclinat, ştiind că $T(x, y)$ este o funcţie care satisface următoarea ecuaţie termodinamică a energiei cu condiţii la limită

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$(0 < y < h; \; -\infty < x < +\infty)$$

$$T(x, 0) = T_w(x), \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, h) = 0 \tag{2}$$

unde $T_w(x)$ este temperatura dată a planului înclinat (T_w poate fi şi o constantă), iar funcţia u este dată de formula (0.1).

1. **Plan înclinat cu temperatură constantă** ($T_w = Const$). În acest caz se observă că se poate căuta pentru problema (1)—(2) o soluţie de forma $T(x, y) = T(y)$. Prin urmare, temperatura nu variază în raport cu x şi cîmpul de temperatură este determinat de conductibilitatea termică, în direcţia y, a fluidului şi de disipaţia energiei mecanice, prin frecare, în căldură.

Funcţia $T(y)$ este, după (1)—(2), soluţia problemei la limită

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{3}$$

$$T(0) = T_w, \quad \left(\frac{dT}{dy}\right)_{y=h} = 0 \tag{4}$$

Integrînd ecuaţia (3) cu condiţiile (4) şi folosind soluţia (0.1) găsim, pentru repartiţia temperaturii $T(x, y)$ în domeniul ocupat de fluidul în mişcare, formula

$$T(y) = T_w + \frac{\mu}{\lambda}\int_0^y dz \int_z^h \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dt =$$

$$= T_w + \frac{h^4 \rho^2 g^2 \sin^2\alpha}{12\lambda\mu}\left[1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^4\right] = T_w\left\{1 + \frac{\sigma\theta}{3}\left[1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^4\right]\right\} \tag{5}$$

unde am introdus parametrii termodinamici adimensionali constanţi

$$\sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \theta = \frac{u_s^2}{c_p T_w} \tag{6}$$

Suprafaţa exterioară (S), izolată termic, pe care avem $y = h$, se încălzeşte, după (5), la temperatura

$$T_s = T_w \left(1 + \frac{\sigma}{3} \theta\right) \tag{7}$$

Să observăm, acum, că pentru gradientul de temperatură avem expresia pozitivă

$$\frac{dT}{dy} = \frac{4\sigma\theta}{3} \frac{T_w}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)^3 \text{ şi } \left(\frac{dT}{dy}\right)_w = \frac{4\sigma}{3} \frac{T_w}{h} \theta \tag{8}$$

care indică o scurgere a căldurii de la lichidul în mişcare spre planul înclinat.

Fluxul de căldură q_w, care străbate în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă a planului înclinat, este dat de formula lui Fourier

$$q_w = \lambda \left(\frac{dT}{dy}\right)_w = \frac{4}{3} \lambda \sigma \theta \frac{T_w}{h} = 4\lambda \frac{T_s - T_w}{h} \tag{9}$$

2. **Temperatura planului înclinat este variabilă** $T_w = T_w(x)$. Să facem transformarea de funcţie

$$T(x, y) = T_w(x) H(x, y) \tag{10}$$

unde $H(x, y)$ este noua funcţie necunoscută care satisface condiţiile (12), scrise mai jos, iar $T_w(x)$ este temperatura planului înclinat pe care o vom determina cu condiţii suplimentare.

Folosind (10), ecuaţia (1) şi condiţiile (2) primesc forma

$$\rho c_p u \left(\frac{T_w'}{T_w} H + \frac{\partial H}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\mu}{T_w} \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \lambda \left[\frac{T_w''}{T_w} H + 2 \frac{T_w'}{T_w} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right] \tag{11}$$

$$H(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, h) = 0 \tag{12}$$

Ecuaţia (11) poate fi transformată într-o ecuaţie diferenţială ordinară, în raport cu funcţia $H = H(y)$ dependentă numai de variabila y, dacă considerăm că

$$\mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \approx 0, \quad \frac{T_w'}{T_w} = \text{const.} = k, \quad \frac{T_w''}{T_w} = \text{const.} \tag{13}$$

Condiţiile impuse (13) se verifică în cazul mişcărilor nedisipative şi pentru o distribuţie particulară a temperaturii planului înclinat reprezentată prin funcţia

$$T_w(x) = Ae^{kx}, \quad \left(\frac{T''_w}{T_w} = k^2\right), \quad [k] = L^{-1} \tag{14}$$

unde $A > 0$ şi k (număr pozitiv sau negativ) sînt constante arbitrare. Vom presupune, deci, că planul înclinat are temperatura dată de formula (14).

Determinarea distribuţiei temperaturii în fluid se reduce, în aceste condiţii, la determinarea funcţiei $H(y)$ în cadrul problemei la limită

$$\frac{d^2H}{dy^2} - k\left(\frac{\rho c_p}{\lambda} u - k\right) H = 0 \tag{15}$$

$$H(0) = 1, \quad H'(h) = 0 \tag{16}$$

$$\left(u = u_s\left(2 - \frac{y}{h}\right)\frac{y}{h}\right) \tag{17}$$

Avem, deci, de integrat ecuaţia diferenţială de ordinul doi, cu condiţii bilocale, de formă adimensională

$$\frac{d^2H}{dY^2} - [a(2 - Y)Y - \varepsilon b]H = 0 \tag{18}$$

$$H(0) = 1, \; H'(1) = 0 \tag{19}$$

$$\left(\begin{array}{c} b = h^2 k^2, \; a = \dfrac{k \rho c_p u_s}{\lambda} h^2 = \sigma R_e \sqrt{b}, \; Y = \dfrac{y}{h} \\ R_e = h \rho \mu_s/\mu, \quad \varepsilon = 0 \text{ sau } 1 \end{array}\right) \tag{20}$$

$\varepsilon = 1$ pentru valori obişnuite ale lui k şi $\varepsilon = 0$ pentru valori mici sau foarte mici ale lui k.

Vom căuta pentru problema (18)—(20) o soluţie în forma seriei de puteri

$$H(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Y^n \tag{21}$$

care este convergentă pentru toate valorile lui $Y(Y < 1)$, deoarece coeficientul variabil din (18) este un polinom de gradul doi în raport cu variabila independentă Y.

Verificînd cu (21) ecuaţia (18) se găseşte relaţia de recurenţă

$$a_{n+2} = \frac{a}{(n+2)(n+1)}\left(2a_{n-1} - a_{n-2} - \frac{\varepsilon b}{a} a_n\right) \tag{22}$$

$$(n = 0, 1, 2 \ldots ; \; a_{-1} = a_{-2} = 0).$$

Soluţia (21), cu $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ şi (22), după efectuarea unor calcule elementare, conduce la soluţia particulară

$$H_1(Y) = 1 - \frac{\varepsilon b}{2} Y^2 + \frac{a}{3} Y^3 - \frac{2a - \varepsilon^2 b^2}{24} Y^4 - \frac{a\varepsilon b}{15} Y^5 +$$

$$+ \frac{16a^2 + \varepsilon b(14a - \varepsilon^2 b^2)}{720} Y^6 - \frac{a(10a - 3\varepsilon^2 b^2)}{840} Y^7 +$$

$$+ \frac{60a^2 - \varepsilon b(112a^2 + 44a\varepsilon b - \varepsilon^3 b^3)}{40320} Y^8 + \dots \tag{23}$$

Dacă se ia $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, atunci, formula (21) ne dă soluţia particulară

$$H_2(Y) = Y - \frac{\varepsilon b}{6} Y^3 + \frac{a}{6} Y^4 - \frac{6a - \varepsilon^2 b^2}{120} Y^5 - \frac{3a\varepsilon b}{180} Y^6 +$$

$$+ \frac{40a^2 + \varepsilon b(26a - \varepsilon^2 b^2)}{5040} Y^7 - \frac{8a^2 - a\varepsilon^2 b^2}{1680} Y^8 + \dots \tag{24}$$

Integrala generală a ecuaţiei liniară şi omogenă (15) este

$$H(Y) = \tilde{A} H_1(Y) + B H_2(Y) \tag{25}$$

unde $\tilde{A}$ şi B sînt cele două constante de integrare care se determină cu condiţiile (19). Potrivit cu modul cum au fost deduse integralele particulare (23) şi (24) funcţiile H_1 şi H_2 satisfac condiţiile

$$H_1(0) = 1, \quad H_1'(0) = 0, \quad H_2(0) = 0, \quad H_2'(0) = 1$$

Aplicînd integralei (25) condiţiile (19) găsim

$$\tilde{A} = 1, \quad B = -\frac{H_1'(1)}{H_2'(1)}$$

Soluţia problemei la limită (18)—(19) este

$$H(Y) = H_1(Y) - \frac{H_1'(1)}{H_2'(1)} H_2(Y), \quad \left(H' = \frac{dH}{dY}\right) \tag{26}$$

Distribuţia temperaturii în fluidul vîscos care se mişcă pe planul înclinat este dată de formula

$$T(x, y) = T_w(x) H(x, y) = A e^{kx} H\left(\frac{y}{h}\right) \tag{27}$$

$$\text{dacă } T_w = A e^{kx}$$

unde A şi k sînt constante reale arbitrare ($A > 0$), iar H este funcţia dată de (26). Dacă se neglijează conductibilitatea termică longitudinală se va lua $\varepsilon = 0$ în expresiile funcţiilor H_1 şi H_2.

— Fluxul de căldură q_w care străbate în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă a planului înclinat este dat de formula (Fourier)

$$q_w = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = -\lambda\,\frac{T_w}{h}\left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right)_w = \lambda\,\frac{A}{h}\,\frac{H_1'(1)}{H_2'(1)}\,e^{kx} \tag{28}$$

(Intrat în redacţie la 10 martie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Schlichting, H., *Teoria pogranicinogo sloia*, I.I.L., Moskva, 1956, 268—271.
2. Oroveanu., T., *Mecanica fluidelor vîscoase*, Ed. Acad. R.S.R., 1967, 155—163.
3. Halimanovici, M. P., *Sbornik zadaci po teoret. mehanike*, Minsk, 1963, 55.
4. Brădeanu, P., *Mecanica fluidelor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1973, 533.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

(Резюме)

Авторы определяют распределение температуры и перенос тепла, при стационарном режиме, в тяжелой несжимаемой вязкой жидкости со свободной поверхностью, движущейся в виде слоя конечной толщины по наклонной плоскости.

Методом рядов решаются две граничные термические задачи, которые соответствуют постоянным и, соответственно, переменным температурам (в экспоненциальном виде) наклонной плоскости.

DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE DANS UN LIQUIDE EN MOUVEMENT SUR UN PLAN INCLINÉ

(Résumé)

On détermine la répartition de la température et le transfert de chaleur en régime stationnaire, dans un fluide visqueux incompressible lourd, à surface libre, qui est en mouvement, sous forme de couche d'épaisseur finie, sur un plan incliné.

On résout, par la méthode des séries, deux problèmes à la limite thermiques qui correspondent aux températures constantes et respectivement variables (sous forme exponentielle) du plan incliné.

CONVERGENȚA SOLUȚIEI ECUAȚIEI CU DIFERENȚE FINITE A STRATULUI LIMITĂ ÎN FORMA LUI MISES

DOINA BRĂDEANU

1. Ecuația cu diferențe finite a stratului limită laminar incompresibil în raport cu variabilele lui Mises. Ecuația stratului limită incompresibil în forma lui Mises a fost studiată cu ajutorul metodei diferențelor finite în mai multe lucrări [3], [5], [6].

Astfel, în lucrarea [3] se cercetează, prin metoda lui Fourier, stabilitatea metodei diferențelor finite pentru ecuația lui Mises cu referire la mișcarea de-a lungul unei plăci plane cu scurgere exterioară variabilă ($u_e = 1 - x$).

În lucrarea de față, folosind teoria ecuațiilor parabolice neliniare, se introduce o metodă elementară și relativ simplă în cadrul căreia se dau condiții de convergență pentru metoda diferențelor finite explicită cu patru puncte aplicată ecuației neliniare a stratului limită incompresibil laminar scrisă în raport cu variabilele lui Mises (x, ψ).

Studiul mișcării fluidului vîscos în domeniul $\overline{D}$ al stratului limită incompresibil, cu viteză exterioară variabilă, care se formează pe suprafețe curbe, se poate încadra în următoarea problemă la limită [2], [3]

$$\frac{\partial G}{\partial X} = \sqrt{U_{10}^2 - G}\,\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2} \tag{1}$$

$$G(x, 0) = U_{10}^2,\ G(X, \psi_\infty) = 0;\ [G(X_0, \psi) = G_0(\psi) \text{ funcție dată}] \tag{2}$$

unde

$$\overline{D} = \{X_0 \leqslant X \leqslant X_I, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \psi_\infty\}$$

$$x = LX,\ \overline{\psi} = \sqrt{\nu}\,\Psi = \sqrt{u_\infty L \nu}\,\psi,\ u_{10} = u_\infty U_{10}(X),\ U_{10}^2 \equiv V(X) \tag{3}$$

$$u_0 = u_\infty U = u_\infty \sqrt{U_{10}^2 - G(X, \psi)},\quad G \leqslant U_{10}^2 \tag{4}$$

$$(u_\infty = \text{const.},\ 0 \leqslant U \leqslant [V(X)]^{1/2},\ \psi_\infty = \psi(X, y = \delta))$$

unde s-au folosit următoarele **notații** :

x, $\overline{\psi}$, coordonatele lui Mises ale stratului limită (x se măsoară pe generatoarea corpului, $\overline{\psi}$ este funcția de curent)
ν, vîscozitatea cinematică a fluidului
u_∞, viteza constantă a fluidului la infinit (mişcarea principală a fluidului)
$u_{10}(x)$, viteza fluidului pe frontiera exterioară a stratului limită, funcție de x
$\delta(x)$, grosimea stratului limită
$u_0(x,\overline{\psi})$, proiecția vitezei fluidului din stratul limită pe axa x
L, o lungime caracteristică
ψ_∞, funcția de curent pe frontiera exterioară a stratului limită (funcție necunoscută de x).
$\overline{D}$, D, domeniu închis şi respectiv deschis în planul lui Mises (x, ψ)

Dacă derivata $\partial G/\partial X$ se înlocuieşte cu o diferență progresivă, iar derivata $\partial^2 G/\partial\psi^2$ printr-o diferență centrală de ordinul doi şi se notează cu $g_{i,j} \equiv g(X_i, \psi_j)$ valorile aproximative ale funcției $G(X_i, \psi_j) \equiv G_{i,j}$ în nodurile (X_i, ψ_j), atunci problema la limită (1) — (4) se transformă în următoarea problemă algebrică

$$g_{i+1,j} = g_{i,j} + \frac{\Delta X}{(\Delta\psi)^2}\sqrt{V_i - g_{i,j}}\,(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \qquad (5)$$

$$D_\Delta = \{X_i = X_0 + i\Delta X,\ \psi_j = j\Delta\psi\},\quad \Delta X = \frac{X_I - X_0}{I},\quad \Delta\psi = \frac{\psi_\infty}{J}$$

($V_i = V(X_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, I$; $j = 1, 2, \ldots, J-1$; I, J = numere întregi) cu condițiile la limită şi inițiale

$$g_{i,0} = V_i,\quad g_{i,J} = 0,\quad i = 1, 2, 3, \ldots, I \qquad (6)$$

$$g_{0,j} = G_{0,j} \text{ (valori date inițial)},\ j = 0, 1, 2, \ldots, J. \qquad (7)$$

care înseamnă determinarea funcției de rețea $g(X, \psi)$: se calculează valoarea $g_{i+1,j}$ în raport cu valorile $g_{i,j-1}$, $g_{i,j}$, $g_{i,j+1}$ cunoscute în secțiunea precedentă i. Desigur că valorile $g_{i,j}$ calculate, în acest mod, cu formula de recurență algebrică explicită cu patru puncte (5) trebuie să fie foarte apropiate de valorile funcției G. De aceea, apare în mod firesc problema comportării şi evaluării erorii de aproximație care se introduce prin înlocuirea ecuației cu derivate parțiale neliniare (1) prin ecuația cu diferențe finite (5). Studiul acestei erori se face sub titlul convergenței metodei diferențelor finite.

2. Convergența metodei diferențelor finite. Vom nota cu $G(X, \psi)$ soluția exactă a ecuației cu derivate parțiale (1) şi cu $g(X_i, \psi_j) \equiv g_{i,j}$ soluția exactă a ecuației cu diferențe finite (5). Folosind dezvoltarea în serie

Taylor se pot introduce formule îmbunătățite pentru exprimarea derivatelor, pe rețeaua D_Δ,

$$\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{i,j} \text{ și } \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}\right)_{i,j}$$

prin diferențe finite. Dacă se admite că funcția $G(X, \psi)$ aparține clasei $C^{2,4}$ care conține funcțiile cu derivate parțiale continue pînă la ordinul 2 în raport cu X și pînă la ordinul 4 (inclusiv) în raport cu ψ în domeniul D, atunci, ecuației (1) i se poate atașa următoarea ecuație cu diferențe finite explicită

$$\begin{gathered} G_{i+1,j} = G_{i,j} + \frac{\Delta X}{(\Delta\psi)^2}\sqrt{V_i - G_{i,j}}\,(G_{i,j+1} - 2G_{i,j} + G_{i,j-1}) + \\ + \frac{(\Delta X)^2}{2} G_{X^2}(\overline{X}_i, \psi_j) - \frac{\Delta X(\Delta\psi)^2}{12}\sqrt{V_i - G_{i,j}}\, G_{\psi^4}(X_i, \overline{\psi}_j) \\ (G \in C^{2,4};\ X_i < \overline{X}_i < X_{i+1};\ \psi_j < \overline{\psi}_j < \psi_{j+1}) \end{gathered} \tag{8}$$

Se introduce eroarea de aproximație $z_{i,j} = G_{i,j} - g_{i,j}$, o funcție de rețea definită pe un număr finit de puncte, și din scăderea ecuațiilor (8) și (5) se deduce următoarea ecuație algebrică pentru $z_{i+1,j}$

$$\begin{gathered} z_{i+1,j} = z_{i,j} + \frac{\Delta X}{(\Delta\psi)^2}\{\sqrt{V_i - G_{i,j}}\,(G_{i,j+1} - 2G_{i,j} + G_{i,j-1}) - \\ - \sqrt{V_i - g_{i,j}}\,(g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1})\} + \overset{\circ}{A}(X_i, \psi_j, \ldots) \end{gathered} \tag{9}$$

unde termenul A conține ultimii doi termeni din (8). În această ecuație avem

$$\sqrt{V_i - G_{i,j}} = [V_i - g_{i,j} - z_{i,j})^{1/2} = \sqrt{V_i - g_{i,j}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{z_{i,j}}{V_i - g_{i,j}} + \ldots\right).$$

Ecuația cu diferențe finite (9) se scrie, dacă se neglijează puterile erorii z, în forma următoare

$$\begin{gathered} z_{i+1,j} = z_{i,j+1}\, r\sqrt{V_i - g_{i,j}} + \\ + z_{i,j}\left[1 - r\left(2\sqrt{V_i - g_{i,j}} + \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j+1}}{2\sqrt{V_i - g_{i,j}}}\right)\right] + \\ + z_{i,j-1}\, r\sqrt{V_i - g_{i,j}} + A(X_i, \psi_j, \ldots.) \\ (r \equiv \Delta X/(\Delta\psi)^2) \end{gathered} \tag{10}$$

Se observă că suma coeficienților lui $z_{i,j+1}$, $z_{i,j}$, $z_{i,j-1}$ este egală cu

$$1 - r\frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{2\sqrt{V_i - g_{i,j}}} \cong 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial G}\right)_{i,j}\Delta X$$

unde F este membrul drept al ecuației (1), iar derivata este calculată pentru valori aproximative. În cazul ecuației propagării căldurii această sumă este egală cu unitatea.

Să vedem, în continuare, în ce condiții coeficienții ecuației (10) sînt nenegativi. Avem, semnul egal corespunde punctelor de pe suprafața corpului ($\psi = 0$).

$$V_i - g_{i,j} \geqslant 0, \quad r \geqslant 0$$

Presupunînd că coeficientul lui $z_{i,j}$ este nenegativ vom putea scrie condiția

$$r \leqslant \frac{2\sqrt{V_i - g_{i,j}}}{4V_i - 6g_{i,j} + g_{i,j+1} + g_{i,j-1}} = \frac{2U_{i,j}}{6U_{i,j}^2 - \left(U_{i,j+1}^2 + U_{i,j-1}^2\right)}$$
$$\left(U_{i,j} = \sqrt{V_i - g_{i,j}}, \quad r \geqslant 0\right) \tag{11}$$

dacă este îndeplinită condiția suplimentară

$$g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1} \geqslant 0 \tag{12}$$

Să presupunem că condițiile (11) — (12) sînt îndeplinite la fiecare pas al procesului de calcul.

Să fixăm indicele i (secțiunea X_i), să introducem mărimea K și norma $||z_i||$ a vectorului $z_i = \{z_{i,1}, z_{i,2}, \ldots . z_{i,j}\}$ cu formulele

$$||z_i|| = \max_{(j=0,1,2,\ldots,J)} |z_{i,j}| \tag{13}$$

$$K = \max_{(X_i, \psi_j) \in D_\Delta} \{|G_{X^3}(\overline{X}_i, \psi_j)|, |G_{\psi^4}(X_i, \overline{\psi}_j)|\}$$

În aceste condiții, luînd valorile absolute în ecuația (8), care are coeficienții nenegativi pe baza realizării la fiecare pas a condițiilor (11) — (12), avem

$$||z_{i+1}|| \leqslant \left(1 - r\frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{2\sqrt{V_i - g_{i,j}}}\right)||z_i|| + |A(X_i, \psi_j, \ldots)| \tag{14}$$

Se observă, de asemenea, că avem inegalitățile

$$|A| < \left|\frac{1}{2}(\Delta X)^2 K\right| + \left|\frac{1}{12}\Delta X(\Delta\psi)^2 \sqrt{V_i - G_{i,j}}\, K\right| < K\Delta X[(\Delta\psi)^2 + \Delta X]$$

$$(0 \leqslant \sqrt{V_i - G_{i,j}} \leqslant V_i \leqslant 1).$$

Datorită faptului că, în baza condițiilor (11)—(12), toți coeficienții din ecuația (10) sînt nenegativi, înseamnă că și coeficientul lui $||z_i||$ în (14) este pozitiv. De aceea, potrivit cu (12), putem majora coeficientul lui $||z_i||$, în (14), la unitate.

Vom putea, deci, scrie inegalitatea (14) în forma

$$||z_{i+1}|| \leqslant ||z_i|| + K[(\Delta X)^2 + (\Delta\psi)^2 \Delta X], \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

De aici, deoarece $||z_0|| = 0$ (valorile iniţiale nu sînt date de această metodă), deducem

$$||z_i|| = \max |G_{i,j} - g_{i,j}| \leqslant iK[(\Delta\psi)^2\Delta X + (\Delta X)^2]$$

adică

$$||z_i|| \leqslant K(X_\mathrm{I} - X_0)[(\Delta\psi)^2 + \Delta X], \quad i = 1, 2, \ldots \mathrm{I} \tag{16}$$

unde K este mărimea dată în formulele (13).

Concluzii şi observaţii. Teoria expusă mai sus conduce la rezultatele următoare:

Dacă,

1_0. funcţia $G(X, \psi) \in C^{2,4}$ şi satisface ecuaţia (1)—(2) în D,

2_0. funcţia g satisface ecuaţia cu diferenţe finite (5) şi condiţiile (6)—(7) în $\overline{D}_\Delta$,

3_0. condiţiile (11)—(12) sînt verificate în fiecare nod (X_i, ψ_j) al reţelei $D_\Delta = \{X_0 < X_i \leqslant X_\mathrm{I}, 0 < \psi_j < \psi_\infty\}$,

4_0. coeficientul derivatei G_{ψ^2} în ecuaţia (1), este pozitiv, atunci, în D, metoda diferenţelor finite, în formă explicită, pentru problema la limită (1)—(2) este convergentă: soluţiile ecuaţiei cu diferenţe (5) converg către soluţiile ecuaţiei cu derivate parţiale (1), eroarea satisfăcînd inegalitatea (16) pentru creşterile mici ΔX şi $\Delta\psi$.

Inegalitatea (16) arată că pasul ΔX trebuie să fie cu mult mai mic decît pasul $\Delta\psi$ pentru ca eroarea de aproximaţie să fie mică.

Avînd în vedere condiţiile 1_0—4_0 se pot face următoarele observaţii:

a) Condiţia 4_0 nu este verificată peste tot în $\overline{D}$ deoarece pe suprafaţa corpului ($\psi = 0$) avem $(U_{10}^2 - G)^{1/2} = 0$.

b) Condiţia 1_0 nu este, de asemenea, verificată în domeniul închis $\overline{D}$ pentru că pe corp ($U = 0$) considerînd $U_{10} \not\equiv$ const., avem

$$G_X = 2U_{10}U'_{10} \neq 0 \text{ pentru } \psi = 0 \text{ şi, deci, } \frac{\partial^2 G}{\partial\psi^2} \to \infty \text{ pt. } \psi \to 0$$

Acest rezultat reprezintă singularitatea ecuaţiei lui Mises, sesizată de Görtler.

c) Condiţia (12) trebuie pusă în legătură cu semnul derivatei $\dfrac{\partial^2 G}{\partial\psi^2}$ sau a derivatei $\partial G/\partial X$. În regiunea în care $\partial G/\partial X < 0$ condiţia de convergenţă nu mai este îndeplinită.

Din aceste observaţii rezultă că metoda diferenţelor finite nu este aplicabilă ecuaţiei lui Mises în domeniul din imediata apropiere a suprafeţei corpului în jurul căruia se mişcă fluidul. Din această cauză (prin urmare, şi din punctul de vedere al convergenţei) domeniul de integrare numerică prin metoda diferenţelor în formă explicită a ecuaţiei lui Misse se împarte în trei regiuni: ① regiunea din vecinătatea corpului, ② regiunea interioară stratului limită şi ③ regiunea punctului de la infinit. La aceste regiuni trebuie adăugată, de fapt, şi secţiunea iniţială în care soluţia se presupune calculată cu alte metode.

Alte observaţii. În lucrarea [3] se deduce pentru stabilitatea ecuaţiei (5) condiţia

$$r \leqslant E_2 = 4U_{i,j}/(10U_{i,j}^2 - U_{i,j+1}^2 - U_{i,j-1}^2)$$

Dacă notăm cu E_1 expresia din dreapta din (11), atunci, avem

$$E_1 - E_2 = \frac{2U_{i,j}}{N}(U_{i,j+1}^2 + U_{i,j-1}^2 - 2U_{i,j}^2), \quad (E_1, E_2 > 0) \qquad (17)$$

unde N este numitorul comun al fracţiilor E_1 şi E_2. Avînd inegalităţile

$$0 < U_{i,j-1} < U_{i,j} < U_{i,j+1} < 1$$

rezultă că avem şi

$$U_{i,j+1}^2 + U_{i,j-1}^2 < 1 + 2U_{i,j+1}U_{i,j-1} < 3$$

Dacă admitem că $E_1 - E_2 > 0$, atunci, din (17) primim inegalitatea

$$2U_{i,j}^2 < U_{i,j+1}^2 + U_{i,j-1}^2 < 3 \text{ sau } U_{i,j} < 1{,}22 \qquad (18)$$

care este satisfăcută de $U_{i,j} < 1$ şi] care dovedeşte că ipoteza $E_1 > E_2$ este adevărată. Acest rezultat poate fi pus în legătură cu teoremele de echivalenţă relative la convergenţa şi stabilitatea ecuaţiilor cu diferenţe finite de tip parabolic (F. John, Lax şi alţii). Se constată că avem $E_1, E_2 \to \frac{1}{2U_{10}}$ pentru $\psi \to \infty$.

(Intrat în redacţie la 20 martie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Schlichting, H., *Grenzschicht-Theorie*, Karlsruhe, 1951, sau trad. în l. rusă: *Teoria pogran. sloia*, I.I.L., Moskva, 1956.
2. Oroveanu, T., *Mecanica fluidelor vîscoase*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1967.
3. Mitchell, A. R. and Thomson, J. Y., *Finite Differance Methods of Solution of the von Mises Boundary Layer Equation with Special Reference to Conditions near a Singularity*, Zeit. fur Angew. Math. und Physik, **9**, 1958 (traducere în Mehanika, **4**, 1959, 45—53).
4. Jim Douglas Jr., *A Survey of Numerical Methods for Parabolic Differential Equations*, Advances in Computers, **2**, edited by F. L. Alt, Academic Press, New-York, 1961.
5. Dîşco, A. L., *Reşenie uravnenia Misesa teorii pogranicinogo sloia*, Vîcislitelnaia Matematika, nr. 7, 1961.
6. Sennikov, V. V., *Unele metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor stratului limită*, în l. rusă, în culeg. *Cislenniie metodî reşenia zad. mehaniki sploş. sred*, Trudî vîcisl. ţentra Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1969.

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ФОРМЕ МИЗЕСА

(Резюме)

Изучается сходимость решения явного уравнения с конечными разностями Мизеса из теории пограничного слоя. Вычисляется погрешность приближения и выводятся условия и область сходимости решения.

CONVERGENCE DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION À DIFFÉRENCES FINIES DE LA COUCHE LIMITE DANS LA FORME DE MISES

(Résumé)

Le travail étudie la convergence de la solution de l'équation à différences finies explicite de Mises de la théorie de la couche limite. On évalue l'erreur d'approximation et l'on déduit les conditions et le domaine de convergence de la solution.

ELLIPSOID-ELLIPSOID MODEL FOR THE INTERPRETATION OF THE LIGHT CURVES OF THE CLOSE BINARY SYSTEMS (VII)

Recurrence formulae for the functions $D_k^j(x)$*

VASILE URECHE

In the previous papers [5] (hereafter these papers will be called ,,Paper I'', ,,Paper II'', ..., ,,Paper VI'' respectively), we have elaborated a method for the interpretation of the light curves of the close binary systems. By this method the close binary system components are approximated by two nonsimilar ellipsoids. The semiaxes $a > b > c$ of the ellipsoids are connected by the relations (Paper I)

$$a = b\left\{1 + \frac{3}{2} w^{(2)}\right\}, \quad c = \left\{1 \quad \frac{1}{2} v^{(2)}\right\}, \tag{1}$$

where (in the case of the Roche model)

$$w^{(2)} = qb^3, \quad v^{(2)} = (1 + q)b^3, \tag{3}$$

represent respectively the tidal distortion coefficient and the rotational distortion coefficient of the considered component, while $q = \mathfrak{M}'/\mathfrak{M}$ is the mass ratio.

The projections of the components on the plane perpendicular to the line of sight represent two ellipses, having the equations (Paper II)

$$\begin{gathered}\{1 - n_2^2 v^{(2)}\} x^2 + 2n_1 n_2 v^{(2)} xy + \{1 + 3l_1^2 w^{(2)} - n_1^2 v^{(2)}\} y^2 - \\ - b^2 \{1 + 3l_1^2 w^{(2)} - (n_1^2 + n_2^2) v^{(2)}\} = 0\end{gathered} \tag{3}$$

— for the primary component (which is eclipsed in the primary minimum), and

$$\begin{gathered}\{1 - n_2^2 v'^{(2)}\}(l_1 - x)^2 - 2n_1 n_2 v'^{(2)}(l_1 - x)y + \{1 + 3l_1^2 w'^{(2)} - n_1^2 v'^{(2)}\} y^2 - \\ - b'^2\{1 + 3l_1^2 w'^{(2)} - (n_1^2 + n_2^2) v'^{(2)}\} = 0\end{gathered} \tag{4}$$

* The results of this paper hav been presented at the scientific Session of the University in April, 1972.

— for the secondary component (which eclipses in the primary minimum). Here the quantities l_j, n_j(j $= 1, 2, 3$) have the significance of some direction cosines [2], being functions of phase angle ψ (that is of time) and of angle i (the inclination of the orbital plane to the celestial sphere).

The loss of the light $\Delta L(\psi)$ during an eclipse is given by the equation

$$\Delta L(\psi) = \iint\limits_{\Sigma} J \cos \gamma \; d\sigma, \tag{5}$$

where Σ is that region from the visible „hemisphere'' of the considered component which is eclipsed at a given moment, J is the apparent surface brightening in a point of the considered star in which the surface normal forms the angle γ with the line of sight and $d\sigma$ is the element of the surface.

Considering that in the distribution of the brightening on the apparent disk, the limb-darkening is described by the linear cosine law, and the gravity-darkening by von Zeipel's theorem [3, 4], then we have

$$J = H_0 \left\{ 1 + \tau \frac{g - g_0}{g_0} \right\} (1 - u + u \cos \gamma), \tag{6}$$

where u is the limb-darkening coefficient, τ is the gravity-darkening coefficient, g is the gravity acceleration in the considered point, g_0 is the mean gravity acceleration on the component surface and H_0 is the surface brightening in the normal direction, in the point where $g = g_0$.

The expressions for $(g - g_0)/g_0$ and $\cos \gamma$, depending on the coordinates of the corresponding point of the star surface, are given in Paper III. Using these expressions and the distribution of the brightening (6), the computation of the integral (5) is reduced to the computation of some double integrals of the form

$$\iint\limits_{D} Z^k y^j \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y\,; \qquad j,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,; \tag{7}$$

where the integration domain D is the projection of the region Σ on the plane perpendicular to the line of sight (fig. 1; the axes are directed as in Paper II), and

$$Z = (C_1 b^2 - C_2 x^2 - 2C_3 xy - C_4 y^2)^{1/2}. \tag{8}$$

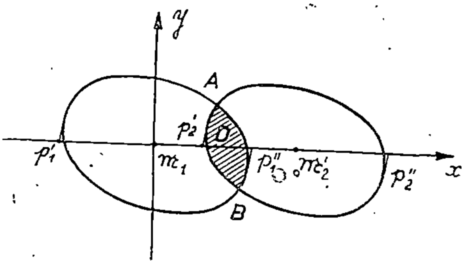


Fig. 1.

The quatities C_1, C_2, C_3, C_4, being functions of time, have the expressions

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 1 + 3w^{(2)} l_3^2 - v^{(2)} n_3^2 \\ C_2 &= 1 - 3w^{(2)} (l_1^2 - l_3^2) + v^{(2)} (n_1^2 - n_3^2) \\ C_3 &= v^{(2)} n_1 n_2 \\ C_4 &= 1 + 3w^{(2)} l_3^2 - v^{(2)} (n_3^2 - n_2^2) \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Noting

$$I_k^j(x, y) = \frac{1}{\pi b^{j+k+2}} \int Z^k y^j \, \mathrm{d}y \qquad (10)$$

and introducing the „difference functions" $D_k^j(x)$, defined by the author so

$$D_k^j(x) = I_k^j[x, y_2(x)] - I_k^j[x, y_1(x)], \qquad (11)$$

where $y_1(x)$, $y_2(x)$ are the integration limits with respect to y; the computation of the integrals of the form (7) (that is of the integral (5)) is reduced to the computation of some simple definite integrals from the functions $D_k^j(x)$, between certain well determined integration limits x_1 x_2. In Paper III the explicit expressions for $\Delta L(\psi)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, x_1, x_2 are given.

In the following we wish to establish some recurrence formulae which will allow computing the functions $D_k^j(x)$ for any pair of the values, j, $k = 0, 1, 2, \ldots$ For this purpose we make the substitution

$$C_4^{1/2} y = (C_1 b^2 - C_2 x^2)^{1/2} \sin \chi - C_3 x. \qquad (12)$$

The expressions (9) show that the coefficients C_1, C_2 and C_4 are of the order of unity, while the coefficient C_3 is small, (of the order of the distortion coefficients). On the other hand — excepting the integrals from the functions $D_0^0(x)$ and $D_1^0(x)$ — the integrals from the functions $D_k^j(x)$ enter (5) only in the small terms, which are proportional to the distortion coefficients $w^{(2)}$ and $v^{(2)}$. Therefore in the development of y^j from the integral (10), we can retain only the main term:

$$\frac{1}{C_4^{j/2}} (C_1 b^2 - C_2 x^2)^{j/2} \sin^j \chi. \qquad (13)$$

Then — excepting the integrals $I_0^0(x, y)$, $I_1^0(x, y)$ which enter the functions $D_0^0(x)$, $D_1^0(x)$ and which will be computed separately — from (10) and (12) we obtain

$$I_k^j(x, \chi) = \frac{1}{\pi b^{j+k+2} C_4^{\frac{j+1}{2}}} (C_1 b^2 - C_2 x^2)^{\frac{j+k+1}{2}} \mathcal{J}_{k+1}^j(\chi), \qquad (14)$$

where

$$\mathcal{J}_k^j(\chi) = \int \cos^k \chi \sin \chi^j \, \mathrm{d}\chi. \qquad (15)$$

For the computation of the integral (15) there are different recurrence formulae [1]. So we can write

$$\mathcal{J}_k^j(\chi) = -\frac{\sin^{j-1} \chi \cos^{k+1} \chi}{j + k} + \frac{j-1}{j+k} \mathcal{J}_k^{j-2}(\chi)$$
$$j, \; k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (16)^*$$

* This formula allows diminishing the degree of the sinus. We can also write an analogous formula which allows diminishing the degree of the cosinus. There are also other equivalent recurrence formulae for the integral (15).

In order to obtain from (16) explicit formulae we shall consider the following cases:

Case I: $j = 2p$. Applying successively the formulae (16), the computation of the integral $\mathcal{J}_k^{2p}(\chi)$ is reduced to the computation of the integral $\mathcal{J}_k^0(\chi)$, which satisfies the well known recurrence formula

$$\mathcal{J}_k^0(\chi) = \frac{\cos^{k-1}\chi \sin\chi}{k} + \frac{k-1}{k}\mathcal{J}_{k-2}^0(\chi). \tag{17}$$

The expression of $\mathcal{J}_k^0(\chi)$ depend on k being even or odd. Therefore we shall consider the undercases:

Undercase I.1: $k = 2q$. The formulae (16), (17) lead to

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{2q}^{2p}(\chi) = &-\frac{\cos^{2q+1}\chi}{2p+2q}\Bigg\{\sin^{2p-1}\chi + \\ &+\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(2p-1)(2p-3)\ldots(2p-2s+1)}{(2p+2q-2)(2p+2q-4)\ldots(2p+2q-2s)}\sin^{2p-2s-1}\chi\Bigg\} + \\ &+\frac{(2p-1)!!}{(2p+2q)(2p+2q-2)\ldots(2q+2)}\Bigg\{\frac{\sin\chi}{2q}\Bigg[\cos^{2q-1}\chi + \\ &+\sum_{s=1}^{q-1}\frac{(2q-1)(2q-3)\ldots(2q-2s+1)}{2^s(q-1)(q-2)\ldots(q-s)}\cos^{2q-2s-1}\chi\Bigg] + \frac{(2q-1)!!}{2^q q!}\chi\Bigg\};\end{aligned} \tag{18}$$

$$p,\ q = 0, 1, 2, \ldots .$$

Undercase I.2: $k = 2q + 1$. From (16) and (17) we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{2q+1}^{2p}(\chi) = &-\frac{\cos^{2q+2}\chi}{2p+2q+1}\Bigg\{\sin^{2p-1}\chi + \\ &+\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(2p-1)(2p-3)\ldots(2p-2s+1)}{(2p+2q-1)(2p+2q-3)\ldots(2p+2q-2s+1)}\sin^{2p-2s-1}\chi\Bigg\} + \\ &+\frac{(2p-1)!!}{(2p+2q+1)(2p+2q-1)\ldots(2q+3)}\Bigg\{\frac{\sin\chi}{2q+1}\Bigg[\cos^{2q}\chi + \\ &+\sum_{s=0}^{q-1}\frac{2^{s+1}q(q-1)\ldots(q-s)}{2q-1)(2q-3)\ldots(2q-2s-1)}\cos^{2q-2s-2}\chi\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{19}$$

$$p,\ q = 0, 1, 2, \ldots .$$

Case II: $j = 2p + 1$. Using successively the formula (16), the computation of the integral $\mathcal{J}^{2p+1}(\chi)$ is reduced to the computation of the integral $\mathcal{J}_k^1(\chi)$, which has the expression

$$\mathcal{J}_k^1(\chi) = -\frac{\cos^{k+1}\chi}{k+1} \tag{20}$$

The formulae (16) and (20) give

$$\mathcal{J}_k^{2p+1}(\chi) = -\frac{\cos^{k+1}\chi}{2p+k+1}\Big\{\sin^{2p}\chi + \\ + \sum_{s=1}^{p}\frac{2^s p(p-1)\dots(p-s+1)}{(2p+k-1)(2p+k-3)\dots(2p+k-2s+1)}\sin^{2p-2s}\chi\Big\} \tag{21}$$

$$p, k = 0, 1, 2, \dots$$

Having the expressions of the functions $\mathcal{J}_k^j(\chi)$ in accordance with the formulae (18), (19) and (21), from (14) we obtain the functions $I_k^j(x, \chi)$. Coming back from χ to y, with equation (12), we obtain the functions $I_k^j(x, y)$ Further, with (11) the functions $D_k^j(x)$ will be obtained and with the help of these functions the theoretical light curve can be computed.

For the integrals $I_0^0(x, y)$ and $I_1^0(x, y)$ from (10) we have directly

$$I_0^0(x, y) = \frac{1}{\pi b^2}\, y, \tag{22}$$

$$I_1^0(x, y) = \frac{1}{2\pi b^3 C_4^{1/2}}\Big\{(C_1 b^2 - C_2 x^2)\arcsin\frac{C_4^{1/2} y + C_3 x}{(C_1 b^2 - C_2 x^2)^{1/2}} + \\ + (C_4^{1/2} y + C_3 x)(C_1 b^2 - C_2 x^2 - 2C_3 xy - C_4 y^2)^{1/2}\Big\}. \tag{23}$$

The computations effected by the author for the eclipsing binary star *AI Draconis* (Paper VI) show that the function $D_k^0(x)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ have the main contribution in the theoretical light curve computation. These functions will be computed with the help of the integrals $\mathcal{J}_k^0(\chi)$, which can be put in the form [1]

$$\mathcal{J}_{2q}^0(\chi) = \frac{1}{2^{2q}}\binom{2q}{q}\chi + \frac{1}{2^{2q-1}}\sum_{s=0}^{q-1}\binom{2q}{s}\frac{\sin(2q-2s)\chi}{2q-2s}, \tag{27}$$

respectively

$$\mathcal{J}_{2q+1}^0(\chi) = \frac{1}{2^{2q}}\sum_{s=0}^{q}\binom{2q+1}{s}\frac{\sin(2q-2s+1)\chi}{2q-2s+1}. \tag{25}$$

The formulae obtained in this paper will be useful for the theoretical light curve computations and for the determinations of the elements of the close binary systems.

(Received March 10, 1973)

REFERENCES

1. Gradstein, I. S., Ryzhik, I. M., *Tablitsy integralov, summ, readov i proizvedenii*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, Moskva, 1962.
2. Horak, T., *New elements of eclipsing variable UX Herculis*, Bull. Astr. Inst. Czech., **17**, No. 1, 1966, 27.
3. Kopal, Z., *An Introduction to the Study of Eclipsing Variables*, Cambridge, 1946.
4. Kopal, Z., *Close Binary Systems*, Chapman and Hall, London, 1959.
5. Ureche, V., *Contributions to the interpretation of the light curves of the close binary systems. I. The form of the components*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Phys., f. 1, 1969, 73; *II. The projections of the components on the plane perpendicular to the line of sight*, Studii şi Cercetări de Astronomie, **14**, No. 1, 1969, 53; *III. The loss of the light during the eclipses*, Bull. Astr. Inst. Czech., **20**, No. 6, 1969, 312; *IV. The ellipticity effect and the reflection effect*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech., f.2, 1970, 67; *V. The theoretical light curve and the method of element determination*, Studii şi Cercetări de Astronomie, **15**, No. 1, 1970, 9; *VI. Aplication for the eclipsing variable star AI Draconis*, Studii şi Cercetări de Astronomie, **15**, No. 2, 1970, 187.

MODELUL ELIPSOID-ELIPSOID PENTRU INTERPRETAREA CURBELOR DE LUMINĂ ALE SISTEMELOR BINARE STRÎNSE (VII)

Formule de recurenţă pentru funcţiile $D_k^j(x)$

(Rezumat)

În modelul elipsoid-elipsoid de interpretare a curbelor de lumină ale sistemelor binare strînse considerat de autor [5] calculul curbei teoretice de lumină revine la integrarea funcţiilor $D_k^j(x)$ definite în [5. III]. În lucrarea de faţă se dau pentru aceste funcţii formulele de recurenţă şi expresii explicite, valabile pentru orice indici j şi k.

Rezultatele obţinute sînt utile pentru calculul curbei teoretice de lumină şi pentru determinarea elementelor sistemelor binare strînse.

МОДЕЛЬ ЭЛЛИПСОИД-ЭЛЛИПСОИД ДЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КРИВЫХ БЛЕСКА ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ (VII)

Формулы рекуррентности для функций $D_k^j(x)$

(Резюме)

В рассматриваемой автором модели эллипсоид-эллипсоид для интерпретации кривых тесных двойных систем [5] вычисление теоретической кривой блеска сводится к интегрированию функций $D_k^j(x)$ определенных в [5.III]. В настоящей работе даются для этих функций формулы рекуррентности и явные выражения, справедливые для любых показателей j и k.

Полученные результаты полезны для вычисления теоретической кривой блеска, а также для определения элементов тесных двойных систем.

RECENZII

Pierre-Jean Laurent, **Approximation et optimisation,** Collection Enseignement des Sciences, XIII, Hermann, Paris, 1972.

Scopul acestei cărţi este de a face un studiu unitar al problemelor de optimizare şi aproximare convexă. Ea se adresează specialiştilor în matematici aplicate şi interesează în egală măsură şi pe inginerii care vor să se specializeze în domeniul optimizării.

Cartea cuprinde două părţi. Prima parte (Capitolele I—V) presupune cunoscute noţiunile şi proprietăţile cele mai elementare ale spaţiilor liniare normate, ale spaţiilor Hilbert, ale aplicaţiilor liniare şi continue, precum şi a noţiunilor de bază ale topologiei (mulţimi compacte, complete, etc). Deşi obiectivul principal este de a da rezultatele cele mai importante din teoria aproximării şi optimizării, aceste prime cinci capitole pot de asemenea fi considerate ca o ilustrare a cîtorva teoreme de bază ale analizei funcţionale, cum ar fi: teoremele de separaţie şi prelungire ale lui Hahn-Banach, teorema de homomorfism a lui Banach, teorema de mărginire uniformă a lui Banach-Steinhaus, etc.

Capitolul I este consacrat caracterizării minimului unei funcţionale definită pe o parte a unui spaţiu liniar normat. Se foloseşte pentru aceasta o metodă geometrică ce utilizează noţiunea de con de deplasări admisibile.

Capitolele II şi III furnizează două exemple importante de aplicare a acestei metode: pe de o parte pentru caracterizarea celei mai bune aproximaţii într-un spaţiu Hilbert, pe de altă parte pentru obţinerea pe cale naturală a teoremelor lui Kolmogorov şi Cebîşev de aproximare uniformă a funcţiilor continue pe un compact.

Capitolul IV dă o prezentare generală şi destul de completă a teoriei funcţiilor spline a căror utilizare este în prezent răspîndită în toate domeniile ştiinţifice.

În sfîrşit, Capitolul V este consacrat studiului convergenţei aproximaţiilor de tip Fourier, interpolări, extrapolări sau cuadraturi.

În partea a doua a lucrării (Capitolele VI—IX) se studiază probleme de aproximare şi optimizare utilizînd sistematic teoria funcţiilor convexe.

După prezentarea în Capitolul VI a noţiunilor de bază (polară şi subdiferenţiala unei funcţionale), se dă în Capitolul VII o teorie generală a dualităţii în optimizarea convexă. Fiecărei familii de perturbaţii a problemei iniţiale i se ataşează o problemă duală. Această nouă metodă este extrem de fecundă şi pune într-o nouă lumină studiul problemelor de optimizare convexă. Ea are numeroase aplicaţii teoretice şi practice.

Ultimele două capitole constituie două ilustrări importante a teoriei dezvoltate în Capitolul VII: problemele de cea mai bună aproximaţie pe un convex, cu o generalizare a algoritmului lui Rémès şi problemele funcţiilor spline pe o mulţime convexă.

Lucrarea se termină cu o bibliografie completă (545 de referinţe) şi cu un index terminologic.

GH. MICULA

R i c h a r d   S. V a r g a, **Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis** (*Regional Conference Series in Applied Mathematics* 3), SIAM publications, 1972, 76 pp.

Scopul acestei cărți este de a face o scurtă sinteză a numeroaselor lucrări care au apărut în ultimii ani asupra aproximării soluțiilor problemelor la limită eliptice, îndeosebi prin metode variaționale și metode ale elementului finit. Autorul aplică în mod sistematic metode ale analizei funcționale și ale teoriei aproximării în domeniul analizei numerice.

Interesul primar al cărții este studiul metodelor numerice pentru rezolvarea problemelor la limită eliptice, dar conține și rezultate cu privire la ecuații de tip parabolic, probleme de valori proprii, probleme cu valori inițiale, etc.

Cartea conține o prefață și următoarele capitole: 1. L-spline. 2. Generalizări pentru L-spline. 3. Interpolarea și aproximarea cu funcții segmentar polinomiale în mai multe dimensiuni. 4. Metoda Ritz-Galerkin-Rayleigh pentru probleme la limită neliniare. 5. Analiză Fourier. 6. Metoda celor mai mici pătrate. 7. Probleme de valori proprii. 8. Probleme parabolice. 9. Aproximări semidiscrete de tip Cebîșev pentru probleme parabolice liniare.

Fiecare capitol este succedat de o bibliografie destul de completă.

Cartea este redactată cu multă claritate și rigurozitate și este deosebit de utilă celor care doresc să cunoască acest domeniu al analizei numerice.

GH. MICULA

Întreprinderea Poligrafică Cluj 713/1974

În cel de al XIX-lea an de apariție (1974) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—mecanică (2 fascicule);
fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—mineralogie (2 fascicule);
geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
sociologie;
științe economice (2 fascicule);
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XIX году издания (1974) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—механика (2 выпуска);
физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—минералогия (2 выпуска);
география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
социология;
экономические науки (2 выпуска);
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XIX-e année de publication (1974) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—mécanique (2 fascicules);
physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—minéralogie (2 fascicules);
géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sociologie;
sciences économiques (2 fascicules);
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

43 875