STUDIA

UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1962

CLUJ

În cel de al VII-lea an de apariţie (1962) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule;
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie—economie politică;
psihologie—pedagogie;
ştiinţe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На VII году издания (1962), *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия—политэкономия;
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur VII-me année de publication (1962) les *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie—économie politique;
psychologie-pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 2

1 9 6 2

C L U J

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI
ANUL VII 1962

Redacţia:
CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1
Telefon 34—50

SUMAR — TARTALOM

Cronică

СОДЕРЖАНИЕ

SOMMAIRE

ASUPRA UNOR INFRAPOLINOAME CONDIȚIONATE

de

I. MARUȘCIAC

1. În studiul polinoamelor de abatere minimă în diferite metrici se constată existența unor proprietăți comune ale polinoamelor care se abat cel mai puțin de la zero în aceste metrici. Printre aceste proprietăți amintim, de exemplu, proprietatea de apropiere față de mulțimea de definiție a zerourilor polinoamelor de abatere minimă și așa numita proprietate de „ortogonalitate" a acestora. De aceea s-a căutat să se definească o clasă mai largă de polinoame „minimale", care să înglobeze proprietățile cele mai importante ale polinoamelor de abatere minimă. Astfel s-a ajuns la noțiunea de infrapolinoame, care reprezintă tocmai o asemenea clasă. Această noțiune, după cum îmi este cunoscut, aparține lui M. Fekete, care în ultimii ani, împreună cu J. L. Walsh [2], a dat și anumite generalizări ale acesteia, definind infrapolinoame k-restrînse, adică infrapolinoame în clasa polinoamelor cu primii cîțiva coeficienți fixați.

În anul 1958 J. L. Walsh, într-o lucrare [5], definește o clasă de infrapolinoame restrînse, punînd restricții asupra ultimilor coeficienți.

Problema care se pune este de a se studia proprietățile infrapolinoamelor cu coeficienți fixați într-o ordine oarecare, „pe sărite". Or, rezultatele cunoscute nu se pot extinde și la acest caz, deoarece ele sînt bazate pe o anumită simetrie, care în acest caz dispare. De aceea ne-am gîndit să introducem o nouă definiție a infrapolinoamelor, mai largă, în care toți coeficienții polinomului să joace același rol. Această necesitate iese în evidență mai ales atunci cînd se consideră în loc de polinoame algebrice anumite combinații liniare de niște funcții continue liniar independente.

În cele ce urmează se definesc astfel de infrapolinoame și se dau o serie de proprietăți de care se bucură această clasă.

2. Fie K o mulțime compactă din planul z și

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

un polinom de grad cel mult n, ai cărui coeficienți a_i verifică relațiile

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k = 1$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots r \tag{2}$$

unde α_{ik} sînt numere complexe și rang$||\alpha_{ik}|| = r + 1$.

Vom spune că polinomul

$$B(z) \equiv b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n \not\equiv A(z)$$

este un *polinom adjunct* $r+1$ — *condiționat* a lui $A(z)$ pe mulțimea K, dacă

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r \tag{3}$$

$$B(z) = 0, \quad \text{dacă} \quad A(z) = 0, \quad z \in K \tag{4}$$

şi

$$|B(z)| < |A(z)|, \quad z \in K \quad \text{şi} \quad A(z) \neq 0. \tag{5}$$

Vom spune că $A(z)$ este un infrapolinom $r+1$ condiționat pe mulțimea K, dacă acesta nu admite nici un polinom adjunct $r+1$ — condiționat pe mulțimea K.

Pentru a dovedi *existența* a astfel de infrapolinoame e suficient să alegem din K $n-r$ puncte $\{z_\nu\}_{\nu=1}^{n-r}$ în aşa fel ca determinantul

$$\begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \ldots & \alpha_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r0} & \alpha_{r1} & \ldots & \alpha_{rn} \\ z_1^n & z_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n-r}^n & z_{n-r}^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

să fie diferit de zero şi să considerăm polinomul

$$A(z) \equiv (z - z_1) \ldots (z - z_{n-r})(c_0 z^r + c_1 z^{r-1} + \ldots + c_r) \equiv$$
$$\equiv (z^{n-r} + a_1' z^{n-r-1} + \ldots + a_{n-r}') \cdot (c_0 z^r + \ldots + c_r),$$

în care coeficienții $c_0, c_1, \ldots, c_r$ s-au determinat din egalitățile

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + c_0 a_1' \\ a_2 &= c_2 + c_1 a_1' + c_0 a_2' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= c_r a_{n-r}' \end{aligned} \tag{7}$$

în care $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se determină din condițiile (2) la care se adaugă

$$A(z_\nu) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-r.$$

Din ipoteza (6) rezultă că aceşti coeficienți sînt unic determinați. Ținînd cont de relațiile (7), condițiile (2) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} & c_0(\alpha_{i0} + \alpha_{i1} a_1' + \ldots + \alpha_{i,n-r}\, a_{n-r}') + \\ & c_1(\alpha_{i1} + \alpha_{i2} a_1' + \ldots + \alpha_{i,n-r+1}\, a_{n-r}') + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & c_r(\alpha_{ir} + \alpha_{i,r+1}\, a_1' + \ldots + \alpha_{in}\, a_{n-r}') = 1 \\ & \quad i = 0, 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{8}$$

care, notînd cu

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{i,j+1}\, a'_1 + \ldots + \alpha_{i,j+n-r}\, a'_{n-r} \qquad (9)$$
$$i, j = 0, 1, \ldots, r,$$

se scrie sub o formă analogă cu condiția (2) în care rolul numerelor α_{ik} îl joacă numerele β_{ik}

$$\sum_{k=0}^{r} \beta_{ik} c_k = 1, \quad i=0,1, \ldots, r \qquad (10)$$

Polinomul $A(z)$ astfel determinat este un infrapolinom $r + 1$-condiționat pe K. Într-adevăr, dacă $B(z)$ ar fi un polinom adjunct $r + 1$-condiționat a lui $A(z)$ pe K, acesta ar trebui să fie de forma

$$B(z) \equiv (z^{n-r} + a'_1 z^{n-r-1} + \ldots + a'_{n-r})(d_0 z^r + d_1 z^{r-1} + \ldots + d_r) \qquad (11)$$

deoarece conform condiției (4), trebuie să admită numerele $z_1, z_2, \ldots, z_{n-r}$ ca rădăcini.

Condiția (5) se scrie

$$\sum_{k=0}^{r} \beta_{ik} d_k = 1, \quad i=0,1, \ldots, r$$

care comparate cu (10) ne arată că $d_k = c_k$, $k = 0, \ldots, r$. Prin urmare $B(z) \equiv A(z)$ și deci $A(z)$ nu admite polinom adjunct $r + 1$ — condiționat pe K, adică este un infrapolinom $r + 1$-condiționat pe K.

Evident că orice polinom $A(z)$ ai căror coeficienți verifică relațiile (2) și cu toate rădăcinile pe K, este un infrapolinom pe K. Acest fenomen de apropiere a zerourilor de mulțimea K, după cum vom vedea, este caracteristic acestor infrapolinoame.

Polinoamele de abatere minimă în metricele:

I. $$||P_n(z)|| = \max_{z \in K} |P_n(z)|;$$

II. $$||P_n(z)|| = \max_{z \in K} [f(z)|P_n(z)|],$$

unde $f(z)$ este o funcție continuă și pozitivă pe K;

III. $$||P_n(z)|| = \left[\sum_{\nu=1}^{m} m_\nu |P_n(z_\nu)|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \; m_\nu > 0, \; \sum_{\nu=1}^{m} m_\nu = 1,$$

unde K este formată din m puncte $z_1, \ldots, z_m$;

IV. $$||P_n(z)|| = \left[\int_K |P_n(z)|^p |dz|\right]^{\frac{1}{p}},$$

cînd K este o curbă rectificabilă; condiționate sau nu, sînt și infrapolinoame la fel condiționate (adică cu aceleași restricții asupra coeficienților) pe mulțimea K. Să arătăm, acest lucru, de exemplu, în cazul metricei II.

Într-adevăr, dacă $P_n(z)$ este polinomul de abatere minimă în metrica II pe mulţimea K în clasa polinoamelor care verifică condiţia (2), adică

$$\max_{z \in K} [f(z)|P_n(z)|] = \inf_{(Q)} \max_{z \in K} [f(z)|Q_n(z)|]$$

atunci acesta nu admite nici un polinom adjunct $r+1$-condiţionat pe K, căci dacă $Q_n(z)$ ar fi un astfel de polinom, atunci din condiţia (4) ar rezulta

$$|Q_n(z)| < |P_n(z)|, \quad z \in K$$

şi evident

$$\max_{z \in K} [f(z)|Q_n(z)|] < \max_{z \in K} [f(z)|P_n(z)],$$

ceea ce contrazice faptul că $P_n(z)$ este polinomul de abatere minimă pe K în metrica II. La fel se poate face verificarea şi în cazul celorlalte metrici.

De asemenea clasa acestor infrapolinoame conţine toate celelalte clase de infrapolinoame restrînse considerate de autorii amintiţi. De exemplu, infrapolinoamele k-restrînse, definite de M. Fekete [2], se obţin aici dacă luăm în (2)

$$\alpha_{00} = 1, \alpha_{11} = \frac{1}{A_1}, \ldots, \alpha_{kk} = \frac{1}{A_k}, \text{ iar restul } \alpha_{ik} = 0.$$

3. Dăm acum cîteva proprietăţi mai importante de care se bucură aceste infrapolinoame.

TEOREMA 1. *Dacă $A(z)$ este un infrapolinom $r+1$-condiţionat pe K, atunci orice divizor al său de grad cel puţin $r+1$ este de asemenea un infrapolinom $r+1$ condiţionat pe K.*

Într-adevăr, fie

$$D(z) \equiv d_0 z^m + d_1 z^{m-1} + \ldots + d_m, \quad r+1 \leq m < n$$

un divizor al lui $A(z)$, adică $A(z) \equiv D(z) \cdot E(z)$, unde

$$E(z) = e_0 z^{n-m} + e_1 z^{n-m-1} + \ldots + e_{n-m}.$$

Atunci avem

$$\begin{aligned} a_0 &= d_0 e_0 \\ a_1 &= d_1 e_0 + d_0 e_1 \\ a_2 &= d_2 e_0 + d_1 e_1 + d_0 e_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= d_m e_{n-m} \end{aligned} \tag{12}$$

şi condiţia (2) implică condiţia

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_{ik} d_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r \tag{13}$$

unde β_{ik} au semnificaţia analogă cu (9),

$$\beta_{ik} = \alpha_{ik}\, e_0 + \alpha_{i,k+1}\, e_1 + \ldots + \alpha_{i,k+n-m}\, e_{n-m} \tag{14}$$
$$i = 0, 1, \ldots, r, \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Dacă $D(z)$ ar admite un polinom adjunct $\bar{D}(z)$ $r + 1$-condiţionat pe K, adică ai cărui coeficienţi $\bar{d}_k$ verifică condiţiile (13) şi în plus

$$\bar{D}(z) = 0, \text{ dacă } D(z) = 0, \quad z \in K, \tag{15}$$

$$|\bar{D}(z)| < |D(z)|, \quad z \in K, \quad D(z) \neq 0, \tag{16}$$

atunci ar rezulta că polinomul

$$B(z) \equiv E(z) \cdot \bar{D}(z) \tag{17}$$

este un polinom adjunct $r + 1$ — condiţionat pe K a lui $A(z)$, din

$$b_0 = \bar{d}_0 e_0$$
$$b_1 = \bar{d}_1 e_0 + \bar{d}_0 e_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n = \bar{d}_m e_{n-m}$$

şi din

$$\sum_{k=0}^{m} \beta_{ik}\, \bar{d}_k = 1, \quad i=0, 1, \ldots, r,$$

rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik}\, b_k = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, r.$$

Din (17) şi (15) reiese că dacă $A(z) \equiv D(z) \cdot E(z)$ se anulează pe K, atunci şi $B(z)$ se anulează, deci şi condiţia (4) este verificată.

De asemenea, ţinînd cont de (16), avem

$$|B(z)| = |E(z)| \cdot |\bar{D}(z)| < E(z)| \cdot |D(z)| = |A(z)|,$$

dacă $A(z) \neq 0$, $z \in K$.

În sfîrşit, deoarece $\bar{D}(z) \not\equiv D(z)$, rezultă că şi $B(z) \not\equiv A(z)$. Dar aceasta contrazice faptul că $A(z)$ este un infrapolinom $r + 1$-condiţionat pe K. Această contradicţie arată că nu există un asemenea $\bar{D}(z)$, şi deci polinomul $D(z)$, este un infrapolinom $r + 1$-condiţionat pe K.

Să considerăm acum un infrapolinom $r + 1$-condiţionat pe K şi care nu se anulează pe această mulţime şi

$$A^*(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k^*\, z^{n-k} \tag{18}$$

un polinom arbitrar ai cărui coeficienţi verifică relaţiile

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k^* = 0, \quad i=0,1,\ldots,r. \tag{19}$$

Atunci transformarea

$$w = \frac{A^*(z)}{A(z)} \tag{20}$$

transformă mulţimea compactă K într-o mulţime compactă K_{A^*}. Fie $\mathcal{K}_A{}^*$ învelitoarea convexă a lui K_{A^*}.

În general, pentru anumite polinoame $A^*(z)$ originea planului (w) poate să aparţină lui $\mathcal{K}_{A^*}$ iar pentru altele nu. Vom vedea că acest lucru este caracteristic infrapolinoamelor $r+1$-condiţionate pe K. În acest sens are loc

TEOREMA 2. *Un polinom $A(z)$ care verifică condiţia (2) şi care nu se anulează pe K, admite atunci şi numai atunci un polinom adjunct $r+1$-condiţionat pe K, cînd există cel puţin un polinom $A^*(z)$ ai cărui coeficienţi a_k^* verifică condiţiile (19), pentru care originea planului (w) nu aparţine mulţimii $\mathcal{K}_{A^*}$.*

Condiţia este *necesară*. Dacă $A(z)$ admite un polinom adjunct $r+1$-condiţionat pe K $B(z)$, atunci punînd

$$A^*(z) \equiv A(z) - B(z) \equiv a_0^* z^n + a_1^* z^{n-1} + \ldots + a_n^*$$

avem evident

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k^* = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r.$$

Acest polinom verifică inegalitatea

$$|A(z) + A^*(z)| > |A(z) - A^*(z)|,$$

oricare ar fi $z \in K$. Într-adevăr, avem

$$|A(z) + A^*(z)| = |2A(z) - B(z)| = |A(z)| \cdot \left|2 - \frac{B(z)}{A(z)}\right| \geqslant$$

$$\geqslant |A(z)| \cdot \left[2 - \left|\frac{B(z)}{A(z)}\right|\right] > |A(z)| > |B(z)| = |A(z) - A^*(z)|.$$

De aici, punînd $w = \dfrac{A^*(z)}{A(z)}$, avem

$$|1 - w| < |1 + w|, \quad w \in K_{A^*} \tag{21}$$

care ne arată că imaginile w ale punctelor $z \in K$ sînt conţinute în semiplanul drept al planului (w), ceea ce înseamnă că originea planului (w) nu e conţinută în $\mathcal{K}_{A^*}$.

Condiţia este *suficientă*, căci dacă există un polinom $A^*(z)$ pentru care învelitoarea $\mathcal{K}_{A^*}$ nu conţine originea, atunci reiese că există un număr complex α aşa încît să avem

$$|\alpha - w| < |\alpha + w|, \quad w \in K_{A^*} \tag{22}$$

sau

$$\left|\alpha - \frac{A^*(z)}{A(z)}\right| < \left|\alpha + \frac{A^*(z)}{A(z)}\right|, \quad z \in K \tag{23}$$

Considerăm polinomul

$$B(z) \equiv A(z) - \varepsilon e^{i\theta} \cdot \alpha A^*(z). \tag{24}$$

Vom arăta că putem găsi două numere pozitive ε şi θ aşa încît $B(z)$ să fie polinom adjunct $r+1$-condiţionat pe K a lui $A(z)$.

Astfel avem

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k - \varepsilon e^{i\theta}\alpha \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k^* = 1$$

$$|B(z)| = |A(z)| \cdot \left|1 - \varepsilon e^{i\theta}\alpha \frac{A^*(z)}{A(z)}\right| < |A(z)|,$$

căci putem găsi ε şi θ astfel încît

$$|1 - \varepsilon e^{i\theta} \alpha w| < 1.$$

În adevăr, avem

$$(1 - \varepsilon e^{i\theta} \alpha w)(1 - \varepsilon e^{-i\theta} \bar{\alpha} \bar{w}) = 1 - 2\varepsilon \mathcal{R}(\alpha e^{i\theta} w) + \varepsilon^2 |\alpha w|^2 < 1,$$

dacă

$$0 < \varepsilon \leq \min_{z \in K} \frac{2\mathcal{R}(\alpha e^{i\theta} w)}{|\alpha w|^2}$$

care e posibilă deoarece din (22) rezultă că se poate alege θ convenabil astfel ca $\mathcal{R}(\alpha e^{i\theta} w) > 0$, $w \in K_{A^*}$. (Pentru aceasta e suficient ca $\theta = -\arg \alpha$.)

Din teorema 2 rezultă imediat

TEOREMA 3. *Polinomul $A(z)$ care verifică condiţia* (2) *şi care nu se anulează pe K este infrapolinom $r+1$-condiţionat pe K, dacă şi numai dacă originea planului (w) este condiţionată în K, unde*

$$\mathcal{K} = \bigcap \mathcal{K}_{A^*},$$

iar $\mathcal{K}_{A^*}$ are semnificaţia de mai sus.

Într-adevăr, dacă $A(z)$ este un infrapolinom $r+1$ — condiţionat pe K, atunci din teorema 2 rezultă că pentru orice polinom $A^*(z)$ care verifică condiţiile (19) originea planului (w) este conţinută în $\mathcal{K}_{A^*}$. De aici, rezultă că aceasta e conţinută şi în $\mathcal{K}$. Invers, dacă originea planului (w) este conţinută în $\mathcal{K}$ rezultă că aceasta se află în toate mulţimile $\mathcal{K}_{A_*}$. Din teorema 2 rezultă că atunci polinomul $A(z)$ nu admite nici un polinom adjunct, deci este un infrapolinom $r+1$ — condiţionat.

Cu ajutorul acestei teoreme putem demonstra uşor o teoremă de bază, care caracterizează complet infrapolinoamele astfel definite.

TEOREMA 4. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca polinomul $A(z)$ care nu se anulează pe K (care conţine cel puţin $n-r+1$ puncte) şi care verifică condiţiile (2), să fie infrapolinom $r+1$ — condiţionat, este ca să existe m $(n-r+1 \leqslant m \leqslant 2n-2r+1)$ puncte $z_\nu \in K$ şi m numere pozitive λ_ν, astfel încît să avem*

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \frac{A^*(z_\nu)}{A(z_\nu)} = 0 \tag{25}$$

oricare ar fi polinomul $A^*(z)$ care verifică condiţia (19). Polinomul $A(z)$ este în acelaşi timp infrapolinom $r+1$ condiţionat şi pe mulţimea $\{z_\nu\}_{\nu=1}^{m}$.

Condiţia este *necesară*. Dacă $A(z)$ este un infrapolinom $r+1$-condiţionat şi care nu se anulează pe K, atunci din teorema 3 rezultă că originea planului (w) este conţinută în $\mathcal{K} = \bigcap \mathcal{K}_{A^*}$. Însă atunci există un sistem de m puncte $\{w_\nu\}_{\nu=1}^{m}$ $w_\nu \in \mathcal{K}$, imagini ale punctelor din K prin orice $A^*(z)$ şi m ,,mase'' pozitive λ_ν, astfel încît

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu w_\nu = 0 \tag{26}$$

Într-adevăr, dacă M sînt mulţimile formate din cel mult m puncte din K, atunci avem $\bigcup M = K$. Dacă notăm şi în acest caz cu M_{A^*} imaginea lui M prin transformarea (20), cu $\mathfrak{M}_{A^*}$ învelitoarea sa convexă şi $\mathfrak{M} = \bigcap \mathfrak{M}_{A^*}$, atunci rezultă că există cel puţin o mulţime M aşa ca $\mathfrak{M}$ să conţină originea planului (w) O_w, căci altfel dacă pentru orice M am avea $\mathfrak{M} \not\ni O_w$, ar rezulta că $\bigcup \mathfrak{M} \not\ni O_w$. Însă avem $\bigcup \mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$. În adevăr dacă $w \in \bigcup \mathfrak{M}$ rezultă că $w \in$ unui $\mathfrak{M}_{A^*}$ oricare ar fi $A^*(z)$. Dar $\mathfrak{M}_{A^*}$ este învelitoarea convexă a mulţimii M_{A^*} — imaginea mulţimii $M \subset K$, de unde rezultă că $\mathfrak{M}_{A^*} \subset \mathcal{K}_{A^*}$ pentru orice $A^*(z)$, deci $w \in \mathcal{K}$ şi incluziunea este demonstrată. Avem deci $\mathcal{K} \not\ni O_w$ care contrazice faptul că $A(z)$ este infrapolinom $r+1$-condiţionat pe K.

Astfel există o mulţime M formată din m puncte din K în aşa fel încît $\mathfrak{M} \ni O_w$ şi afirmaţia este demonstrată.

Înlocuind în (26) $w_\nu = \dfrac{A^*(z_\nu)}{A(z_\nu)}$, avem

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \frac{A^*(z_\nu)}{A(z_\nu)} = 0. \tag{27}$$

Deoarece (27) trebuie să aibă loc oricare ar fi $A^*(z)$, verificînd condiţiile (19), relaţia (27) trebuie să aibă loc pentru $n-r$ coeficienţi arbitrari ai lui $A^*(z)$. Astfel din (27) se obţin de fapt $n-r$ ecuaţii, iar dacă se egalează părţile reale şi cele imaginare primim $2(n-r)$ ecuaţii omogene care determină complet numerele λ_ν. Dacă $m > 2(n-r)+1$, atunci evident putem reduce numărul punctelor, căci putem scoate $2(n-r)$ din numere

λ_ν în funcţie de restul care pot lua valori arbitrare. Luîndu-le pe toate egale cu zero, cu excepţia unuia (toate nu pot fi egale cu zero căci ecuaţia este omogenă), obţinem numai $2(n - r) + 1$ valori λ_ν diferite de zero, iar restul egale cu zero. Lăsînd în mulţimea M numai punctele corespunzătoare acestor valori, evident că (27) va fi verificată pentru sistemul de numere $\{\lambda_\nu\}$, astfel determinat.

Deoarece evident originea O_w este conţinută şi în învelitoarea convexă $\mathfrak{M}$, rezultă că polinomul $A(z)$ este în acelaşi timp infrapolinom $r + 1$ — condiţionat şi pe mulţimea $M = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{m}$. Astfel necesitatea este complet demonstrată.

Înainte de a trece la demonstraţia suficienţei, să observăm că pentru ca (25) să aibă loc e suficient să avem

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \frac{z_\nu^{n-k}}{A(z_\nu)} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_{ik} \quad k=0,1, \ldots, r \tag{28}$$

căci dacă înmulţim cele $n+1$ egalităţi cu nişte coeficienţi a_k^* care verifică relaţiile (19), şi însumăm, membru cu membru, obţinem (27). Relaţia (28) este cu mult mai comodă pentru aplicaţii, pentru că nu conţine nimic arbitrar.

Să trecem acum la demonstraţia *suficienţei*. Dacă (27) are loc, atunci notînd ca şi pînă acum cu

$$w = \frac{A^*(z)}{A(z)}$$

avem

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu w_\nu = 0,$$

care arată că originea $O_w \in \mathfrak{M}_{A^*}$, unde $\mathfrak{M}_{A^*}$ este învelitoarea convexă a mulţimii $M_{A^*} = \{w_\nu^*\}$, oricare ar fi $A^*(z)$. Or, din teorema 3 rezultă că atunci $A(z)$ este un infrapolinom $r + 1$-condiţionat pe mulţimea $M = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{m}$, $w_\nu = \dfrac{A^*(z_\nu)}{A(z_\nu)}$. Deoarece însă cu atît mai mult O_w aparţine şi lui $\mathcal{K}$, rezultă că $A(z)$ este infrapolinom $r + 1$ —condiţionat şi pe K, şi suficienţa este demonstrată.

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra uşor o proprietate referitoare la localizarea zerourilor unui astfel de infrapolinom. Pentru aceasta să definim un polinom $B(z)$, care va juca un rol esenţial în cele ce urmează. Astfel, deoarece rangul matricei $\|\alpha_{ik}\|$ este egal cu $r + 1$, rezultă că există cel puţin un determinant de ordinul $r + 1$ diferit de zero. Fie acesta de exemplu

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \alpha_{0k_0} & \alpha_{0k_1} & \ldots & \alpha_{0k_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{rk_0} & \alpha_{rk_1} & \ldots & \alpha_{rk_r} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{29}$$

unde presupunem $0 \leqslant k_0 < k_1 < \ldots < k_r \leqslant n$.

Atunci definim un polinom

$$B(z) \equiv b_0 z^{k_r} + b_1 z^{k_{r-1}} + \ldots + b_r z^{k_0} + z^p \tag{30}$$

ai cărui coeficienţi b_k s-au determinat din condiţiile (19), iar p este cel mai mic număr întreg nenegativ, diferit de $n - k_0$, $n - k_1, \ldots, n - k_r$.

TEOREMA 10. *Dacă $A(z)$ este un infrapolinom $r + 1$ condiţionat şi care nu se anulează pe K (care conţine cel puţin $n - r + 1$ puncte), atunci φ_z fiind unghiul sub care se vede mulţimea K din punctul z, avem*

$$\varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} + \varphi_{\beta_1} + \varphi_{\beta_2} + \ldots + \varphi_{\beta_{k_r}} \geqslant \pi, \tag{31}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt rădăcinile lui $A(z)$, iar $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_r}$ rădăcinile polinomului $B(z)$ din (30).

Într-adevăr, dacă $A(z)$ este un infrapolinom $r + 1$ condiţionat şi care nu se anulează pe K, atunci din teorema 4 rezultă că există un sistem de puncte $\{z_\nu\}_{\nu=1}^m$ din K şi m numere pozitive λ_ν în aşa fel încît are loc (25), oricare ar fi polinomul $A^*(z)$ de grad cel mult n, ai cărui coeficienţi verifică condiţiile (19). În particular trebuie să aibă loc şi relaţia

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \frac{B(z_\nu)}{A(z_\nu)} = 0, \tag{32}$$

unde $B(z)$ este polinomul din (30), căci din felul cum s-a definit, coeficienţii săi b_k verifică evident condiţiile (19).

În cele ce urmează vom înţelege prin variaţia argumentului unei funcţii $f(z)$ pe mulţimea K, pe care o vom nota cu $[|\arg f(z)|]_K$ diferenţa dintre valoarea maximă şi minimă a lui $|\arg f(z)|$ cînd z parcurge mulţimea K, adică

$$[|\arg f(z)|]_K = \max_{z \in K} |\arg f(z)| - \min_{z \in K} |\arg f(z)|.$$

Atunci relaţia (31) arată că trebuie să avem

$$\left[\left|\arg \frac{B(z)}{A(z)}\right|\right]_M \geqslant \pi, \tag{33}$$

unde $M = \{z_\nu\}_{\nu=1}^m$. Însă avem evident

$$\left[\left|\arg \frac{B(z)}{A(z)}\right|\right]_M = [|\arg B(z) - \arg A(z)|]_M \leqslant$$

$$\leqslant [|\arg B(z)| + |\arg A(z)|]_M = [|\arg B(z)|]_M + [|\arg A(z)|]_M =$$

$$= [|\arg (z - \beta_1)|]_M + \ldots + [|\arg (z - \beta_{k_r})|]_M + [|\arg (z - \alpha_1)|]_M + \ldots$$

$$+ [|\arg (z - \alpha_n)|]_M = \varphi'_{\beta_1} + \ldots + \varphi'_{\beta_{k_r}} + \varphi'_{\alpha_1} + \ldots + \varphi'_{\alpha_n},$$

unde φ' înseamnă unghiul sub care se vede mulţimea M din punctul z.

Deoarece evident $\varphi'_z \leqslant \varphi_z$, pentru orice z, ţinînd cont de (33), avem

$$\varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} + \varphi_{\beta_1} + \ldots + \varphi_{\beta_{k_r}} \geqslant \pi,$$

şi teorema este demonstrată.

Din teorema 5 rezultă imediat ca nişte consecinţe o serie de rezultate cunoscute relative la infrapolinoame restrînse.

Astfel avem următoarea teoremă a lui Fekete—Zedek [4]:

TEOREMA 6. *Dacă* $A(z) \equiv z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_k z^{n-k} + a_{k+1} z^{n-k-1} + \ldots + a_n$ *este un infrapolinom k-restrîns pe mulţimea K, care conţine cel puţin* $n - k + 1$ *puncte şi care nu se anulează pe K, atunci pentru orice grupare de* $k + 1$ *rădăcini* $\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \ldots \alpha_{i_k}$, *avem*

$$\varphi_{\alpha_{i_0}} + \varphi_{\alpha_{i_1}} + \ldots + \varphi_{\alpha_{i_k}} \geqslant \pi. \tag{34}$$

Într-adevăr, luînd în (2) $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{ii} = \dfrac{1}{A_i}$, $i = 1, \ldots, k$, dacă $A_i \neq 0$ şi $\alpha_{i0} = 1$, $\alpha_{ii} = 1$, dacă $A_i = 0$, iar restul $\alpha_{ij} = 0$, obţinem infrapolinoamele k-restrînse, adică infrapolinoame în clasa polinoamelor cu primii $k + 1$ coeficienţi fixaţi. În acest caz determinantul (29) este

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{A_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_k},$$

dacă $A_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$ şi

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{A_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{A_2 \ldots A_k},$$

dacă, de exemplu $A_1 = 0$. Din ecuaţiile (19) se constată că în ambele cazuri coeficienţii polinomului $B(z)$ din (30) sînt toţi nuli, iar $p = 0$, căci aici $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, ..., $k_k = k$. Prin urmare polinomul $B(z)$ este de gradul zero

$$B(z) \equiv 1$$

Conform teoremei 5 avem deci

$$\varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} \geqslant \pi.$$

Însă, cum orice divizor $D(z)$ de gradul $k+1$ al lui $A(z)$ este tot un infrapolinom ,,la fel restrîns'', căci din (14) rezultă

$$\beta_{00} = 1, \ \beta_{01} = \ldots = \beta_{0,k+1} = 0,$$

$$\beta_{10} = \frac{c_1}{A_1}, \ \beta_{11} = \frac{1}{A_1}, \ \beta_{12} = \ldots = \beta_{1,k+1} = 0$$

$$\beta_{20} = \frac{c_2}{A_2}, \ \beta_{21} = \frac{c_1}{A_1}, \ \beta_{22} = \frac{1}{A_2}, \ \beta_{23} = \ldots = \beta_{2,k+1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_{k0} = \frac{c_k}{A_k}, \ \ldots, \ \beta_{kk} = \frac{1}{A_k}, \ \beta_{k,k+1} = 0.$$

iar din (19) rezultă că şi în acest caz polinomul $B(z) \equiv 1$ şi deci aplicînd teorema acestui infrapolinom obţinem

$$\varphi_{\alpha_0} + \varphi_{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{\alpha_k} \geqq \pi,$$

unde prin $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha$ s-au notat cele $k+1$ rădăcini ale acestui polinom. Cu aceasta teorema este demonstrată.

TEOREMA 7 (a lui W a l s h [5]). *Dacă* $A(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-k} z^k + A_{n-k+1} z^{k-1} + \ldots + A_n$ *este un infrapolinom cu primul şi ultimii* k *coeficienţi fixaţi, care nu se anulează pe* K *şi* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *sînt rădăcinile sale, atunci avem*

$$\varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} + k\varphi_0 \geqq \pi, \tag{35}$$

unde φ_0 *este unghiul sub care se vede mulţimea* K *din origine.*

Şi acest caz este conţinut în cazul nostru, căci e suficient să luăm în (2) $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{1n} = \frac{1}{A_n}$, $\alpha_{2,n-1} = \frac{1}{A_{n-1}}, \ldots, \alpha_{k,n-k+1} = \frac{1}{A_{n-k+1}}$, iar restul $\alpha_{ik} = 0$ [1]. Determinantul corespunzător este aici

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{A_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \frac{1}{A_{n-k+1}} & \ldots & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

[1] Dacă unul din numere $A_j = 0$, procedăm ca şi în cazul precedent.

Din condițiile (19) rezultă și în acest caz $b_0 = b_1 = \ldots = b_k = 0$, iar $p = k$, căci în acest caz $k_0 = 0$, $k_1 = n - k + 1$, $k_2 = n - k + 2$, $k_k = n$ și deci cel mai mic număr întreg pozitiv diferit de n, $k - 1$, $k - 2, \ldots, 0$ este k. Prin urmare

$$B(z) \equiv z^k.$$

Ținînd cont de forma polinomului $B(z)$ în acest caz, din teorema 5 rezultă nemijlocit teorema 7.

Cu ajutorul aceleeași teoreme 5 se poate da răspuns la problema localizării zerourilor unui infrapolinom în care au fost fixați anumiți coeficienți „pe sărite''. În acest sens are loc

TEOREMA 8. *Dacă $A(z)$ este un infrapolinom pe mulțimea K în clasa polinoamelor cu coeficienții $a_{k_0}, a_{k_1}, \ldots, a_{k_r}$ fixați care nu se anulează pe K și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt zerourile sale, atunci avem*

$$\varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} + p\varphi_0 \geqq \pi, \tag{36}$$

unde p este cel mai mic număr întreg nenegativ diferit de $n - k_0$, $n - k_1, \ldots, n - k_r$.

Într-adevăr, luînd în (2) $\alpha_{0k_0} = \frac{1}{a_{k_0}}$, $\alpha_{1k_1} = \frac{1}{a_{k_1}}, \ldots, \alpha_{rk_r} = \frac{1}{a_{k_r}}$, dacă $a_{kj} \neq 0$ și $\alpha_{ik_0} = \frac{1}{a_{k_0}}$, $\alpha_{kj} = 1$, dacă $a_{kj} = 0$, iar restul $\alpha_{ik} = 0$ (măcar un a_{kj} trebuie să fie diferit de zero, căci altfel infrapolinomul ar fi identic nul), se constată cu ușurință că și în acest caz

$$B(z) \equiv z^p,$$

unde p are semnificația din teoremă. Din formula polinomului $B(z)$ și teorema 5 rezultă imediat (36).

Este interesant de observat că termenul liber joacă un rol privilegiat, căci dacă a_n se fixează atunci $p \geqq 1$ și depinde de numărul coeficienților consecutivi fixați din urmă. Dacă însă a_n nu e fixat, atunci $p = 0$ totdeauna și nu depinde de ordinea în care s-au fixat restul coeficienților.

În cazul cînd avem o singură relație liniară, adică considerăm polinoamele $A(z)$ ai căror coeficienți verifică relația

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{0k} a_k = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} |\alpha_{0k}| \neq 0, \tag{2'}$$

teorema 3 se enunță sub următoarea formă

TEOREMA 9. *Dacă $A(z)$ este un infrapolinom 1-condiționat și care nu se anulează pe mulțimea K (mulțimea K conținînd cel puțin $n + 1$ puncte), atunci avem*

$$\varphi_{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} \geqq \begin{cases} \pi, & \text{dacă } \alpha_{0n} = 0 \\ \pi - \varphi_0, & \text{dacă } \alpha_{0n} \neq 0 \text{ și } \alpha_{0k} = 0,\ k = 0, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{37}$$

În adevăr, dacă $\alpha_{0n} = 0$, atunci neapărat există măcar un număr $\alpha_{0k_0} \neq 0$ şi deci $B(z) \equiv b_0 z^{k_0} + 1$. Din condiţia

$$\alpha_{0k_0} b_0 = 0,$$

rezultă $b_0 = 0$, şi deci $B(z) \equiv 1$, de unde rezultă prima parte a teoremei. Dacă $\alpha_{00} = \ldots = \alpha_{0,n-1} = 0$, atunci $B(z) \equiv z + b$ şi din $b\alpha_{0n} = 0$, rezultă $B(z) \equiv z$, iar de aici partea a doua a teoremei.

Teorema 9 conţine ca un caz particular cunoscuta teoremă a lui F e j é r [1], relativă la zerourile polinoamelor extremale nerestrînse.

Astfel, luînd $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{01} = \ldots = \alpha_{0n} = 0$, rezultă $a_0 = 1$, adică avem infrapolinoamele clasice cu primul coeficient normat. Acest caz înglobîndu-se în primul caz al teoremei 9, avem

$$\varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} \geqq \pi.$$

Însă, deoarece orice divizor al său de gradul întîi este tot un infrapolinom cu primul coeficient 1, avem $\varphi_{\alpha_i} \geqq \pi$, care constituie tocmai rezultatul lui F e j é r şi arată că rădăcinile unui infrapolinom clasic sînt conţinute în învelitoarea convexă închisă a mulţimii K.

Dacă luăm $\alpha_{00} = \ldots = \alpha_{0,n-1} = 0$, $\alpha_{0n} = \frac{1}{A_n}$, ceea ce înseamnă că am considerat infrapolinoamele cu termenul liber fixat, atunci pe baza teoremei 9 (partea 2-a), avem

$$\varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} + \ldots + \varphi_{\alpha_n} \geqq \pi - \varphi_0.$$

Însă, dacă $d_0 z + d_1$ este un divizor al lui $A(z)$ 1-condiţionat pe K, adică

$$A(z) \equiv (d_0 z + d_1)(c_0 z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \ldots + c_{n-1}),$$

avem

$$\beta_0 d_0 + \beta_1 d_1 = 1, \tag{38}$$

unde

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \alpha_{00} c_0 + \alpha_{01} c_1 + \ldots + \alpha_{0,n-1} c_{n-1} \\ \beta_1 &= \alpha_{01} c_0 + \alpha_{02} c_1 + \ldots + \alpha_{0n} c_{n-1}. \end{aligned} \tag{39}$$

De aici rezultă că în cazul nostru $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \frac{c_{n-1}}{A_n}$, ceea ce arată că divizorul este un infrapolinom de acelaşi tip şi, prin urmare, avem

$$\varphi_{\alpha_i} \geqq \pi - \varphi_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{40}$$

N-am întîlnit acest rezultat în literatură, nici măcar pentru polinoame în sens Cebîşev.

În particular, dacă K este o mulţime reală situată pe 0x, de exemplu [0, 1], atunci $\varphi_0 = 0$, şi avem $\varphi_{\alpha_i} \geqq \pi$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ceea ce arată că toate rădăcinile unui infrapolinom cu termenul liber fixat pe o mulţime situată pe $0x$, sînt reale şi sînt cuprinse în cel mai mic segment care conţine mulţimea.

Din cele arătate mai sus se vede că rădăcinile infrapolinoamelor depind în general de coeficienţii combinaţiilor liniare α_{ik} care apar în (2) şi numai în cazuri particulare, cînd se fixează coeficienţii consecutivi de la început sau de la urmă, ele sînt independente de aceştia. Faptul că atunci cînd se fixează termenul liber intră în considerare unghiul sub care este văzută mulţimea din origine, se explică probabil prin faptul că aceste polinoame pot fi privite ca polinoame de aproximaţie a funcţiei

$$f(z) = \frac{z^k + A_1 z^{k-1} + \ldots + A_n}{z^k}$$

căci dacă de exemplu se fixează primul şi ultimii k coeficienţi, atunci polinomul $A(z)$ se poate scrie sub forma

$$A(z) \equiv z^k\left[\frac{z^n + A_{n-k+1} z^{k-1} + \ldots + A_n}{z^k} + \left(A_0 z^{n-k-1} + \ldots + A_{n-k}\right)\right]$$

şi care evident are sens numai dacă originea nu aparţine mulţimii K.

În încheiere vom studia cazul unei mulţimi reale.

3. Presupunem deci că mulţimea K este reală, conţinută în intervalul $[a,b]$ şi să considerăm polinoamele reale $A(z)$.

Să considerăm mai întîi un polinom

$$A(z) \equiv a_0 z^2 + a_1 z + a_2$$

cu

$$\alpha_{00} = 1, \ \alpha_{01} = \alpha_{02} = 0$$

adică

$$a_0 = 1 \text{ şi}$$
$$\alpha_{10} + a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{22} = 1 \tag{41}$$

unde α_{10}, α_{11}, α_{12} sînt reale.

Cele două rădăcini ale sale γ_1 şi γ_2 vor fi complexe conjugate, fie

$$\gamma_1 = c + id$$
$$\gamma_2 = c - id.$$

Condiţia (41) se scrie atunci sub forma

$$\alpha_{12}\,(c^2+d^2) - 2\,\alpha_{11}\,c + \alpha_{10} - 1 = 0 \tag{42}$$

care arată că punctele corespunzătoare γ_1 şi γ_2 se găsesc pe un acelaşi cerc cu centrul în $C\left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}, 0\right)$ şi de rază

$$r = \frac{\sqrt{\alpha_{11}^2 - \alpha_{10}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}^2}}{\alpha_{12}}.$$

Din consideraţiile geometrice se vede că numai dacă

$$a < \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} < b$$

polinomul $A(z) \equiv z^2+a_1z+a_2$ poate avea rădăcini complexe. Căci, dacă de exemplu, $\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \leqslant a$, atunci centrul cercului este la stînga lui a şi avem evident

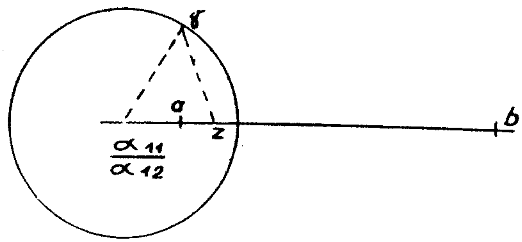


Fig. 1.

$|z-\gamma_1| > |z-c|$, pentru orice $z \in K$ şi deci $A(z)$ ar admite un polinom adjunct la fel condiţionat, adică n-ar fi infrapolinom.

Aşadar, are loc

TEOREMA 10. *Dacă mulţimea şi polinomul* $A(z) \equiv z^2 + a_1z + a_2$ *sînt reale iar* $[a,b]$ *este înfăşurătoarea convexă a mulţimii* K, *atunci cele două rădăcini ale lui* $A(z)$ *sînt totdeauna reale cu excepţia cazului cînd*

$$a < \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} < b$$

cînd ele pot fi complexe conjugate.

Să considerăm 3 cazuri particulare:

a) $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{11} = \frac{1}{A_1}$, $\alpha_{12} = 0$, adică centrul de greutate al rădăcinilor este fixat, atunci cercul (42) devine dreapta

$$c = -\frac{A_1}{2}$$

şi evident că cele două rădăcini sînt reale, căci altfel dacă $\gamma \neq -\frac{A_1}{2}$, am avea evident

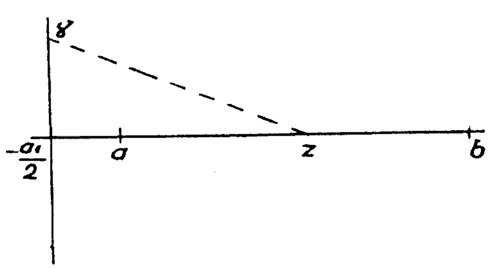


Fig. 2.

$$|z-\gamma| > \left|z+\frac{A_1}{2}\right|, \; z \in K.$$

b) Dacă $\alpha_{10} = \alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = \frac{1}{A_2}$ $(A_2 > 0)$, cercul (42) devine

$$c^2 + d^2 = A_2.$$

Dacă $0 < a < b$, atunci $A(z)$ are de asemenea două rădăcini reale. În general însă rădăcinile pot fi și complexe. Astfel, dacă K este $[-1,1]$ și $A(z) \equiv z^2+a_1 z + 1$ $(A_2 = 1)$, polinomul de abatere minimă pe $[-1,1]$. Din figura 3. se vede că $a_1 = 0$, căci

$\max\limits_{z \in K} |z - \gamma| > \max\limits_{z \in K} |z - i|$. Deci $A(z) \equiv z^2 + 1$ care n-are rădăcini reale.

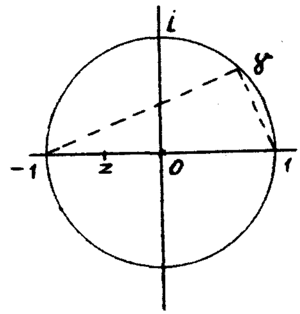


Fig. 3.

c) Să luăm $\alpha_{10} = \alpha$, $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = 0$, atunci cercul devine dreapta

$$c = \frac{\alpha - 1}{2},$$

de unde rezultă că și în acest caz cele două rădăcini sînt reale, dacă K este reală.

Cu ajutorul acestei observații se poate arăta următoarea

TEOREMA 11. *Dacă mulțimea K este reală atunci toate rădăcinile unui infrapolinom $A(z) \equiv z^n + A_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n$, ($A_1$ — real) sînt reale și cel puțin n-1 dintre ele sînt situate în* $[a,b,]$ unde $a < z < b$.

În adevăr, acest caz corespunde lui

$$\alpha_{00} = 1, \ \alpha_{01} = \ldots = \alpha_{0n} = 0 \text{ și } \alpha_{10} = 0, \ \alpha_{11} = \frac{1}{A_1} \ \alpha_{1k} = 0, \ k \neq 1$$

iar

$$\beta_{00} = 1, \ \beta_{01} = \beta_{02} = 0$$

$$\beta_{10} = e_1, \ \beta_{11} = 1, \ \beta_{12} = 0$$

și luînd un divizor oarecare de gr. 2 al lui $A(z)$, din observația *c*) rezultă că aceasta are 2 rădăcini reale, deci toate rădăcinile lui $A(z)$ sînt reale.

Dacă ar exista 2 rădăcini nesituate în $[a,b,]$ ele nu pot fi separate de $[a,b]$, căci atunci am putea înlocui cele 2 rădăcini cu altele mai apropiate de $[a,b,]$ fără să schimbăm suma lor, și deci $A(z)$ n-ar fi infrapolinom 1-restrîns. Prin urmare cele 2 rădăcini x_1 și x_2 sînt de aceeași parte față de $[a,b]$. Însă și în acest caz putem înlocui cele două rădăcini x_1 și x_2 cu altele x_1' și x_2', fără să schimbăm suma $x_1 + x_2$ în așa fel ca $|z-x_1| \cdot |z-x_2| > |z-x_1'| \cdot |z-x_2'|$, deoarece produsul dintre doi factori pozitivi, care au suma constantă, este maxim cînd cei doi factori sînt egali, Or, atunci din nou $A(z)$ n-ar fi infrapolinom 1—restrîns.

Aceeași proprietate are loc și cînd ultimul coeficient este fixat (W a l s h [5]), dacă mulțimea K este situată pe Ox. În general însă, cînd se fixează un coeficient oarecare proprietatea nu e adevărată, cum rezultă din observația *b*).

BIBLIOGRAFIE

1. L. Fejér, *Über die Lage der Nullstellen von Polynomen die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen.* „Math. Ann." **85**, 1922, p. 41.
2. M. Fekete and J. L. Walsh, *On restricted infrapolinomials.* „J. Anal. math"., **5**, 1957, p. 47–76.
3. V. S. Videnskii, *O naimerce ul lcnioiuscihsia ot rulia mnogccilerah, koeffifientš kotorîh udcvletvoriaiut dannoi lineinoi zavisimosti.* D.A.N. 126. no 2/1959.
4. J. L. Walsh and Zedek, *On generalized Tchebyscheff polynomials,* „Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A." **42**, nr. 2 (1956), 99–104.
5. J. L. Walsh, *On infrapolynomials with prescribed constant term.* „Journal de math. pures et appl." **37**, 1958, p. 215–316.

ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ОБУСЛОВЛЕННЫХ ИНФРАМНОГОЧЛЕНОВ
(Резюме)

Пусть K компактное множество комплексной плоскости z и $A(z) = a_0z^n + + \ldots + a_n$ многочлен степени n, коэффициенты которого удовлетворяют отношениям:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik}a_k = 1, \; i = 0, 1, \ldots, r. \quad \text{ранг } \| \alpha_{ik} \| = r + 1$$

Говорим, что многочлен $B(z) = b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n$ является адьюнктным многочленом многочлена $A(z)$ $r+1$ — обусловленным на 1 K, если:

$$\sum \alpha_{ik}b_k = 1, \; i = 0, 1, \ldots r$$

$$B(z) = 0, \text{ если } A(z) = 0 \quad z \in K,$$

и

$$| B(z) | < | A(z) |, \quad z \in K, \quad A(z) \neq 0.$$

Многочлен $A(z)$ не допускающий ни одного многочлена адъюнкта $r+1$ — обусловленного на K, называется *инфрамногочленом $r+1$ — обусловленным на K.*

Класс этих инфрамногочленов, определяемых таким образом, является более обширным и обнимает ,как частные случаи, все классы инфрамногочленов, рассматриваемые другими авторами [1], [2], [4], [5]. Это определение, между прочим, позволяет изучить инфрамногочлены, у которых, в некотором порядке, ставятся определенные коэффициенты.

В работе данны некоторые свойства этих инфрамногочленов, которые содержат, как частные случаи, уже известные.

Так, теорема 4 текста устанавливает, что необходимое и достаточное условие, чотбы многочлен $A(z)$ был инфрамногочленом, не обращающимся в нуль на K, есть такое, когда существуют m $(n - r + 1 \leqslant m \leqslant 2n - 2r + 1)$ точек K и m неотрицательных чисел λ_ν таким образом, чтобы проверялось отношение (25). Многочлен $A(z)$ является инфрамногочленом и на множестве $M = \{ z_\nu \}_{\nu=1}^{m}$

Теорема 5 определяет свойство, относящееся к локализации нулей такого многочлена. А именно, если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ являются корнями инфрамногочлена $A(z)$ $r+1$ — обусловленного на K (и не обращающегося в нуль на К), то имеет место отношение (31), где φ_z есть угол, под которым видно множество K из точки $\beta_\omega, \beta_2, \ldots, \beta_{k_\nu}$, являются корнями многочлена $B(z)$ (формула 31 текста), коэффициенты которого b_k определены так, чтобы было проведено отношение

$$\sum^{n} \alpha_{ik} b_k = 0.$$

Показано, что эта общая теорема содержит большинство известных теорем относительно корней, условных или неусловных инфрамногочленов.

В заключение, изучаются некоторые свойства $r+1$ обусловленных действительных инфрамногочленов, а также и с действительными α_{ik}.

SUR CERTAINS INFRAPOLYNOMES CONDITIONNÉS

(Résumé)

Soit K un ensemble compact du plan complexe z et $A(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$ un polynôme de degré n dont les coefficients vérifient les relations

$$\Sigma a_{ik} = 1, \; i = 0,1, \ldots, r, \; \text{rang } \| \alpha_{ik} \| = r + 1.$$

Nous dirons que le polynôme $B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n$ est un polynôme *adjoint* de $A(z)$ $r+1$ — conditionné par K, si

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k = 1, \; i = 0, 1, \ldots, r$$

$$B(z) = 0, \text{ si } A(z) = 0, \; z \in K,$$

et

$$|B(z)| < |A(z)|, \quad z \in K, \quad A(z) \neq 0.$$

Un polynôme $A(z)$ n'admettant aucun polynôme adjoint $r+1$ — conditionné par K se nomme *infrapolynôme $r+1$ — conditionné par K.*

La classe de ces infrapolynômes ainsi définis est plus large et comprend comme cas particuliers toutes les classes d'infrapolynômes considérés par d'autres auteurs ([1], [2], [4], [5]). Cette définition permet, entre autres avantages, l'étude des infrapolynômes dans lesquels se fixent certains coefficients, dans un ordre quelconque.

L' auteur établit plusieurs propriétés de ces infrapolynômes, qui contiennent comme cas particuliers les cas connus.

Ainsi le théorème 4 du texte établit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme $A(z)$ soit un infrapolynôme qui ne s'annule pas pour K est qu'il existe m $(n-r+1 \leqslant m \leqslant 2n-2r+1)$ points de K et m nombres non-négatifs λ_ν tels que soit vérifiée la relation (25). Le polynôme $A(z)$ étant aussi infrapolynôme pour l'ensemble $M = \left\{ z_\nu \right\}_{\nu=1}^{m}$.

Le théorème 5 établit une propriété relative à la localisation des zéros d'un tel polynôme. A savoir, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des racines d'un infrapolynôme $A(z)$ $r+1$ — conditionné pour K (et qui ne s'annule pas par K), alors a lieu la relation (31), où φ_z est l'angle sous lequel est vu du point z l'ensemble K, et où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_\nu}$ sont les racines du polynôme $B(z)$ (formule 31 du texte) dont les coefficients b_k ont été déterminés de manière à vérifier la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k = 0 \; .$$

L'auteur montre que ce théorème général contient la majorité des théorèmes connus relatifs aux racines des infrapolynômes restreints ou non.

On étudie en conclusion quelques propriétés des infrapolynômes $r+1$ — conditionnés réels et à α_{ik} également réels.

CÎTEVA APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI STURM RELATIV LA ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ LINIARĂ ȘI OMOGENĂ DE ORDINUL AL DOILEA

de

FLORIN CONSTANTINESCU

Să considerăm ecuația diferențială

$$a(x)\, y''+b(x)y'+c(x)y = 0$$

unde $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sînt funcții continue de x pe un interval I al axei reale.

În aceste condiții teorema lui Sturm afirmă că zerourile a două soluții liniar independente $y_1(x)$ și $y_2(x)$ se separă pe intervalul I, adică între două zerouri consecutive ale soluției $y_1(x)$ există un singur zero al soluției $y_2(x)$ și între două zerouri consecutive ale soluției $y_2(x)$ există un singur zero al soluției $y_1(x)$.

Vom aplica această teoremă în cazul în care soluțiile $y_1(x)$, $y_2(x)$ sînt polinoame cu toate rădăcinile reale.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-2}\, x^{n-2} + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

unde putem admite $a_n > 0$, $b_n > 0$.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rădăcinile polinomului $P(x)$ și $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ rădăcinile polinomului $Q(x)$. Noi vom presupune că rădăcinile acestor polinoame se separă, și pentru fixarea ideilor vom admite că avem

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n$$

În demonstrațiile care vor urma avem nevoie de cîteva considerații preliminare.

LEMĂ. *Dacă rădăcinile polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ se separă, atunci polinomul*

$$R(x) \equiv \lambda\, P(x) + \mu\, Q(x)$$

are toate rădăcinile reale oricare ar fi λ și μ reali. Pentru demonstrație observăm că șirul

$$R(\beta_1),\ R(\beta_2),\ \ldots,\ R(\beta_n)$$

are $n - 1$ variații de semn (presupunînd $\lambda \neq 0$), deci $R(z)$ are toate rădăcinile reale. Să dăm lui λ și μ pe rînd valorile

$$\lambda = b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$$
$$\mu = -a_1, -a_2, \ldots, -a_{n-1}$$

Polinomului $R(x)$ îi vor lipsi pe rînd coeficienții termenilor în x, $x^2, \ldots, x^{n-1}$. Deoarece $R(x)$ are toate rădăcinile reale, înseamnă că vom avea:

$$\begin{gathered}(b_1 a_0 - a_1 b_0)(b_1 a_2 - a_1 b_2) < 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ (b_k a_{k-1} - a_k b_{k-1})(b_k a_{k+1} - a_k b_{k+1}) < 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ (b_{n-1} a_{n-2} - a_{n-1} b_{n-2})(b_{n-1} a_n - a_{n-1} b_n) < 0\end{gathered} \tag{1}$$

Însă

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \frac{b_{n-1}}{b_n} = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i,$$

deci $\frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{b_{n-1}}{b_n}$ sau

$$b_{n-1} a_n - a_{n-1} b_n < 0 \tag{2}$$

Din relațiile (1) deducem

$$\begin{gathered}b_{n-1} a_{n-2} - a_{n-1} b_{n-2} < 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_k \quad a_{k-1} - a_k \quad b_{k-1} < 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_1 \quad a_0 \quad - b_0 \quad a_1 \quad < 0\end{gathered} \tag{3}$$

sau sub o altă formă

$$\begin{vmatrix} a_{k-1} & a_k \\ b_{k-1} & a_k \end{vmatrix} > 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

TEOREMA I. Dacă rădăcinile polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ sînt reale și se separă, atunci între coeficienții acestor polinoame există relațiile (4)

Să mai considerăm cazul cînd gradele celor două polinoame diferă cu o unitate:

$$P(x) = a_0 + o_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n; \; a_n \quad > 0$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} \qquad ; \; b_{n-1} > 0$$

iar între rădăcinile lor există relațiile de separare

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n$$

şi în acest caz putem face demonstraţii absolut analoge, astfel că în locul relaţiilor (4) obţinem relaţiile

$$\begin{vmatrix} a_{k-1} & a_k \\ b_{k-1} & b_k \end{vmatrix} < 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{5}$$

Teorema I poate fi enunţată analog şi în acest caz.

Deoarece rădăcinile lui $P'(x)$ separă rădăcinile lui $P(x)$, putem lua $Q(x) = P'(x)$ şi atunci relaţiile (5) devin

$$\text{(6)} \qquad \begin{vmatrix} k\,a_k & (k+1)\,a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_k \end{vmatrix} < 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

sau

$$k\,a_k^2 > (k+1)\,a_{k-1}\,a_{k+1} \tag{7}$$

Am obţinut astfel

TEOREMA II. Între coeficienţii unui polinom cu toate rădăcinile reale există relaţiile (7)

Făcînd o translaţie $x' = X + x$ proprietatea de separare a rădăcinilor se menţine. Însă avem:

$$P(X+x) = P(x) + X\frac{P'(x)}{1!} + X^2\frac{P''(x)}{2!} + \ldots + X^{n-1}\frac{P^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + X^n\frac{P^{(n)}(x)}{n!}$$

$$Q(X+x) = Q(x) + X\frac{Q'(x)}{1!} + X^2\frac{Q''(x)}{2!} + \ldots + X^{n-1}\frac{Q^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + X^n\frac{Q^{(n)}(x)}{n!}$$

Aici pentru a găsi relaţii între polinoamele derivate aplicăm (4)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(k-1)!}P^{(k-1)}(x) & \frac{1}{k!}P^{(k)}(x) \\ \frac{1}{(k-1)!}Q^{(k-1)}(x) & \frac{1}{k!}Q^{(k)}(x) \end{vmatrix} > 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

sau

$$\begin{vmatrix} P^{(k-1)}(x) & P^{(k)}(x) \\ Q^{(k-1)}(x) & Q^{(k)}(x) \end{vmatrix} > 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

TEOREMA III. Dacă rădăcinile polinoamelor $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt reale şi se separă atunci ecuaţia

$$P^{(k-1)}(x)\; Q^{(k)}(x) - Q^{(k-)}(x)\; P^{(k)}(x) = 0$$

nu are nici o rădăcină reală.

În cazul $Q(x) \equiv P('x)$

Teorema IV. Dacă rădăcinile polinomului $P(x)$ sînt reale, ecuaţia

$$k[P^{(k)}]^2 - (k+1)\, P^{(k-1)}\, P^{(k+1)} = 0 \tag{9}$$

nu are nici o rădăcină reală.

În continuare vom da o condiţie necesară şi suficientă pentru ca rădăcinile polinoamelor $P(x)$, şi $Q(x)$ cu toate rădăcinile reale să se separe.

Teorema V. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca rădăcinile polinoamelor $P(x)$ şi $Q(x)$ cu toate rădăcinile reale să se separe, este ca ecuaţia

$$P(x)\, Q'(x) - Q(x)\, P'(x) = 0$$

să nu aibă nici o rădăcină reală.

Necesitatea condiţiei rezultă din teorema III luînd $k = 1$. Pentru a demonstra suficienţa este destul să aplicăm teorema lui Sturm ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ P'' & P' & P \\ Q'' & Q' & Q \end{vmatrix} = 0$$

unde avem

$$\begin{vmatrix} P'(x) & P(x) \\ Q'(x) & Q(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Ca o altă aplicaţie vom demonstra următoarea teoremă a lui W. A. Markov [1], [2].

Dacă rădăcinile polinoamelor $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt reale şi se separă, atunci şi rădăcinile derivatelor $P'(x)$ şi $Q'(x)$ se separă.

Pentru demonstraţie aplicăm relaţiile (8) luînd $k = 2$

$$\begin{vmatrix} P' & P'' \\ Q' & Q'' \end{vmatrix} > 0$$

Teorema lui Markov rezultă din teorema lui Sturm aplicată ecuaţiei diferenţiale

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ P''' & P'' & P' \\ Q''' & Q'' & Q' \end{vmatrix} = 0$$

unde

$$\begin{vmatrix} P'' & P' \\ Q'' & Q' \end{vmatrix} = 0$$

S-a mai demonstrat următoarea teoremă aparţinînd lui P. Montel [3]:

Dacă $f(x)$ este un polinom de gradul $m>n$ cu toate rădăcinile atunci polinoamele

$$\begin{aligned} &a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{n-1} f^{(n-1)} + a_n f^n \\ &b_0 f + b_1 f' + \dots + b_{n-1} f^{(n-1)} + b_n f^{(n)} \end{aligned} \tag{10}$$

au rădăcini reale care se separă.
Din lema pe care am demonstrat-o deducem că polinomul

$$f'(x) = \alpha_1 f(x)$$

are toate rădăcinile reale, iar aceste rădăcini se separă cu radăcinile polinomului $f'(x)$. Prin aplicări succesive ale aceleaşi leme demonstrăm că polinomul

$$f^{(n)} - \Sigma\alpha_1 f^{(n-1)} + \Sigma\alpha_1\alpha_2 f^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}\Sigma\alpha_1\dots\alpha_{n-1} f' + (-1)^n \Sigma\alpha_1\dots\alpha_n f$$

are toate rădăcinile reale. Însă:

$$-\Sigma\alpha_1 = \frac{a_1}{a_0}, \Sigma\alpha_1\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}, \dots, (-1)^{n-1}\Sigma\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}(-1)\ \Sigma\alpha_1\dots\alpha_n = \frac{a_n}{a_0}$$

Prin urmare polinoamele (10) au toate rădăcinile reale. Să mai arătăm că aceste rădăcini se separă. Pentru aceasta va fi suficient să considerăm cazul

$$\begin{aligned} &f'(x) + \alpha_1 f(x) \\ &f'(x) + \beta_1 f(x) \end{aligned}$$

şi apoi să aplicăm acelaşi procedeu ca mai sus.
Avem

$$\begin{vmatrix} f' + \alpha_1 f & f'' + \alpha_1 f' \\ f' + \beta_1 f & f'' + \beta_1 f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & \alpha_1 f' \\ f' & \beta_1 f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 f' & f'' \\ \beta_1 f & f'' \end{vmatrix} =$$

$$= \beta_1 f^{12} - \alpha_1 f^{12} + \alpha_1 ff'' - \beta_1 ff'' = (s_1 - \alpha_1)\ (f^{12} - ff'') \neq 0$$

conform teoremei (4).
Teorema lui Montel rezultă imediat aplicînd teorema lui Sturm ecuaţiei.

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ f''' + \alpha_1 f'' & f'' + \alpha_1 f' & f' + \alpha_1 f \\ f''' + \beta_1 f'' & f'' + \beta_1 f' & f' + \beta_1 f \end{vmatrix} = 0$$

BIBLIOGRAFIE

1. W. A. Markoff, *Über Polynome, die in einem gegebenen Intervall möglichst wenig von Null abweichen.* „Math. Annale" 77, 213–258 (1916).
2. F. Constantinescu, *Sur un théorème de W. A. Markoff.* „Mathematica" **2(25)**, fasc. 2, 211–216 (1960).
3. P. Montel, *Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés.* „Mathematica" 5, 110–129 (1931).

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕНЕНИЙ ТЕОРЕМЫ ШТУРМА ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНОГО И ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Резюме)

В работе даются различные теоремы Штурма относительно линейного и однородного дифференциального уравнения второго порядка.

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0.$$

В этом смысле выводятся соотношения между коэффициентами двух многочленов, корни которых выделяются (теорема 1), дается необходимое и достаточное условие для выделения корней двух многочленов, и опять находят две теоремы, принадлежащие В. А. Маркову и П. Монтелю.

QUELQUES APPLICATIONS DU THÉOREME DE STURM RELATIF A L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE ET HOMOGENE DU DEUXIEME ORDRE

(Résumé)

L'auteur donne différentes applications du théorème de Sturm relatif à l'équation différentielle linéaire et homogène du deuxième ordre

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0$$

C'est ainsi qu'il déduit des relations entre les coefficients de deux polynômes dont les racines se séparent (théorème 1); il donne une condition nécessaire et suffisante pour que les racines de deux polynômes se séparent, et il retrouve deux théorèmes dus à W. A. Marcov et P. Montel.

ASUPRA UNOR TEOREME DE TIP STURM

de

I. A. RUS

1. Să considerăm ecuația diferențială lineară și omogenă de ordinul al doilea

$$y'' - Q(x)y = 0 \tag{1}$$

Este bine cunoscută ([1] și, [2]) teorema lui Sturm referitor la separarea zerourilor a două integrale lineare independente ale ecuației (1).

Acad. Miron Niculescu a demonstrat [3] o teoremă referitor la separarea zerourilor unei integrale a ecuației (1) și a derivatei ei.

Florin Constantinescu a stabilit [4] o teoremă referitor la separarea zerourilor a două integrale linear independente.

În [3] se stabilește o teoremă de separare a zerourilor componentelor unei soluții a unui sistem de forma

$$\begin{aligned} y' + p_1(x)y + q_1(x)z &= 0 \\ z' + p_2(x)y + q_2(x)z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

în anumite ipoteze aupra coeficienților $p_i(z)$, $q_i(x)$, $i=1,2$.

Matematicianul polonez Z. Butlewski a arătat [5] că dacă $y_1(x)$ și $y_2(x)$ sînt ,,componente y'' a două soluții linear independente a sistemului (2) zerourile lor se separă, coeficienții satisfăcînd anumite condiții.

Scopul celor ce urmează este de a privi sub un aspect unitar teoremele de tip Sturm mai sus amintite.

2. Să considerăm două funcții $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ continue împreună cu derivatele de ordinul I, in intervalul $[a, b]$. În acest paragraf vom stabili cîteva proprietăți de separare a zerourilor funcțiilor $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$.

Au loc:

LEMA 1. *Fie funcțiile $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ continue în intervalul $[a,b]$ împreună cu derivatele de ordinul I. Dacă Wronskianul acestor funcții*

$$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

nu se anulează în nici un punct al intervalului $[a,b]$ *atunci zerourile lui* $\varphi_1(x)$ *și* $\varphi_2(x)$ *sînt simple și izolate in intervalul* $[a,b]$. *De asemenea* $\varphi_1(x)$ *și* $\varphi_2(x)$ *nu au zerouri comune.* Demonstrația este imediată.

LEMA 2. *Dacă funcțiile* $\varphi_1(x)$ *și* $\varphi_2(x)$ *satisfac condițiile Lemei* 1 *în intervalul* $[a,b]$ *atunci zerourile lor se separă în acest interval.*

Demonstrație. Vom folosi ideea demonstrației teoremei lui S t u r m dată în [2].

Fie x_1 și x_2 două zerouri consecutive ale funcției $\varphi_1(x)$. Să demonstrăm că intre x_1 și x_2, $\varphi_1(x)$ are cel puțin un zero.

Pentru aceasta să presupunem contrariul și anume că $\varphi_2(x)$ este diferit de zero pentru $x \varepsilon [x_1, x_2]$. Atunci funcția

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

satisface condițiile teoremei lui R o l l e relativ la intervalul $[x_1\ x_2)$. Prin urmare există un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ astfel incît $\varphi'(\xi) = 0$ Dar

$$\varphi'(\zeta) = -\frac{W[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]}{\varphi_2^2(\zeta)} = 0.$$

și astfel am ajuns la o contradicție, contradicție care demonstrează teorema.

3. Să trecem acum și să demonstrăm folosind rezultatele de mai sus

TEOREMA 1. (S t u r m). *Oricare ar fi două integrale liniar independente ale* ecuației (1) *zerourile lor se separă in* $[a,b]$.

Demonstrație. Fie $y_1(x)$ si $y_2(x)$ două integrale linear independente ale ecuației (1). Aceasta înseamnă că Wronskianul lor este diferit de zero în $[a,b]$. Pe baza *Lemei* 2 zerourile lor se separă în acest interval.

TEOREMA 2. (M. N i c u l e s c u). *Dacă* $y(x)$ *este o integrală a ecuației* (1) *unde* $Q(x) < 0$ *și continuă în* $[a,b]$ *atunci zerourile lui* $y(x)$ *și* $y'(x)$ *se separă în* $[a,b]$.

Demonstrație. Avem:

$$W[y(x),\ y'(x)] = \begin{vmatrix} y & y' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ y' & Q(y) \end{vmatrix} = Qy^2 - y'^2 < 0$$

și pe baza *Lemei* 2 teorema este demonstrată.

TEOREMA 3. (F. C o n s t a n t i n e s c u). *Dacă* $y_1(x)$ *și* $y_2(x)$ *sînt două integrale liniar independente ale ecuației* (1) *zerourile lui* $y_1'(x)$ *și* $y_2'(x)$ *se separă în intervalul* [a, b], *interval în care* $Q(x)$ *este diferit de zero.*

Demonstrație. Avem:

$$W[y_1',\ y_2'] = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ Qy_1 & Qy_2 \end{vmatrix} = -Q(x)W[y_1, y_2]$$

și pe baza *Lemei* 2 teorema este demonstrată.

4. În sfîrșit să arătăm cum teoremele de tip S t u r m relativ la sistemul (2) sînt și ele o consecință a *Lemei* 2.

TEOREMA 2. (M. N i c u l e s c u). *Oricare ar fi funcțiile* $y(x)$ *și* $z(x)$ *ce formează o soluție a sistemului* (2) *zerourile lor se separă în intervalul* $[a,b]$ *interval în care* $p_i(x)$, $q_i(x)$, $i = 1,2$ *sînt continue iar* $q_1(x)\, p_2(x) < 0$

Demonstrație. După cum se știe (5) sistemul (2) poate fi redus la forma

$$Z' + PZ = 0$$

$$Z' + QY = 0$$

fără a modifica zerourile componentelor soluțiilor; $P = q_1\, e^{\int p_1(x)dx}$ $Q = p_2\, e^{\int q_2(x)dx}$, $y = y\, e^{\int p_1(x)dx}$, $Z = f\, e^{\int q_2(x)dx}$

Cum însă

$$W[Y, Z]) = \begin{vmatrix} Y & Z \\ -QZ & -PY \end{vmatrix} = -PY^2 + QY^2 \neq 0$$

rezultă pe baza *Lemei* 2 că zerourile lui Y și Z se separă și deci teorema 4 este demonstrată.

TEOREMA 5. (Z. B u t l e w s k i). *Dacă* $y_1(x)$ *și* $y_2(x)$ *sînt ,,componente* y'' *a două soluții liniar independente a sistemului* (2) *zerourile lor se separă în intervalul* $[a, b]$, *interval în care* $q_1(x)$ *este diferit de zero.*

Demonstrație. Avem

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -p_1y_1 - q_1z_1 & -p_1y_2 - q_1z_2 \end{vmatrix} = -q_1(x) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

deoarece y_1, f_1; y_3, f_2, sînt linear independente. Pe baza *Lemei* 2 teorema este demonstrată.

Analog se demonstrează

TEOREMA 6. (B u t l e w s k i). *Dacă* $z_1(x)$ și $z_2(x)$ sînt *''componente* z'' *a două soluții linear independente a sistemului* (2) *zerourile lor se separă în intervalul* $[a,b]$, *interval în care* $p_2(x)$ *este diferit de zero.*

5. Ideea care stă la baza acestei lucrări se poate folosi pentru stabilirea unor teoreme de tip Sturm relativ la ecuații diferențiale nelineare de ordinul al doilea și sisteme de ordinul I nelineare. Această problemă o vom analiza cu altă ocazie.

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. S t e p a n o v , *Curs de ecuații diferențiale*, ed. 1955, pag. 287.
2. A. H a l a n a y, *Introducerea în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.* ,,B.S.S.M.F. din R.P.R.'' nr. 21, Buc. 1956, pag. 52–56.
3. M. N i c o l e s c u, *Sur le théorème de Sturm.* ,,Mathematica (Cluj)'', 1929, (**I**), pag. 113.
4. F. C o n s t a n t i n e s c u, *Teoreme de tip Sturm pentru extremele integralelor unei ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul al doilea.* ,,Studii și cercetări de matematică (Cluj)'' nr. 3–4, **III** (1957), pag. 268.
5. Z. B u t l e w s k i, *Sur les zéro des intégrales réelles des équations différentielles linéeaires,* ,,Mathematica'' **XVII** (1941), pag. 85.

ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ТИПА ШТУРМА

(Резюме)

В этой работе под унитарным аспектом рассматривается ряд теорем типа Штурма хорошо известных относительно уравнения (1) и системы (2). Показано, что эти теоремы являются следствием *Леммы 2:* Если функции φ_1 и φ_2 непрерывны вместе с производными I-ого порядка, и если Вронскиан этих функций не обращается в нуль в $[a, b]$, то нуль φ_1 и φ_2 выделяются в этом промежутке.

SUR CERTAINS THÉORÈMES DE TYPE STURM

(Résumé)

L'auteur considère sous un aspect unitaire une série de théorèmes de type Sturm bien connus, relativement à l'équation (1) et au système (2). Il montre comment ces théorèmes sont une conséquence du *Lemme* 2: Si les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues ainsi que les dérivées d'ordre 1 et si le Wronskien de ces fonctions ne s'annule pas en $[a, b]$, alors les zéros de φ_1 et φ_2 se séparent dans cet intervalle.

DELIMITAREA ERORII ÎN PROCEDEUL LUI FEHLBERG, DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

de

A. COȚIU

Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice de la Institutul politehnic Cluj, din 17—18 februarie 1962

Să considerăm ecuația diferențială de ordinul întîi

$$z' = \varphi(x, z), \tag{1}$$

și fie $z(x)$ integrala ei care satisface la condiția inițială

$$z(x_0) = z_0. \tag{2}$$

Presupunem că sînt statisfăcute condițiile care asigură existența și unicitatea integralei $z(x)$ pe intervalul închis $[x_0, x_0 + a]$.

1. Prin transformarea

$$z(x) = \theta(x, y) = y(x) + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2} z_0''(x - x_0)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)[y(x) - y_0], \tag{3}$$

E. Fehlberg [5] reduce integrarea ecuației diferențiale (1) cu condiția inițială (2), la integrarea ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

cu condiția inițială

$$y(x_0) = y_0 = z_0, \tag{5}$$

unde funcția $f(x,y)$ care figurează în membrul al doilea al ecuației (4) este dată de

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)} \{\varphi[x, 0(x, y)] - z_0' -$$

$$- z_0''(x - x_0) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (y - y_0)\}. \tag{6}$$

Integrala $y(x)$ și funcția $f(x, y)$ satisfac pe nodul x_0 la condițiile

$$y_0' = 0, \; y_0'' = 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0. \tag{8}$$

Condițiile (7) atrag după sine condiția

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0. \tag{9}$$

Dacă se integrează numeric ecuația diferențială transformată (4) cu condiția inițială (5) și se obține integrala ei aproximativă $\tilde{y}(x)$, atunci formula (3) dă integrala aproximativă $\tilde{z}(x)$ a ecuației diferențiale (1) înlocuind pe $y(x)$ cu $\tilde{y}(x)$, adică

$$\tilde{z}(x) = \tilde{y}(x) + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2} z_0''(x - x_0)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)[\tilde{y}(x) - y_0]. \tag{10}$$

2. Urmînd metoda de lucru expusă în cartea lui R u n g e și K ö n i g [6], E. F e h l b e r g stabilește un procedeu de tip Runge-Kutta de ordinul șase de exactitate, pe trei noduri.

Pentru aplicarea procedeului lui F e h l b e r g la integrarea numerică a ecuației diferențiale transformate

$$y' = f(x, y),$$

cu condiția inițială

$$y(x_0) = y_0 = z_0,$$

se calculează

$$\tilde{y}(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1152} k, \tag{11}$$

unde

$$k = 500\, k_1 + 375\, k_2 + 64\, k_3, \tag{12}$$

iar

$$x = x_0 + h \ (h < a) \text{ şi } x \neq x_0 - \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0},$$

cu notaţiile

$$k_1 = f[x_0 + \frac{2}{5}(x - x_0), y_0],$$

$$k_2 = f[x_0 + \frac{4}{5}(x - x_0), y_0 + \frac{4}{3}k_1(x - x_0)] \tag{13}$$

$$k_3 = f[x_0 + (x - x_0), y_0 - \frac{95}{32}k_1(x - x_0) + \frac{135}{128}k_2(x - x_0)].$$

3. În această lucrare vom da o delimitare a erorii $|y(x) - \tilde{y}(x)|$ în procedeul lui F e h l b e r g. E te vorba aici de eroarea care provine din caracterul aproximativ al formulei care se utilizează pentru aplicarea procedeului. Pentru aceasta vom folosi metoda de lucru datorită lui L. B i e b e r b a c h [1], pe care am mai aplicat-o şi cu alte ocazii [3], [4].

Presupunem că $y(x)$ şi $\tilde{y}(x)$ se pot dezvolta în serie după puterile lui $x-x_0$ în vecinătatea nodului x_0.

Metoda lui Bieberbach constă în a dezvolta după puterile lui $x-x_0$, atît integrala exactă $y(x)$ cît şi integrala aproximativă $\tilde{y}(x)$. Apoi, cu ajutorul unor majorări relative la funcţia $f(x,y)$ şi la derivatele sale parţiale în raport cu x şi y, se evaluează valoarea absolută a diferenţei celor două integrale.

4. Presupunem că în domeniul D, definit de inegalităţile

$$|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b, \tag{14}$$

funcţia $f(x, y)$ şi derivatele sale parţiale în raport cu x şi y, pînă la ordinul şase inclusiv, sînt continue.

Fie M, N şi a' numere pozitive, alese astfel încît domeniul D', definit de inegalităţile

$$|x - x_0| \leqslant a', |y - y_0| \leqslant b, \tag{15}$$

să avem

$$|f(x, y)| \leqslant N, \quad \left|\frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^i \partial y^k}\right| \leqslant \frac{M}{N^{k-1}}, \tag{16}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, 6),$$

şi

$$a'N \leqslant b, \ a'M \leqslant 1, \ a' \leqslant a. \tag{17}$$

În aceste condiţii, ne propunem să delimităm eroarea $|y(x) - \tilde{y}(x)|$ în procedeul lui Fehlberg şi anume, să arătăm că pe intervalul $|x - x_0| \leqslant a'$, avem

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| < 198\,MN\frac{M^6 - 1}{M - 1}(x - x_0)^7. \tag{18}$$

Pentru stabilirea inegalităţii (18), să dezvoltăm pe $y(x)$ şi $\tilde{y}(x)$ după puterile lui $x-x_0$; avem

$$y(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{1!} y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y_0'' + \ldots +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^6}{6!} y_0^{(6)} + \frac{(x-x_0)^7}{7!} y^{(7)}[x_0 + \theta_1(x-x_0)],$$

$$\tilde{y}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{1152}\left\{k(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} k'(x_0) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \frac{(x-x_0)^5}{5!} k^5(x_0) + \frac{(x-x_0)^6}{6!} k^{(6)}[x_0 + \theta_2(x-x_0)]\right\}.$$

Procedeul este astfel construit, încît primii şapte termeni care figurează în membrul al doilea al egalităţii care dă pe $\tilde{y}(x)$, calculat cu acest procedeu, coincid cu primii şapte termeni din membrul al doilea al egalităţii care dă pe $y(x)$, aşa că avem

$$\tilde{y}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{1!} y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y_0'' + \ldots +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^6}{6!} y_0^{(6)} + \frac{(x-x_0)^7}{6!\ 1152} k^{(6)}[x_0 + \theta_2(x-x_0)].$$

Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $x - x_0 > 0$. Delimitarea erorii rezultă atunci din egalitatea

$$\begin{aligned} y(x) - \tilde{y}(x) &= \frac{(x-x_0)^7}{7!} y^{(7)}[x_0 + \theta_1(x-x_0)] - \\ &- \frac{(x-x_0)^7}{6!\ 1152} k^{(6)}[x_0 + \theta_2(x-x_0)], \end{aligned} \tag{19}$$

de unde

$$\begin{aligned} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \Bigg[& \frac{1}{7!} \max_{|x-x_0| \leq a'} \left|\frac{d^6 f}{dx^6}\right| + \\ & + \frac{500}{6!\ 1152} \max_{|x-x_0| \leq a'} \left|\frac{d^6 k_1}{dx^6}\right| + \\ & + \frac{375}{6!\ 1152} \max_{|x-x_0| \leq a'} \left|\frac{d^6 k_2}{dx^6}\right| + \\ & + \frac{64}{6!\ 1152} \max_{|x-x_0| \leq a'} \left|\frac{d^6 k_3}{dx^6}\right| \Bigg] (x-x_0)^7. \end{aligned} \tag{20}$$

Trebuie deci să delimităm pe $\left|\frac{d^6f}{dx^6}\right|$, $\left|\frac{d^6k_1}{dx^6}\right|$, $\left|\frac{d^6k_2}{dx^6}\right|$ şi $\left|\frac{d^6k_3}{dx^6}\right|$, pe intervalul $|x - x_0| \leqslant a'$.

Nu vom dezvolta aici detaliat calculele necesare pentru delimitările de mai sus, care sînt destul de laborioase. Se aplică operatorii pe care i-am folosit şi în lucrările [3], [4]. Calculele au fost executate cu o maşină electrică de calculat Rheinmetall.

Din cauza numărului mic de constante care figurează în formulele care se folosesc pentru aplicarea procedeului şi a numărului mic de substituţii ce trebuiesc făcute în ecuaţia diferenţială transformată, calculele s-au simplificat mult faţă de calculele necesare pentru delimitările erorilor date în lucrările [3], [4].

5. Aplicînd lui f operatorii amintiţi şi ţinînd seamă de ipotezele de mărginire (16) se găseşte

$$\max_{|x-x_0|\leq a'}\left|\frac{d^6f}{dx^6}\right| = 64MN + 1824M^2N + 4832M^3N + \\ + 2416M^4N + 228M^5N + 2M^6N. \tag{21}$$

Calculele necesare pentru delimitările lui $\left|\frac{d^6k_1}{dx^6}\right|$, $\left|\frac{d^6k_2}{dx^6}\right|$, $\left|\frac{d^6k_3}{dx^6}\right|$, şi care fac să intervină şi ipotezele (17) sînt analoge.

Dăm numai rezultatele

$$\max_{|x-x_0|\leq a'}\left|\frac{d^6k_1}{dx^6}\right| = 0,004096MN, \tag{22}$$

$$\max_{|x-x_0|\leq a'}\left|\frac{d^6k_2}{dx^6}\right| = 18,376M^4N + 497,591M^3N + \\ + 1287,082M^2N + 579,769MN, \tag{23}$$

$$\max_{|x-x_0|\leq a'}\left|\frac{d^6k_3}{dx^6}\right| = 1971679,658\, MN + \\ + 2545638,639M^2N + 691307,346M^3N + \\ + 38118,437M^4N + 116,285M^5N. \tag{24}$$

Înlocuind rezultatele date de egalităţile (21), (22), (23) şi (24) în inegalitatea (20), după efectuarea calculelor se obţine

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant (152,4107\, MN + 197,3669\, M^2N + \\ + 54,5254\, M^3N + 3,4292\, M^4N + \\ + 0,0541\, M^5N + 0,0004\, M^6N)\ (x-x_0)^7.$$

De aici se obţine următoarea delimitare a erorii $|y(x) - \tilde{y}(x)|$ în procedeul lui F e h l b e r g, de tipul celei dată de L. B i e b e r b a c h [1] în procedeul lui K u t t a de ordinul patru de exactitate şi anume

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| < 198MN(1 + M + \ldots + M^5)(x - x_0)^7 =$$

$$= 198MN\frac{M^6 - 1}{M - 1}(x - x_0)^7.$$

Delimitarea erorii $|z(x) - \tilde{z}(x)|$, relativă la calculul numeric al integralei aproximative $\tilde{z}(x)$ a ecuaţiei diferenţiale dată, se obţine apoi uşor din egalitatea

$$z(x) - \tilde{z}(x) = \left[1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0(x - x_0)\right][y(x) - \tilde{y}(x)].$$

Se observă că ordinul de mărime al erorii nu se schimbă cînd se trece dela $\tilde{y}(x)$ la $\tilde{z}(x)$.

BIBLIOGRAFIE

1. L. B i e b e r b a c h, ,,Zeitschr. angew. Math. u. Physik'', **2**, 233—248 (1951).
2. L. C o l l a t z, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1951 (trad. în limba rusă, Moscova, 1953, p. 11—12).
3. A. C o ţ i u, F i l i a C o ţ i u, ,,Studia Universitatis Babeş-Bolyai'', ser. I, fasc. 1, 193—198 (1960).
4. A. C o ţ i u, ,,Stud. şi cercet. matematică (Cluj)'', **XII**, 1, 21—27 (1961).
5. E. F e h l b e r g, ,,Zeitschr. angew. Math. u. Mech.'', **38**, 421—426 (1958).
6. C. R u n g e, H. K ö n i g, *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, Berlin, 1924.

РАЗГРАНИЧЕНИЕ ОШИБКИ В СПОСОБЕ ЧИСЛОВОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-ГО ПОРЯДКА ФЕЛЬБЕРГА

(Р е з ю м е)

Применяя метод работы, обязанный Л. Бибербаху [1], даётся разграничение ошибки в способе Е. Фельберга [5] шестого порядка точности [2]. Ошибка будет порядка h^7, где $h = x - x_0$ есть шаг интегрирования. Разграничение ошибки является типом разграничения данным Бибербахом в способе Кутта четвёртого порядка точности.

При переводе от приблизительного интеграла $\tilde{y}(x)$ преобразованного дифференциального уравнения, к приблизительному интегралу $\tilde{z}(x)$ данного в начале дифференциального уравнения, порядок величины ошибки не изменяется.

LA DÉLIMITATION DE L'ERREUR DANS LE PROCÉDÉ FEHLBERG, D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE PREMIER ORDRE

(R é s u m é)

Appliquant une méthode de travail due à L. Bieberbach [1], l'auteur donne une délimitation de l'erreur dans le procédé de E. Fehlberg [5] d'ordre six d'exactitude [2]. L'erreur est d'ordre h^7, où $h = x - x_0$ est le pas d'intégration. La délimitation de l'erreur est du type de celle donnée par Bieberbach dans le procédé de Kutta d'ordre quatre d'exactitude.

Le passage de l'intégrale approximative $\tilde{y}(x)$ de l'équation différentielle transformée à l'intégrale approximative $\tilde{z}(x)$ de l'équation initialement donnée, ne change pas l'ordre de grandeur de l'erreur.

GÉRESI ISTVÁN ARITMETIKÁJA*

TÓTH SÁNDOR

A marosvásárhelyi Bolyai Tudományos Könyvtár őriz egy megbarnult, kézirásos aritmetikát, melyet Géresi István írt 1626-ban, Nagybányán. A következőkben ezt a kéziratot ismertetjük.

A kéziratot elemezve, forrásait, keletkezése történetét kutatva, tartalmát, felépítését, matematikai terminologiáját, az alkalmazott számolási eljárások fejlettségét vizsgálva, összehasonlítjuk fejezetről — fejezetre az első nyomtatott magyar nyelvű aritmetikákkal. Több vonatkozásban összehasonlítjuk néhány jelentősebb, korabeli külföldi aritmetikával is. Így elkerülhetetlenül szóba kerülnek a XVI., XVII. századbeli aritmetikák, az aritmetikai műveletek fejlődése, a Román Népköztársaság területére való behatolása, valamint az aritmetika oktatásának a külföldi és hazai fejlődése is. Mivel az olvasó részéről mindezt nem tételezhetjük fel ismertnek, a dolgozatot függelék követi: Az aritmetika oktatásának a fejlődése. Az aritmetikák és az aritmetikai műveletek Géresi kézirata előtt.

Géresi kézirata keletkezésének a története ismeretlen, akárcsak az első nyomtatott magyar nyelvű aritmetikák keletkezésének a története. De a kézirat elemzése lehetőséget nyújt bizonyos következtetésekre a keletkezésére vonatkozóan is. Emiatt A kézirat története *című fejezet megirására csak az elemzések után kerülhetett sor.*

Jelen tanulmány szerzője nem lévén nyelvész, a IV. fejezetben tett nyelvészeti észrevételeket nem Géresi nyelvének és helyesírásának a tisztázására szánta, csak a kézirat keletkezésének a felderítéséhez keres adatokat ezen az úton is.

I. A KÉZIRAT LEÍRÁSA

Géresi István kéziratos Aritmetikája bőrkötéses, kisformátumú (8—r) könyvecske. Méretei: 148 mm × 104 mm × 16 mm. A bőrből készült borítólap méretei egyeznek a könyv méreteivel.

A bőrkötést, valamint a könyv széleit az eltelt negyedfélszázad megbarnította. A könyv valamikor sárba kerülhetett, s a sárfoltok nyomai ma is láthatók. A bőrkötés rongált állapotban van, lyukak, szakadások támadtak rajta (lásd az 1. ábrát).

A borítólap eredetileg nem erre a célra készül‹, belső oldalát 4-es vonalrendszer és hangjegyek takarják. A hátulsó borítólapon az írás tisztán kivehető (méltó a szakemberek f gyelmére). A betűrt rész bizonysága szerint valamikor a külső lapot is hangjegyírás borította, de ennek már nyoma sincs.

A bőrbo ítékot belül félig vászonnal bélelték és a vászonra papírt ragasztottak. A bélelő papírból kevés maradt meg: az első lapon néhány kis darabka, a hátulsón pedig több mint a fele. Ez a papír egy régebbi latin

* A dolgozat I—II. fejezetei jelen számunkban, a III—V. fejezetei, valamint a „Függeé k", a következő számokban jelennek meg.

nyelvű verses kéziratnak a töredéke. Rajta latin mondások, tollpróbák, majd a következő címfelirat olvasható: „Sequuntur iam Cantiones". Keresztülírva, egy más kéz által, apróbb, primitívebb írással magyar szavakat találunk.

A könyv aritmetikai része 169 lapot tartalmaz. A lapok eredetileg számozatlanok voltak. A jelenlegi ceruza-számozás utólag történt. A következőkben erre a számozásra hivatkozunk.

A megmaradt csonkok bizonysága szerint a könyv első két lapja kiszakadt. Az első címlap lehetett. De az is lehet, hogy nem volt címlapja, kéziratoknál ez gyakran előfordul. A második lap, a megmaradt szavakból következtetve, dedikációt tartalmazott.

A 10., 24. és 92. lap után következőket kitépték. Az 58. és 59-es üres. Valószínüleg az író tévedésből kettőt fordított. Ezek a lapok tollpróbákat, utólagosan belefirkált magyar és latin szavakat, mondatfoszlányokat tartalmaznak.

A kézirat első lapján a mű címe olvasható: „Az zamvetesnek es hasznos uta, es modgia melyből ighen könyen az ki foghlalatos leszen ez dologhban megh tanul hattya" (2. ábra).

A 166. lapon, alól a következő bejegyzést találjuk: „Finis per me Stephanus (!) Geresi In scola Rivulina Anno Domini 1626 Sit Laus Deo". (17. ábra).

A 167. díszítést tartalmaz, valamint az előbbi adatot: A : D : 1626. A 168. lapon díszítéseket és a keltezés megismétlését találjuk, valamint alul, középen, egy olvashatatlan szót. A 169. egy „Tabula Cebetis"-(szorzótábla)-t és alul egy megjegyzést tartalmaz, „Finis primam partem" (!). A „primam partem" áthúzva ugyanazzal a tintával (18. ábra).

Az aritmetikai részt követő 15 lap eredetileg beíratlan maradhatott. Ezek más kézírással írt, későbbi időből származó verseket[1] és különböző bejegyzéseket őriztek meg. A 176. lapon az író az egyik verset 1632-es keltezéssel zárja.

A kézirat lapjait barnásodások tarkítják, de a szöveg jól olvasható. Az írás gyakorlott kézre vall. A betűk és a számjegyek alakja is elárulja a keletkezés idejét. Jellegzetesen XVII. század eleji írás. (A tanulmányunk végén közöljük pár lapnak a hasonmását).

A könyv papírlapjain a következő vízjelek láthatók:

[1] Ezeket a verseket Szigeti József ismertette a „Nyelv- és irodalomtudományi közlemények" III. évf. 1—4. számában (1959).

Ezeket a vízjeleket nem találtam meg a K e m é n y J., *Signa interna Chartarum Saeculo XIV., XV., XVI., XVII. et XVIII. in Transilvania olim obviarum, Tomus I. 1358—1671*-ben, sem a pótkötetében, tehát hihetőleg külföldiek.

II. GÉRESI ARITMETIKÁJÁNAK A FELÉPÍTÉSE ÉS TARTALMA

Géresi aritmetikája közeli rokonságot mutat az első magyar nyelvű nyomtatott aritmetikákkal[2], különösen a Kolozsvári Aritmetikával.

Nyilvánvalóan bármelyik két, ebben a korban megjelenő aritmetika között találunk hasonlatosságot, mind a szerkezetét, mind az alkalmazott számolási eljárásokat, a használt fogalmakat, a tárgyalt problémákat illetően. De e között a két aritmetika között egészen szembetűnő a hasonlatosság. Egész lapok szó szerint megegyeznek. Pl. Géresi kéziratának 15—23. lapja szó szerint egyezik a Kolozsvári Aritmetika megfelelő lapjaival.

Géresi legtöbbször a közbevetett erkölcsi intelmeket, megjegyzéseket is pontosan átveszi. Géresinél a 33. lapon olvassuk: ,,Azert az Numeralasban az diligentia igen zükségh,". A megfelelő helyen a Kolozsvári Aritmetikában ez áll: ,,Ezokaért az Numeratiobã az diligentia igen szűkség". Géresinél a 19. lapon (6. ábra) olvassuk: ,,az te Chronicadbol (hogy ha valaha fösvenseghed miat vöttel, az kibol megh tudhatnad hanyban irtanak akkor mi koron szuletet) es azt az forghando esztendozam ala ird, es abbol subtrahalyad ki vonnyad es ki vegied". A Kolozsvári Aritmetika megfelelő helyén így szól: ,,az te Chronicádból (hogy ha valaha fesuénséged miat vőttél, az kiből meg tudhatnád, hányban irtanac ackor, mikoron szűletet) és aszt az forgando esztendő szám alá ird, és abból subtrahállyad, ki vonnyad, és ki vegyed, imigyen". Géresinél a 28. lapon a következőket találjuk: (ez alkalommal a megjegyzést nem ugyanazon példához fűzi, mint a Kolozsvári Aritmetika): ,,(mert az Deakok az felső szamot multiplicandusnak hijak, az alsot multiplicans ...)". A Kolozsvári Aritmetikában ez áll: ,,(Mert az Deac Wraim az felső számot Multiplicandusnac hiyác, az alsót multiplicansnac ...)".

Géresi átveszi forrásainak stílusát, szójátékait is. Például az ilyeneket: ,,Pelda altal im egy tanusagot adoc elődben. Vajha volna 200 ökrem ...", ,,hanem az derek tanitas szerint kel czelekednek igyen", ,,Vagion egy hordo borom, mely ket negyvenes, akarom tudni, mikor az czaplar jamborul kiarulna es elis fogyna ...".

Géresi legtöbbször átveszi az alcímeket is, mint: ,,Compendium, Observatio, Aliud, Item, Cautio, Külömb külömb fele Peldak" (16. ábra).

Itt-ott egy-egy szót hagyott ki vagy toldott be Géresi, amikor azt jónak látta. Máskor egy-egy magyarázó mellékmondatot iktatott be. A számjegyek helyett néha számnevet írt.

[2] Az első nyomtatott magyar nyelvű aritmetika az 1577-ben kiadott ún. ,,Debreceni Aritmetika" (lásd H á r s J á n o s, *A Debreceni Aritmetika*, Sárospatak, 1938). 1582-ben megjelent ennek egy változatlan kiadása. 1591-ben megjelent egy bővített kiadása, az ún. ,,Kolozsvári aritmetika" (*Magyar Arithmetica, az az, Számvetésnec tudomanya. Most viyonnan az Frisiusnac Magyar Arithmeticayából sok wy és hasznos példáckal kiadatot.* Colosvarat. Christus Wrunknac születése után, az 1591). Utóbbiból 2 példányt őriz a Kolozsvári Egyetemi Könyvtár (a második példányt 1943-ban ajándékozták); ezekkel hasonlítottam össze Géresi kéziratát.

Természetesen lehetne ellenpéldákat is idézni, mert Géresi nem veszi át mindig a teljes szöveget és a kitéréseket. Így az alábbi megjegyzést elhagyja egy olyan példa mellől, amelyet különben szószerint átvesz (Kolozsvári Aritmetika C_4) : „Mellyet ha Additio szerint sommaltal volna egybe, egy Tyukmony sültig sem érted volna végét benne. Ezokáért mondom hogy az Multiplicatio az Additionac ősuénye és altal vttya”.

Más esetekben Géresi jobb kifejezéseket keres. Például a Kolozsvári Aritmetikában olvassuk: „Voltunk hárman társul egyben”. Géresinél e helyett (134. lap) : „Harman attuk magunkat kereskedesre”. Néha a feladat megszövegezésekor elhagyja a bevezető mesét. Pl. a Kolozsvári Aritmetikában az egyik feladat így kezdődik: „Hoztunk Béczi marhát, nyertünc rajta 965 forintot”. Ehelyett Géresi egyenesen így kezdi: „Kiirtunk kereskedesunk utã harman 965 for :”

Néha Géresi, amint látni fogjuk, az aritmetika felépítésében ésszerűbb elrendezést keres.

Legtöbb eltérést az egyes fejezetek bevezetésében találunk. Találunk Géresinél olyan feladatokat is, amelyek nincsenek meg a Kolozsvári Aritmetikában. Sőt vannak olyan fejezetei is a Géresi Aritmetikájának, amelyek nincsenek meg a Kolozsvári, illetve a Debreceni Aritmetikában. Pár esetben eltérő műveleti eljárást ad. Néhány fogalmat Géresi eltérően értelmez. Néhány fogalom nevét magyarul is adja, olyan fogalom nevét, amelyik a Kolozsvári Aritmetikában csak latinul szerepel. Így Géresinél szerepel az „osztoszam”, „osztando szam”, vice versa helyett „ellen”, resolvald helyett néha „hozd”, regula societatis helyett „az tarsasagnak regulaja”, regula mercatorum helyett „kalmarok regulaja”, stb.

Vizsgáljuk meg részletesen a Géresi Aritmetikája felépítését, tartalmát és közben hasonlítsuk össze a Kolozsvári, illetve Debreceni Aritmetikával.

Géresi Aritmetikájának első lapja, amint már említettük, ezzel a címmel kezdődik: „Az zamvetesnek es hasznos uta, es modgia melyből ighen könnyen az ki foghlalatos leszen ez dologhban, megh tanulhattya”. A Debreceni Aritmetika is az előszó utáni lapon, hasonló címmel kezdődik: „Az szam vetesnec reovid es hasznos vta avagy modgya, melly az tanuloknak hamarab valo értelmekre, az Frisiustul iratattot szám vetésböl Anno 1577 röuideden rendeltetet[3]”.

Összevetve a két címet, arra következtethetünk, hogy a Géresi címzéséből, hihetőleg tévedésből, kimaradt a „rövid” szó.

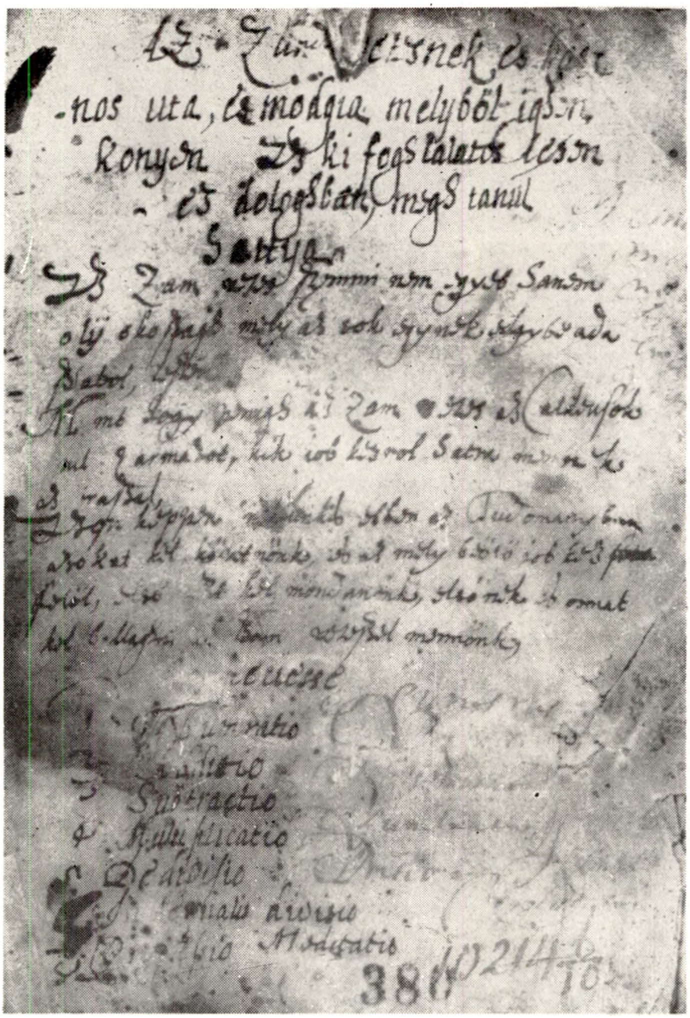
Mindjárt a cím után Géresi a szám (az zam) fogalmát értelmezi (2. ábra). Megmagyarázza, hogy követve a számítások felfedezőit, a kaldeusokat, a számjegyek megnevezésekor mi is jobbról balra haladunk, elsőnek nevezvén a jobbkézfelöli szélsőt. A következőkben felsorolja azokat az aritmetikai műveleteket, specieseket[4], amelyeket tárgyalni szándékozik: 1. Nume-

---

[3] Lásd H á r s, id. m., 61. lap.

[4] A species szó ebben az értelemben (aritmetikai művelet) először a salemi kolostor *Liber Algorizmi* c. kódexében (1200) tűnik fel. A XVI. század aritmetikáiban általánosan használt. A speciesek száma az idők folyamán sokat változott. Az indusok, például Bhaskara, 6 félét említenek. A XIII. században Johannes de Sacrobosco 9 féle speciesről beszél, amelyek aztán a középkorban fennmaradnak: 1. Numeratio, 2. Additio, 3. Substractio, 4. Dulpatio, 5. Multipli-

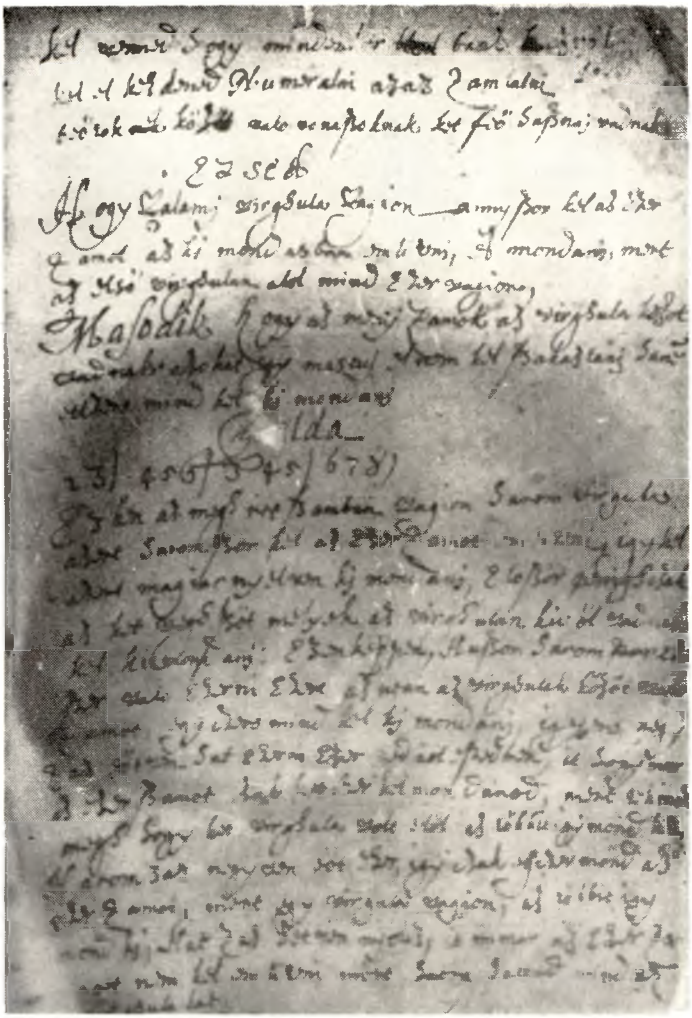
1. kép.

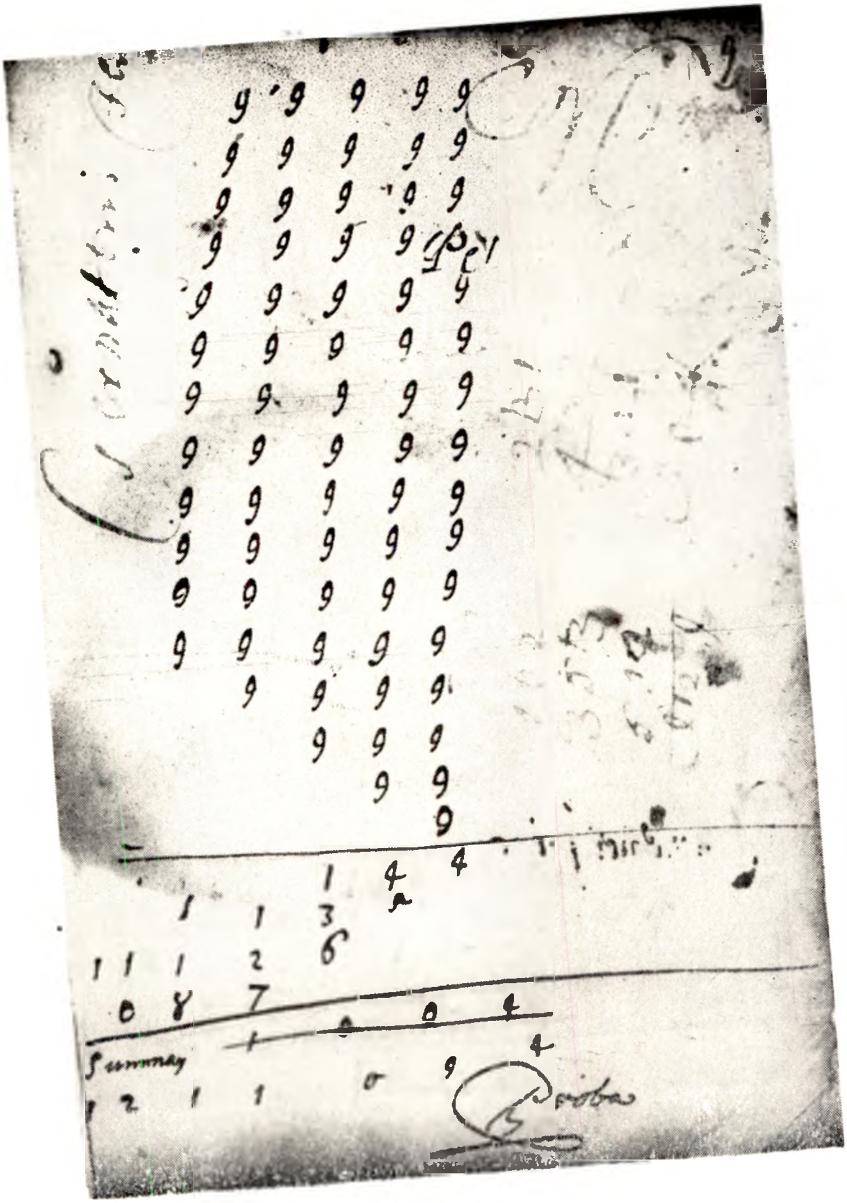

Az Számvetésnek és hasz-
-nos uta, és módgya melyből igen
könyen az ki foglalatos lészen
és dolgosban, megtanul
Sortya

3 Subtractio
4 Multiplicatio
5 Divisio

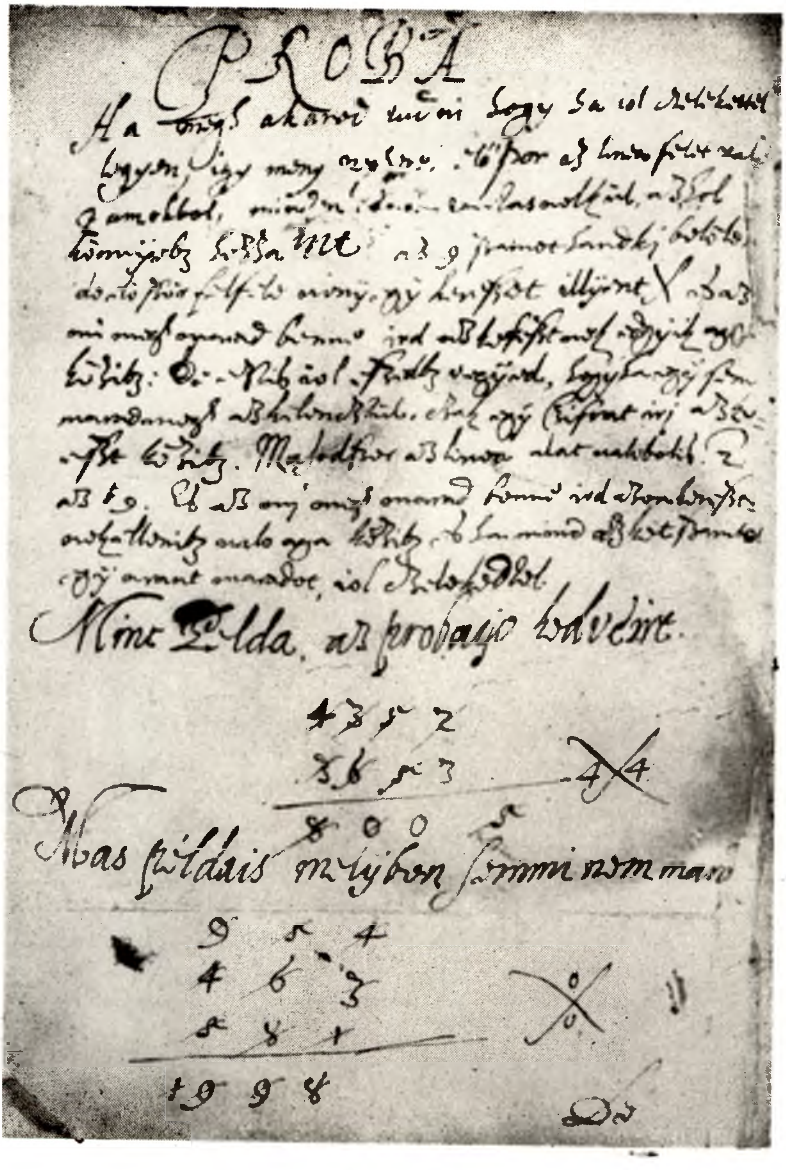
380

2. kép.





4. kép.



PROBA

[illegible]

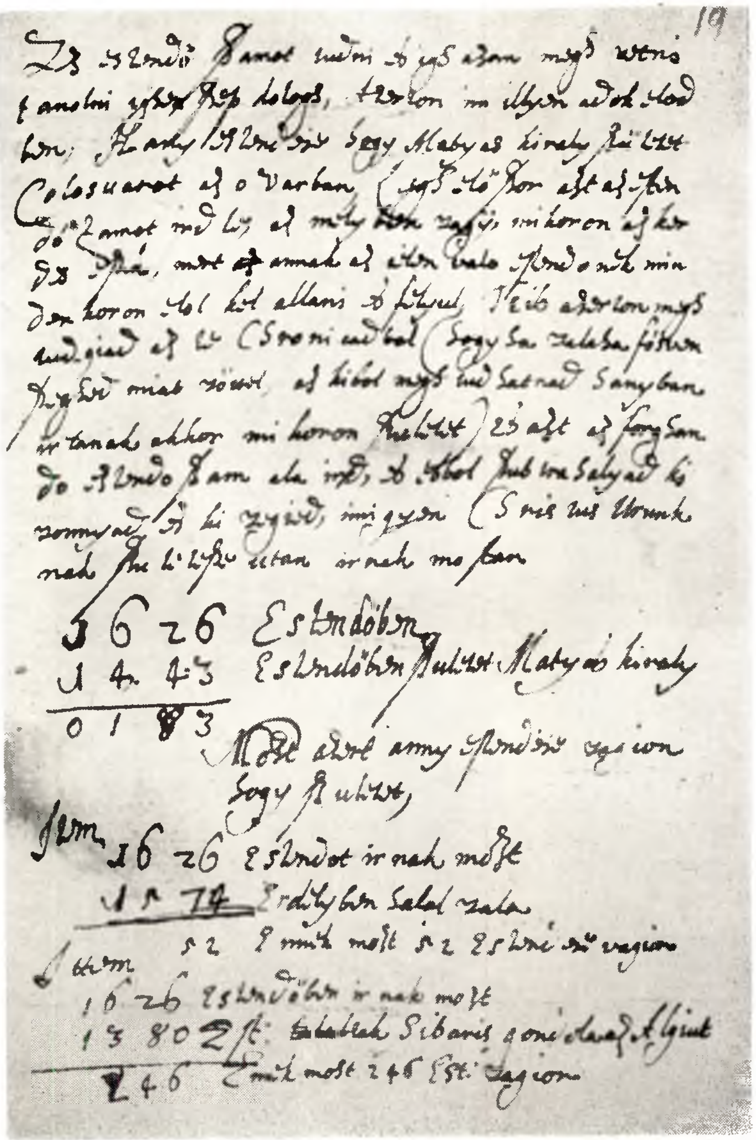
Mint Példa, az probaçio kővetkezik.

4352
3653
8005

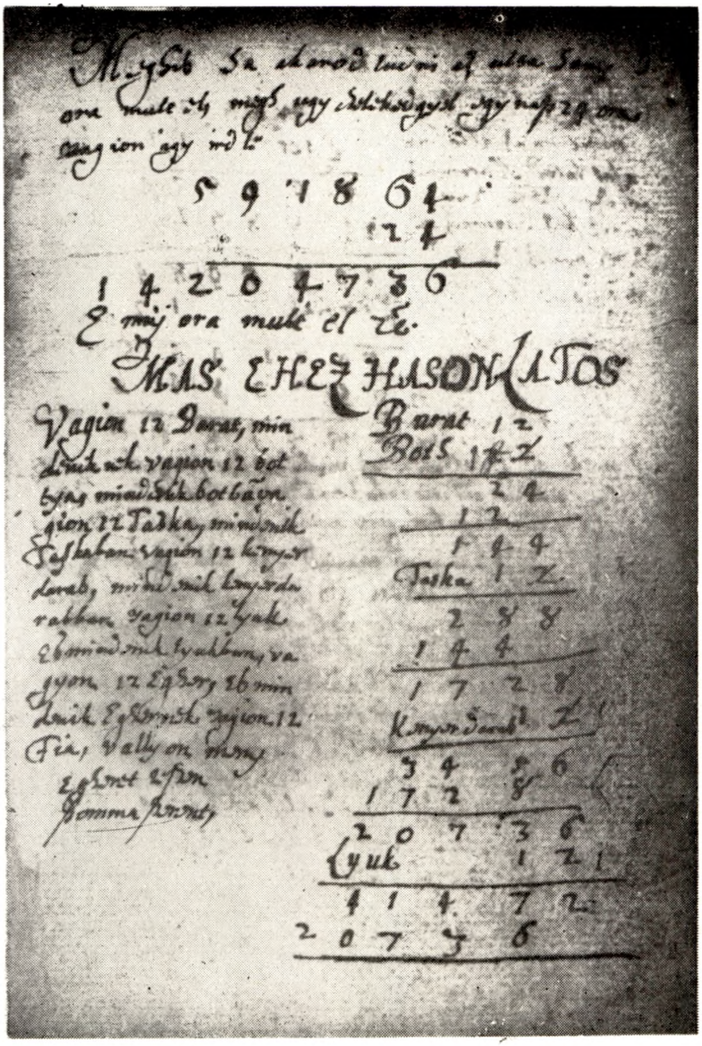
Mas példais mellyben semmi nem marad

954
463
581
1998

5. kép.

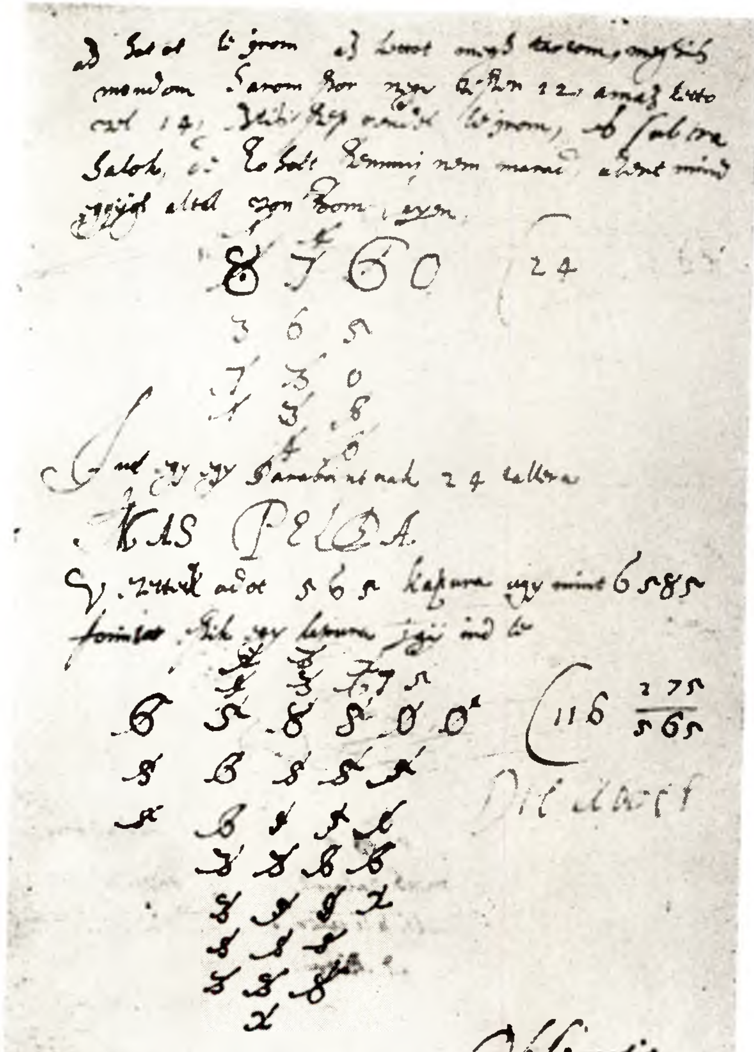


6. kép.



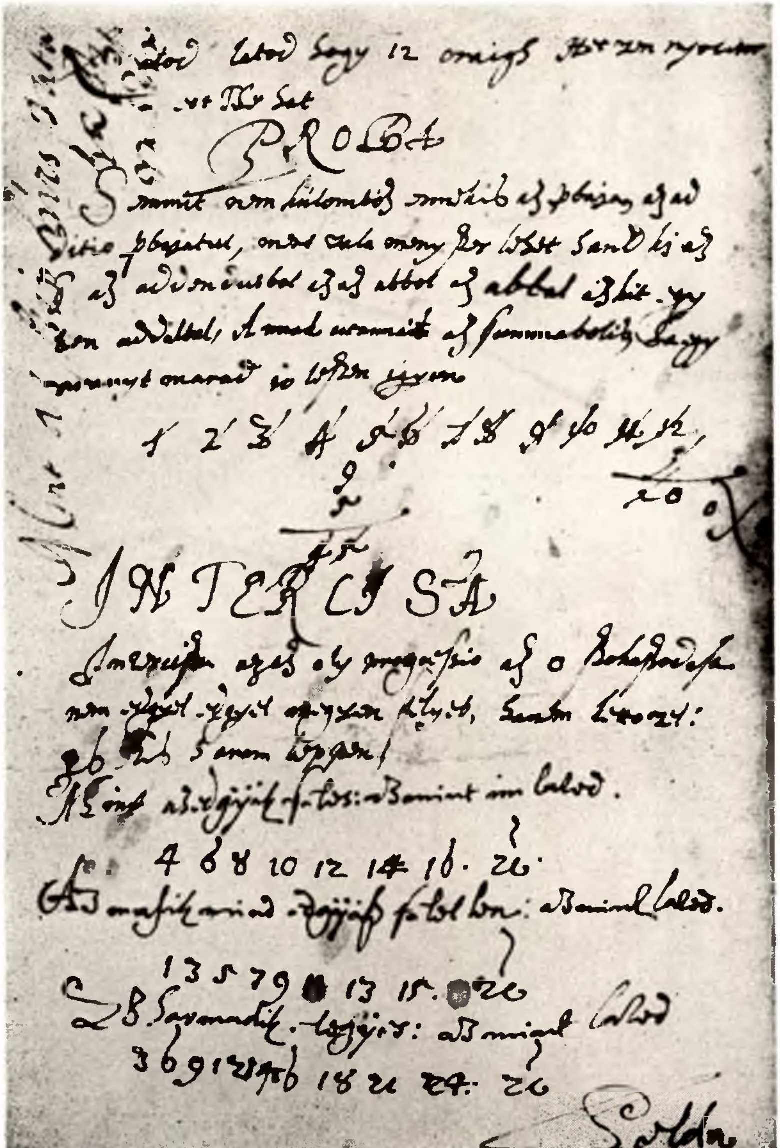
ora mult el
5 9 7 8 6 4
24
1 4 2 0 4 7 3 6
E mij ora mult el etc.
MAS EHEZ HASONLATOS
Vagion 12 Barat, min
denik nek vagion 12 bot
tya, es mindenik botban va
gion 12 Taska, minden
Taskaban vagion 12 kenyer
darab, mindenik kenyerda
rabban vagion 12 lyuk.
Es mindenik lyukban va
gyon 12 Egher, es min
denik Egheréknek vagion 12
Fia, vallyon menny
Egher lészen
Somma szerint
Barat 12
Bot 12
24
12
144
Taska 12
288
144
1728
Kenyer darab 12
3456
1728
20736
Lyuk 12
41472
20736

7. kép.


KIS PELDA.

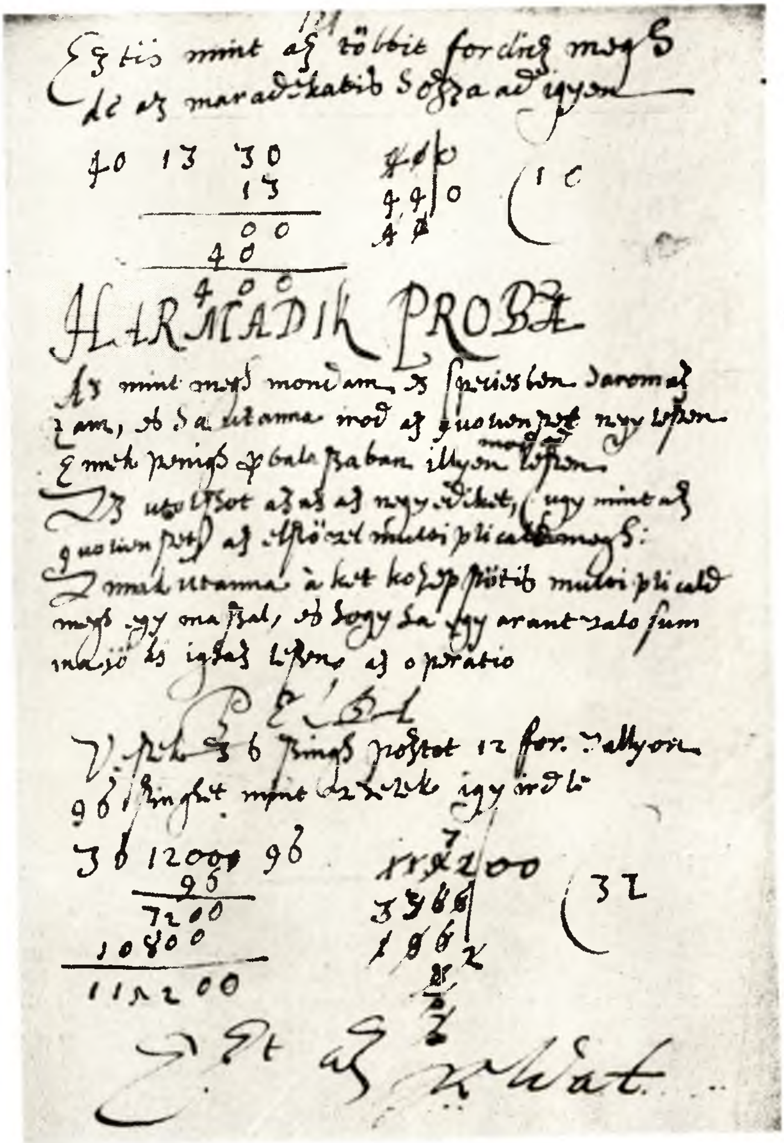
Obseruatio

8. kép.



9. kép.

10. kép.


Egy tis mint az többit fordicz megs
de az maradikabib sokra ad igyen

40 13 30
13
00
40
400

44|0
44|0
44

10

HARMADIK PROBA

Az mint megh mondam az speciesben haromaz-
zam, és ha utanna mod az quotienst nyy leszen
Ennek penigh az probaja illyen leszen
Az utolsot azaz az negyediket, ugy mint az
quotienst az elsőrül multiplicald megh:
Ismét utanna a ket kozeposőtib multiplicald
megh egy massal, és hogy ha egy arant valo sum-
ma jö és igaz leszen az operatio

Példa

V... 36 pinzh postot 12 for. vallyon
96 pinzhert mint ... igy irdle

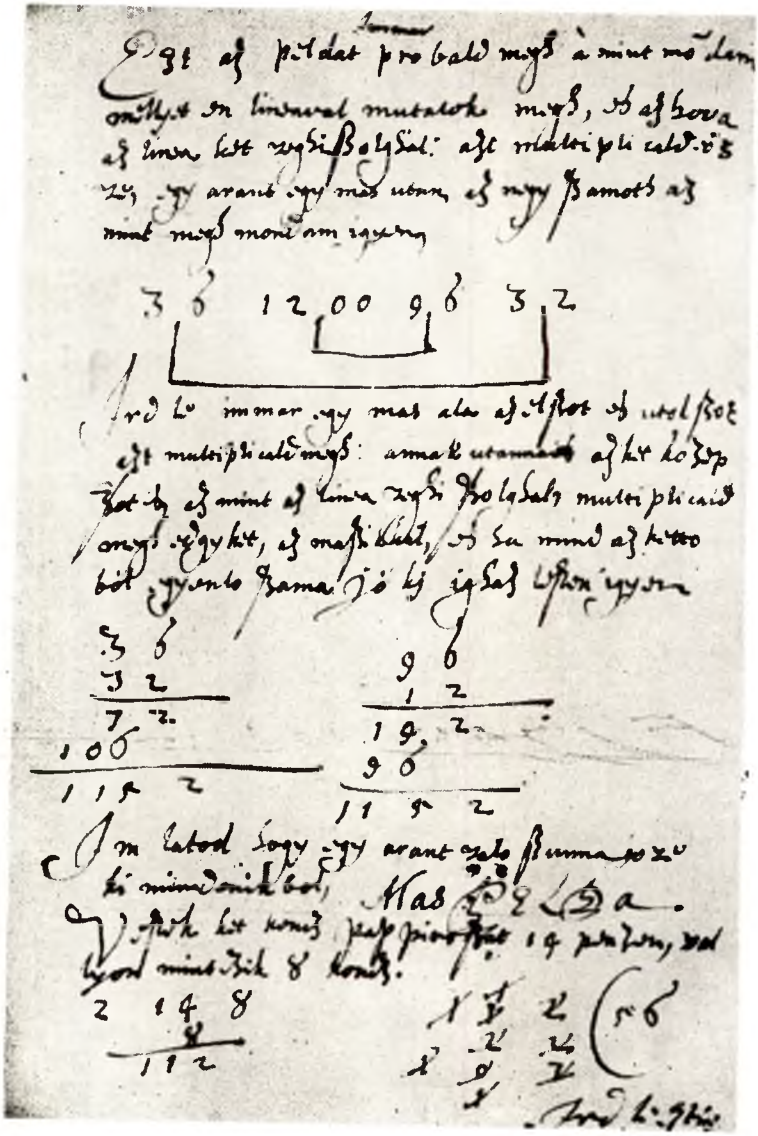
36 1200 96
96
7200
10800
115200

115200
3366
1662
3

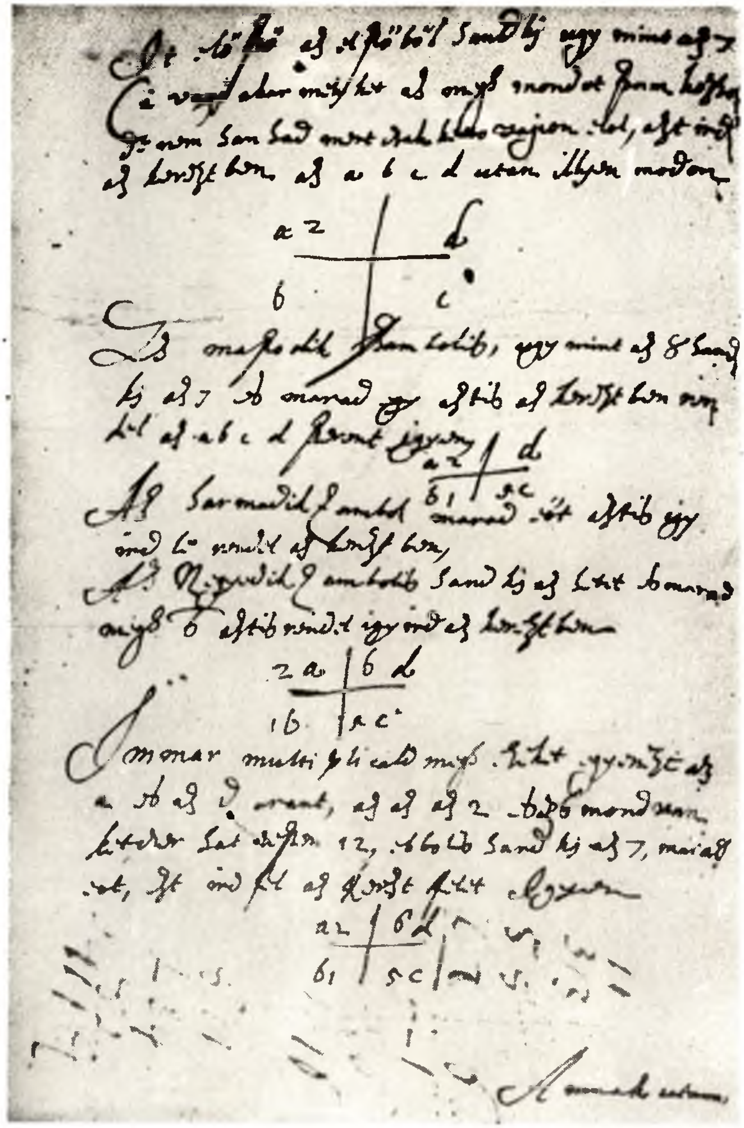
32

Ez az ...

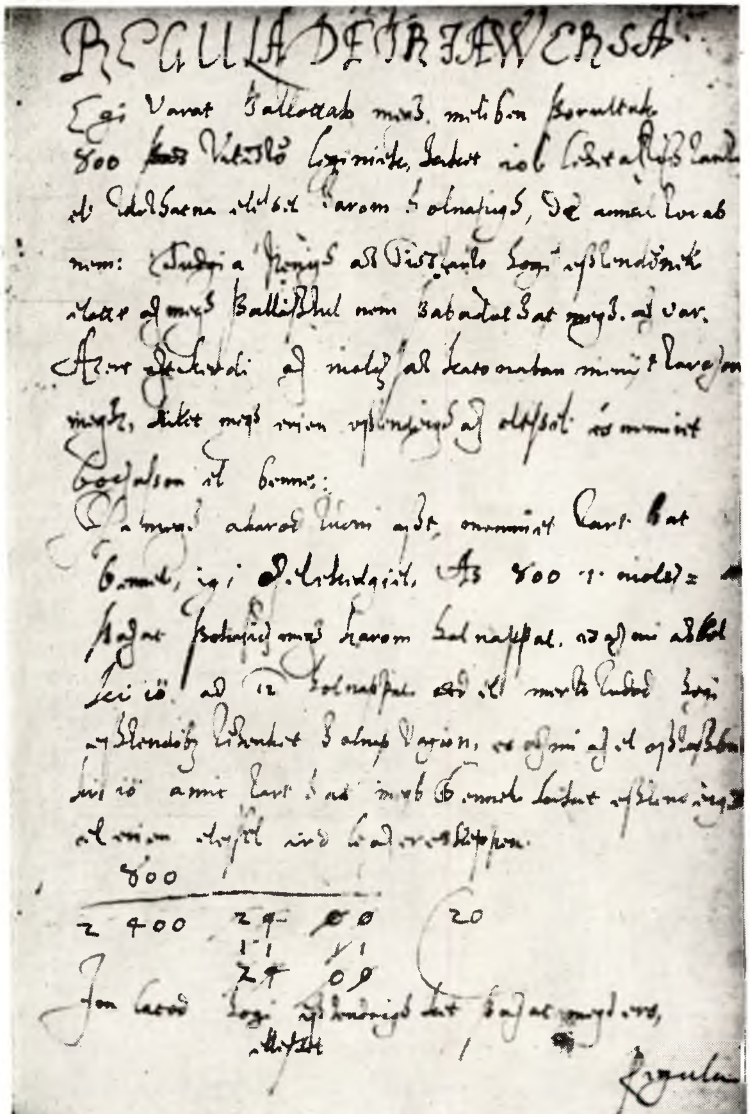
11. kép.



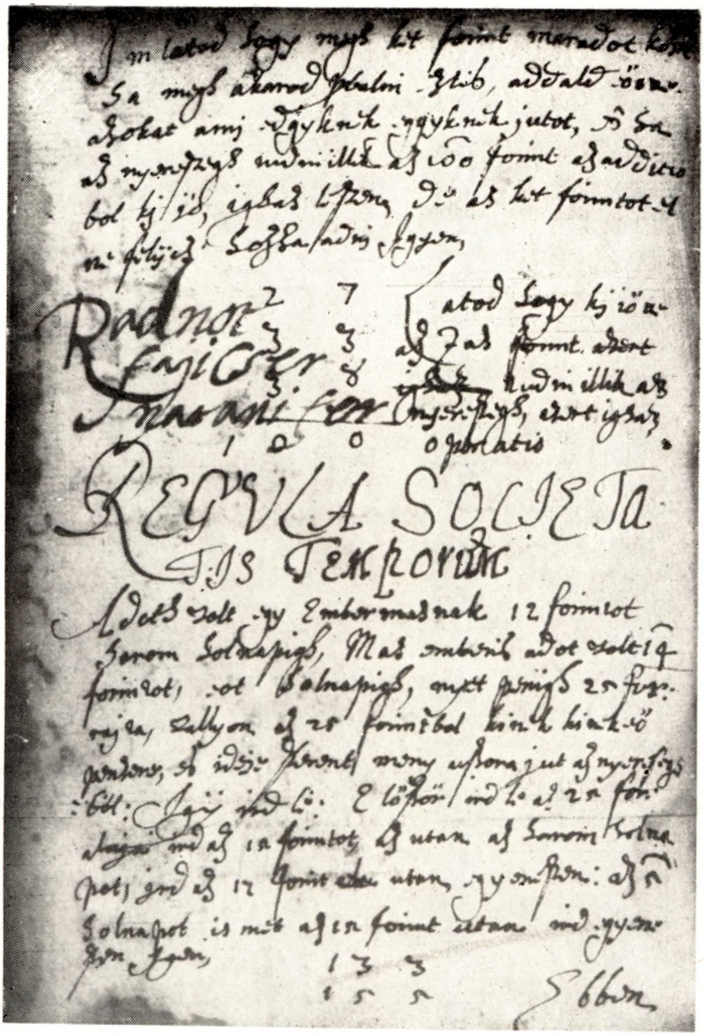
12. kép.



13. kép.

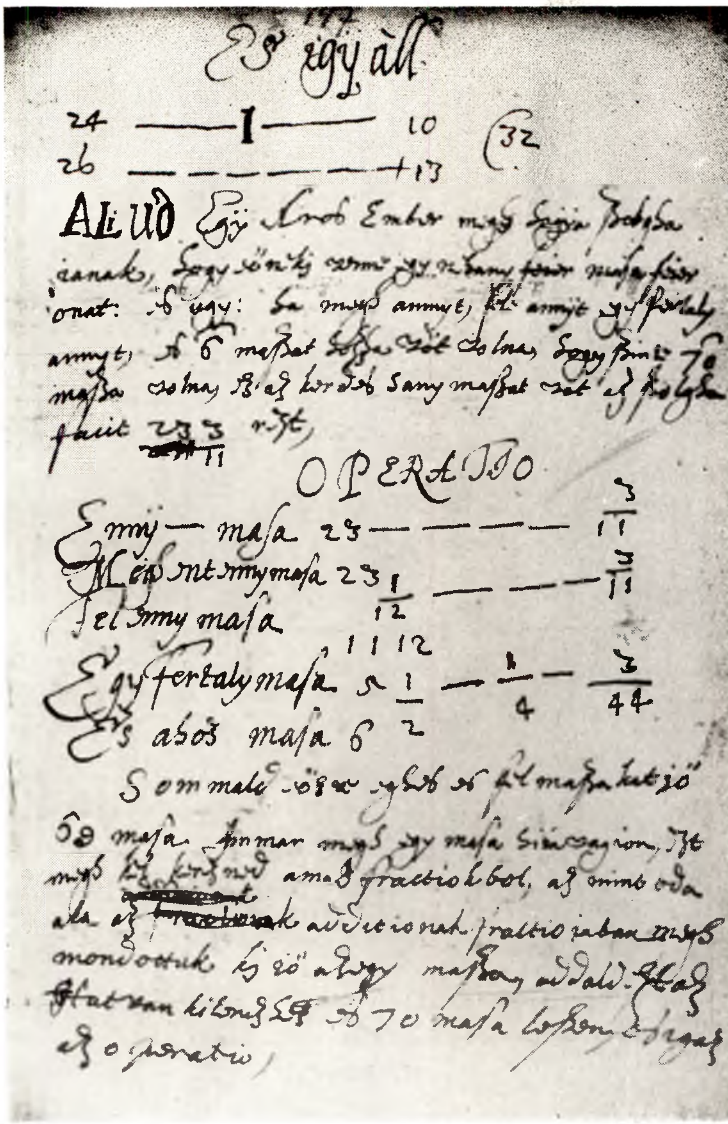


14. kép.



REGULA SOCIETATIS TEMPORUM

15. kép.


147

És egy áll

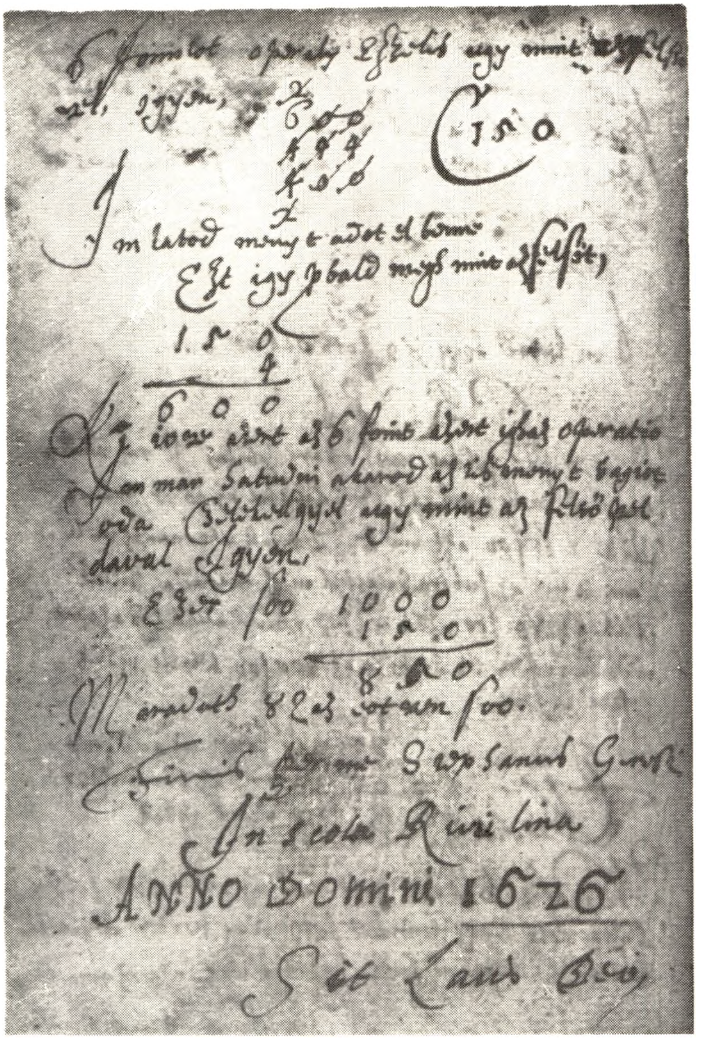
24 —— I —— 10 (32

26 — — — — — — +13

Aliud

OPERATIO

16. kép.



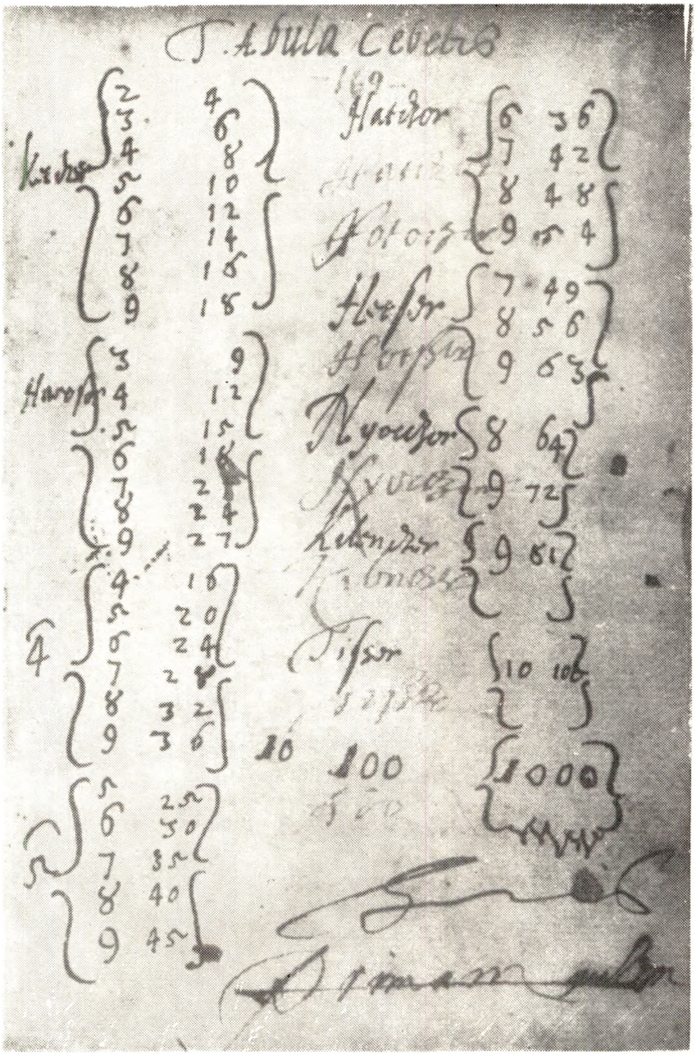
1 5 0
4
6 0 0

1 0 0 0
1 5 0
8 5 0

ANNO DOMINI 1626

Sit Laus Deo

17. kép.



18. kép.

ratio, 2. Additio, 3. Subtractio, 4. Multiplicatio, 5. De divisio, 6. In aequalis divisio, 7. Meditatio (!), 8. Progressio. Ezután kijelenti, hogy még van négy más species is, amelyekről röviden tanulunk, amelyek főképpen a kereskedőknél használatosak. Ezek: Regula Detri, Regula Vulgaris, Regula Societatis, Regula Falsi.

Már a bevezető lényeges eltérést mutat a Kolozsvári Aritmetikához viszonyítva. A Kolozsvári Aritmetika (akárcsak a Debreceni Aritmetika) bevezetőül a számvetés[5] fogalmát értelmezi. Géresi pedig a szám fogalmát. (Az zam azh semmi nem egyeb hanem oly okosagh mely az sok egynek edgybe adasabol, leszen), (2. ábra). A Kolozsvári Aritmetika 6 speciest sorol fel (a Debreceni Aritmetika 5 speciest említ), Géresi pedig 8 + 4 speciesről beszél. A Kolozsvári Aritmetikától eltérően, beveszi az In aequalis divisio[6]-t és a mediatio[7]-t is. Igaz, a mediatio-t Géresi is csak utólag iktatta be a speciesek közé, s kijavítja miatta a sorszámozást is (2. ábra). A Kolozsvári Aritmetika is, akárcsak Géresi, megemlíti még azt a négy speciest, amelyek „főképpen az kereskedőknek használnac".

Az emlitett bevezető után, fejezteket alkotva, következnek a speciesek. Az alábbi mutatótábla tájékoztat az egész mű felépítéséről:

A kézirat fejezetei

catio, 6. Mediatio, 7. Divisio, 8. Progressio, 9. Radium extractio. Progressión csak a természetes számsor összegelését értették, néha a páros és a páratlan számok sorának az összegelését, ritkán az 1, 2, 4, ... geometriai haladványt.

[5] A számítás fogalmát magyarul számvetésnek mondták évszázadokon át. Amikor eltűnt ez a kifejezés (azokkal a számoló pénzekkel együtt, amelyektől származott az elnevezés), nem tudtuk megfelelővel helyettesíteni. Így ma a számítás, számolás szavakat használjuk. De ezek nem elég kifejezőek, nem pótolják az eredetit. Legfennebb az idegen *kalkulus* szó helyettesítené a régi, kitűnő „számvetés" szavunkat.

[6] Ma arányos osztásnak mondanók. — Megjegyzem, hogy a Debreceni Aritmetika és a Kolozsvári Aritmetika is beszél inaequalis divisióról, külön fejezetben, csak a bevezető nem tesz róla említést.

[7] Felezés.

A „De numeratione" című fejezet lényegesen eltér a Kolozsvári Aritmetika hasoncímű fejezetétől, mind a numeratio fogalom értelmezésében, (Az numeratio semmi nem egyeb, hanem minden szamnak ighazan valo kimondasa), mind az utána következő bekezdések tárgyát illetően. A Kolozsvári Aritmetika felsorolja a számjegyeket. Külön kitér a zero (nulla) értelmezésére. Beszél a tíz jegy kiolvasásáról és általában a számok kiolvasásáról. Géresi ismertnek tételezi fel a számjegyeket, és csak a nagyszámok, sokjegyű számok kiolvasásával foglalkozik.

Megjegyzem, hogy két szám, amelynek a kiolvasását elemzi Géresi, előfordul a Kolozsvári Aritmetikában is. De a harmadik szám, 23/456/345/678 (3. ábra) nincs benne sem a Debreceni, sem a Kolozsvári Aritmetikában, viszont benne van a Gemma Frisius Aritmetikájában.

A „De additione" című fejezet magyarázó része és példaanyaga nem egyezik a Kolozsvári Aritmetika megfelelő fejezetével. Géresi sokkal inkább szem előtt tartja a fokozatosság elvét. Kisebb számok összeadásával kezdi, majd nagyobb számokra is kitér. Alaposabban tárgyalja az előfordulható eseteket. Nem használja a residuum kifejezést. Nem szöveges feladatokból indul ki.

Csak egy közös feladatot találtam, mely Géresinél a 9., a Kolozsvári Aritmetikában pedig a B_2 hátulsó lapján fordul elő. Egy terjedelmesebb összeadásról van szó, mely 16, csupa 9-esekből álló összeadandót tartalmaz (ez a példa megvan a Debreceni Aritmetikában is). Géresi összeadási módszere némileg eltérő. Az összeadandók nagy száma miatt, minden számoszlop összeadásakor 3 jegyű összeget kapunk. Ezeket az összegeket a Kolozsvári Aritmetika mind egymás alá írja úgy, hogy a számjegyek helyértéke ne változzék, és a végén a részösszegeket is külön összeadja. Így kezdi az összeadást Géresi is, de a harmadik, negyedik és ötödik részösszeget nem írja külön sorokba, hanem egy-egy számjegyét az előző részösszeg elé és alá teszi. Az eredményt ez nyilván nem befolyásolja (4. ábra).

Géresi az összeadóknak nem ad nevet. Az összeadást sokféleként fejezi ki: eösve adni, egy sommaba hozni, hozza adni, eösve szamlalni, eösve tenni, ahoz zamlalni, summalni.

A „Proba" című fejezet két példája ugyanaz, mint a Kolozsvári Aritmetikában. (A Debreceni Aritmetikában is előfordul az egyik példa, de utána két eltérő következik.) A 9-es próbát alkalmazza (5. ábra).

A „De Subtractione" fejezet eleje, a címmel együtt, kiszakadt. A megmaradt rész eltér a Kolozsvári Aritmetikától felépítésben, a szabályok egymásutánjában, az előfordulható esetek közül megvizsgált esetek, valamint a tárgyalt példák tekintetében is. (A példák többsége a Kolozsvári Aritmetika példáitól különbözik.) Géresi kisszámok kivonásával kezdi és elmegy a milliárdokig. Itt már Géresi is sok szöveges feladatot tárgyal (6. ábra). Kettőnél számolási hibát is ejt, az egyiket azonban (12 . 1) csak elírásnak tekinthetjük, mert a kísérő szövegben jó eredményt ír. A másik példánál (14 . 1) valóban számolási hibáról van szó, pedig ezt egyenesen Gemma Frisiustól vehette. Ez a példa nem szerepel sem a Debreceni, sem a Kolozsvári Aritmetikában, de szerepel Gemmanál. Az alábbi kivonásról va szó, melyet pontosan átveszünk Géresi kéziratából:

$$\begin{array}{r} 60021039090 \\ 29039916 \\ \hline 51991000184 \end{array}$$

A kisebbítendő utolsó számjegye nem vehető ki tisztán. Talán egy hetesre ráírt zéro. A maradék után még, elütő tintával, egy hármast írtak. Gemma Frisiusnál a B_2 lapon[8] megtaláljuk ezt a példát:

60021039097	Numerus ex quo subducitur
29039917	Subducendus
59991999180	Residuum

Géresi Aritmetikájában öt szöveg nélküli és egy szöveges feladat következik, amelyek benne vannak a Kolozsvári Aritmetikában is. Ezeket szóról-szóra, a hozzájuk fűzött megjegyzésekkel együtt, átvette.

Ezután időszámítási feladatok következnek, mert „Az esztendő szamot tudni es ighazan megh vetni tanolni ighen szep dologh," (6. ábra). Ezeket is átvette Géresi, a kommentárokkal együtt, csak a kiindulási időpontot, illetve a kisebbítendőt változtatta meg, 1591-ről 1626-ra. (Ezek a feladatok a Debreceni Aritmetikában nincsenek meg.)

A kivonni fogalmat többféleként nevezi: ki lopni, ki vinni, ki venni, subtrahalni.

A „Proba" című fejezet szószerint egyezik a Kolozsvári Aritmetika megfelelő fejezetével. A kivonásnak kétféle próbáját adja: az összeadást és a 9-es próbát. Kisebb másolási hibán kívül két kivonást Géresi hibásan végez el. Pedig a kettő közül az egyik előfordul a Kolozsvári Aritmetikában is. A másik is csak annyiban különbözik, hogy a kisebbítendőt Géresi megváltoztatta.

$$\begin{array}{r} 1490 \\ 1443 \\ \hline 53 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1626 \\ 1490 \\ \hline 116 \end{array}$$

[8] Gemma Frisius Aritmetikájának 1574-i, wittenbergi kiadására hivatkozom. Ebből egy példány van a kolozsvári Egyetemi Könyvtárban, és ez állott a rendelkezésemre.

A „De multiplicatione” című fejezet nagyobb része szóról-szóra egyezik a két aritmetikában. Géresi kéziratából itt megint kiszakadt egy lap, csak egy kisebb csonkja maradt meg. A csonk tanúsága szerint a kiszakadt lapon egy „Tabula Pithagorica” volt, amit Géresi „Pithaghoras Tablaia”-nak is és „eczer egy”-nek is nevez. Utána példával illusztrált szabály következik, arra vonatkozóan, hogy a szorzótábla eredményeit miként számíthatjuk ki (Regula pigrorum, lusták szabálya, a Kolozsvári Aritmetikában). Ez a szabály a Kolozsvári Aritmetikában hátrább van, Géresinél érthetően közvetlenül a szorzótábla után. Valóban itt is a helye. Ezt a szabályt csak 5 × 5-ön felüli eredmények kiszámítására szokták és érdemes alkalmazni, ugyanis azoknak kíván a segítségére lenni, akik a szorzótáblát csak az 5-nél kisebb számokra nézve ismerik. Géresi nem látja a szabály értelmét. Először a szabály segítségével kiszámítja 8 × 8-at

$$\begin{array}{cc} 8 & 2 \\ 8 & 2 \\ \hline 6 & 4 \end{array} \qquad (2 \times 2 = 4,\quad 8 - 2 = 6).$$

Nagyobb betűkkel utána írja „Az teöb peldakkalis igy cselekedgyel”, azután pedig a szabályt alkalmazza 2 × 2 kiszámítására. Nyilván nehézségekbe ütközik, és kiegészítő szabályhoz folyamodik. Úgy látszik, Géresi nemcsak a szabály értelmét nem látja, hanem ráadásul csak a négyzetre emelésre gondolja alkalmazhatónak.

A további példák részben egyeznek a két aritmetikában. Csupa szöveges feladattal találkozunk. Géresi kiszámítja a szolgák, kapások, katonák fizetését, ökrök árát, „gallos giolcs” árát, „egy Bal karafiat” árát, egy esztendő óráinak számát, hány hét, nap és óra telt el Krisztus születése óta.

A következő feladat benne van mind a Debreceni, mind a Kolozsvári Aritmetikában is (39. lap, lásd 7. ábra) : „Vagion 12 Barat, mindeniknek vagion 12 bottya, mindenik botba vagion 12 Taska, mindenik Taskaban vagion 12 kenyer darab, mindenik kenyerdarabban vagion 12 lyuk es mindenik lyukban vagion 12 Egher, es mindenik Eghernek vagion 12 Fia, vallyon meny egheret teszen somma szerent,”. Ez a feladat nagy népszerűségnek örvendhetett, mert megtaláljuk a Páriz Pápai Ferenc 1667-ből származó kéziratos latin nyelvű aritmetikájában is, mégpedig kivételesen magyar nyelven, egy külön lapon. Megtaláljuk ezt a feladatot Lugosi Ferenc 1669-ből származó kézirásos aritmetikájában is (a sepsiszentgyörgyi volt Mikó Kollégium könyvtárában).

Amint már említettem, találkozunk olyan feladatokkal, amelyek természetesebb, ésszerűbb sorrendbe iktatását Géresinél találjuk. Ha feltételezünk egy közös ősforrást, melyből a Debreceni Aritmetika, a Kolozsvári Aritmetika és Géresi is meritettek, azt lehetne mondani, hogy Géresi közelebb van az ősforráshoz.

Géresinél olyan hibákkal is találkozunk, amelyek azt bizonyítják, hogy másolt. Találkoztunk kivonással, amelynél a kivonandót hibásan írja, de a kísérőszövegben jó eredmény szerepel. Az egyik szorzásnál is az egyik részszorzat hibás, az eredmény mégis helyes. Lásd Géresinél a 34. oldalon:

$$\begin{array}{r} 200 \\ 16 \\ \hline 4880 \\ 200 \\ \hline 3200 \end{array}$$

Ugyanezt megtaláljuk a Kolozsvári Aritmetika C_7 lapján is. Háromszor írja le Géresi a 340 × 20 szorzást. Egyik esetben tévedésből 340 helyett 240-et ír, de az eredmény helyes. Egy másik példánál, a 17-es szorzó helyett 14-et ír, de az eredmény mégis jó.

A két aritmetika ezen fejezeteinek a példái nagyrészt azonosak. Géresi 15 példája közül mindössze 4 nincs meg a Kolozsvári Aritmetikában, és csak 3 olyant találunk a Kolozsvári Aritmetikában, amelyek nincsenek meg Géresinél.

Befejezésül beszél „Ennek az speciesnek a probaja"-ról, de nem új fejezetben. Ez a rész is többnyire szóról szóra egyezik a Kolozsvári Aritmetikával. A 9-es próbát a Kolozsvári Aritmetika két példán mutatja be. Géresi csak az elsőt veszi át. Utána beiktat egy „Cautio. 1. mely az probalasban igenszük 'segh." Ebben arra figyelmeztet, hogy a számjegyeknek nem a helyértékét vesszük figyelembe. Ez a pár sor nincs meg a Kolozsvári Aritmetikában. A szorzás második próbájaként az osztást említi. Géresi a Kolozsvári Aritmetika ide vonatkozó két példája közül csak az egyiket veszi át. Viszont a próbát kétféleképpen is elvégzi. (Osztja a szorzatot a szorzandó- és azután a szorzóval is.)

A „De divisione" című fejezet néhány soros bevezetője, mely értelmezi az osztást, a „dividendus"-t (osztandó szám-nak is nevezi), a „divisor azaz oszto-szam"-ot és a „quotiens"-t, különbözik a Kolozsvári Aritmetika megfelelő bekezdésétől. Géresi a Kolozsvári Aritmetikától eltérően azt is kiköti, hogy az osztandó legyen nagyobb, mint az osztó (a kikötés benne van a Debreceni Aritmetikában is.).

A két mű között más eltéréseket is találunk. Géresi 6 „Observatio"-ja közül csak egy van meg a Kolozsváriban (és a Debreceni Aritmetikában). Ezek az osztónak az osztandó alá való elhelyezésére vonatkoznak, a különböző esetekben. Továbbá Géresi hat regula és három observatioja szintén nincs meg a Kolozsvári Aritmetikában (sem a Debreceni Aritmetikában). Ezek az osztási művelet menetét írják le.

Ezt követi egy feladat, amelyen Géresi az osztást mutatja be. A Kolozsvári Aritmetika egyenesen ilyen numerikus feladattal kezdi. Géresi összesen 18 példát old meg, és másik haton az osztás próbáját mutatja be. A 18 példa közül 6 nincs meg a Kolozsvári Aritmetikában; viszont az utóbbinak 2 példája nincs meg Géresinél. A Kolozsvári Aritmetikában a próbát két példa illusztrálja, s az a kettő megvan Géresinél is. Az is előfordul, hogy Géresi a Kolozsvári Aritmetikában szereplő adatokhoz más szöveget ír, ami az osztást nem befolyásolja.

Géresi két másolási hibát is ejt. Egy osztás eredményéből kifelejt egy számjegyet, más helyen pedig egy számjegyet elír, az eredmény mégis helyes.

Az osztás próbájakén Géresi ismerteti a 9-es próbát és a szorzást, a Kolozsvári Aritmetika viszont csak a szorzást.

A „De divisione in aequli" (kifelejtette az *a* betűt) fejezet lényegében egyezik a Kolozsvári Aritmetika megfelelő fejezetével. A mondatok sorrendje is majdnem ugyanaz, de megfogalmazásuk eltér. Mind a két mű, egyetlen és ugyanazon a példán mutatja be az arányos osztást.

A következő fejezet „De meditatione" (Géresi következetesen mindig meditatio-t ir mediatio helyett), nincs meg a Kolozsvári Aritmetikában. A bemutatott példa megvan a Gemma könyvében. Géresi az osztandóban egy számjegyet tévesen ír, de azért ugyanaz az eredménye, mint Gemmának. (Megjegyzem, hogy Gemma Aritmetikájának kezemben lévő kiadásában, ugyancsak hibásan van nyomva egy másik számjegy, s az eredménye mégis egyezik a Géresiével.)

A „De progressione" fejezetnek feltűnően nagy betűkkel írta a címét. Itt Géresi bevezetője valamivel hosszabb, mint a Kolozsvári Aritmetikáé. Értelmezi a haladványt, megfogalmazza a naturalis progressio összegének kiszámítására szolgáló általános szabályt, melyet a Kolozsvári Aritmetika csak egy példával mutat be. A szabályt négy példa követi, melyek közül az első nincs meg a Kolozsváriban. Géresi alábbi feladata: „Ha megh akarod tudni egy oratol 12 oraigh hanszor eot az ora: igy csekedgyel,", nincs meg a Kolozsvári Aritmetikában (sem a Debreceni Aritmetikában), de megtaláljuk Gemmanál, mégpedig könyve végén, az „Appendix" című fejezetben, melyben szórakoztató feladatokat közöl. Gemma nem végzi el a számításokat, csak a végeredményt közli, de az is különbözik a Géresiétől, mert ő egész napra számítja ki az ütések számát, és olyan óráról beszél, amely 1-től 24-ig üti az órákat.

Az „Intercisa" című fejezetben Géresi a számtani haladványt, ha a különbsége egységnyi, progressio naturalis-nak, ha a különbsége kettő vagy három, intercisa-nak nevezi (9. ábra). Ezt a felosztást megtaláljuk a Kolozsvári Aritmetikában is. (Sem a Debreceni Aritmetikában, sem Gemmanál nincs meg ez a felosztás.) A Kolozsvári Aritmetikához hasonlóan, az utóbbiak között megkülönböztet: felest (páros), feletlent (páratlan) és elegyest. Ez a fejezet majdnem szóról-szóra egyezik a Kolozsvári Aritmetika megfelelő szövegével, a különbség mindössze annyi, hogy a végén, Géresi elhagy némi magyarázatokat és a műveletek próbáját. Megjegyzem, hogy Géresi az intercisa-nál, a progressio végére mindig egy jelt tesz, amit máshol nem láttam (9. ábra).

„Az Geometrica progressiorulis" fejezet anyaga csak annyiban tér el a Kolozsvári Aritmetikától, hogy Géresi néhány sort kihagy, nem tartja szükségesnek, hogy egymás mellé írjon egy aritmetikai és egy geometriai haladványt.

„A rostelyos ablakoknak megh vetisirül" című fejezet (10. ábra) szövege eltér ugyan a Kolozsvári Aritmetikától, de utóbbi szövegének hatása szinte mondatról mondatra követhető. Kisebb rácsot rajzol, mint a nyomtatott könyv. Próbát is tartalmaz. Más úton számolja meg a lyukak számát.

A 92. lap után egy hiányzik, majd a következőn a geometriai haladványt alkalmazza. Kiszámítja egy ló patkószegeinek az árát : ha az első szeg ára 1 fillér, a második 2 fillér, a harmadik 4 fillér stb.

„Regula Detri sew Aurea : Regula Mercatorum" a következő fejezet címe, akárcsak a Kolozsvári Aritmetikában. (A Debreceni Aritmetikában csak Regula Detri). Géresi, eltérően a Kolozsvári Aritmetikától megmagyarázza, hogy „ezt az zamvetok hijak aureanak, az az Arany regulanak, nem egyebert hanem azeö sok hasznaert". Ez az értelmezés nincs benne a Gemma könyvében, de megtaláljuk pl. J. Simon-nál. Azt is megmagyarázza, hogy miért hívják Detri-nek. Ez a magyarázat teljesen eltér a Kolozsvári Aritmetika magyarázatától. Még megjegyzi : „Tovabba hijak kalmarok regulajanak is, miert hogy ezzel a regulaval feökeppen az kalmarok, az kereskedo Emberek elnek". Ez a magyarázat sincs benne a Kolozsvári Aritmetikában, sem a Gemma könyvében.

Géresi a továbbiakban is eltér a Kolozsvári Aritmetikától. A példákhoz fűzött magyarázat gyakran eltérő mondatokkal történik. Valamivel rövidebben intézi el a magyarázatot. A Kolozsvári Aritmetika példáit is idézi, de másokat is közöl. A feladatokat a Kolozsvári Aritmetika mintájára osztlyozza. Ilyen címeket ad : „Különb különb Peldak az Regula Detriben es legelőszoris buzarul", „Baal es Posztorul valo Peldak". Vannak a Géresi Aritmetikájában olyan feladatok is, amelyek nincsenek meg sem a Kolozsvári Aritmetikában, sem Gemmánál, például a 103. lap két feladata. Ime az egyik : „Mikoron egy paraszt Ember teneked ilyen szamot adna elodben fogattam egy hazat ezdenigh berben, hat for : laktam benne 32 hetigh, Akarnam meghtudni menyt kellyen fizetnem az 32 hetigh". Előfordul az is, hogy a feladat szövegében egy adat nem egyezik a Kolozsvári Aritmetikáéval, de a megoldásban visszatér a Kolozsvári Aritmetikában lévő adat (102 lap). A 106. lap feladatának a szövege eltér a Kolozsvári Aritmetikában éppen soron következő feladat szövegétől, a megoldás viszont egyezik. Ugyancsak a 106. lapon egy osztásnál Géresi hibásan más eredményt kap, mint a Kolozsvári Aritmetika. A feladatok sorrendje is eltérést mutat.

A Kolozsvári Aritmetikában a sok példa után a H_3 lapon olvassuk : „Ezekből az meg irt kůlömb kůlömb féle példákból, és az fellyůl meg mondot soc tanulságokbol, hogyha szorgalmatos lész, annyira elö mehetz benne, hogy az után tennen feyedtöl akar melly nagy példákat is gondolhatz. Es házad szůkségére valót meg vethetz. Légyen ezokáért most elég". (A Debreceni Aritmetikában nincs semmi megjegyzés). Géresinél a 115. lapon ezt találjuk : Ezekből a megh mondot es irt peldakbol akar mely nagy peldakat is meg vethecz de ugy hogy ha szorgalmatos les benne, hogy hamar fejedbol ki nebocsasad". A Debreceni Aritmetika csak egyféle próbát közöl erre a speciesre, a Kolozsvári Aritmetika és Géresi négyfélét (Gemma egyet sem emlit), éspedig : a) Mivel szorzási és osztási műveletek fordulnak elő, elvégzi ezeknek a próbáját, a 9-es próbát. Géresi bővebben beszél ezekről, mert elismétli a szabályokat is. Illusztráló példája ugyanaz mint a Kolozsvári Aritmetikáé, csak más adatokat iktat be. b) A második féle próba (megcseréli az első és harmadik számot) példája már különbözik a Kolozsvári Aritmetikában lévőtől. Géresi négy példával is megvilágítja ezt a próbát. c) A próba az aránypár azon tulajdonságán alapszik, hogy a beltagok szorzata egyenlő a kültagok szorzatával. A felhozott példák egyeznek (11. és 12. ábra). d) A negyedik féle próbát mindkét mű ugyanazon a példán mutatja be. Itt meglepő jelenséggel találkozunk: a példa szövege nincs meg a Kolozsvári Aritmetikában, csak a megoldás. A példa szövegét Géresinél találjuk meg. Azt is megállapíthatjuk, hogy ebben a fejezetben Géresi nagyobb gondot fordít a példákra. Meglepő az a körülmény is, hogy a Kolozsvári Aritmetika és Géresi is, mint ismert eljárást — melyet az additionál is szokás alkalmazni — említi a 9-es próbán kívül a 3-as, 7-es és 11-es próbát is, jóllehet megelőzően ezekről nem volt szó (13. ábra).

„Az Regula Detrinek Fractioja" című fejezet beiktatása meglepő, mert eddig a kézirat egyáltalán nem beszélt törtekről. A Debreceni Aritmetikában is hasonló fejezet következik: „Az Regula Detrinec Fractioiarol". Utóbbinál érthető, mert eddig is párhuzamosan tárgyalta a törteket az egészekkel. A Kolozsvári Aritmetika csak a könyv vége felé, a törtek tárgyalása után iktat be fejezetet, „De Fractionum Regula Detri" címen.

Géresi kéziratában ennek a fejezetnek a bevezetője feltűnő módon hasonlít a Debreceni Aritmetika megfelelő fejezetének a bevezetőjéhez. Először értelmezi a törtet: „Az fractio semmi nem egyeb hanem valamely zamnak rezre valo szeghese". Ugyanígy kezdi a Debreceni Aritmetika is: „Az Fracctio semmi nem egyeb hanem ha valamell' egész szamnac részre valo szegése". A továbbiakban is hasonlít a két fejezet bevezetője. A Kolozsvári Aritmetika bevezetője teljesen eltérő. A Géresinél szereplő két feladat hasonlít a Debreceni, illetve a Kolozsvári Aritmetikában szereplő két feladathoz, csak az adatokat változtatta meg. Géresi megkerüli a törteket. A vegyes számokat átalakítja felekké, illetve negyedekké (fertályokká) és tovább a törtrészek számával mint egészekkel dolgozik. Tehát nem úgy oldja meg ezeket a feladatokat, mint a másik két aritmetika.

Továbbmenve, Géresi beiktat egy „Regula Detri awersa[9]" című fejezetet (14. ábra). Ez a fejezet nem szerepel sem a Debreceni, sem a Kolozsvári Aritmetikában. Géresi ezt a szabályt, szokásától eltérően, minden értelmezés nélkül egy feladaton mutatja be. Hasonló feladattal a Gemma könyvében találkozunk, de ott más adatok szerepelnek.

A „Regula wlgaris" fejezet hasonlít a Kolozsvári Aritmetika megfelelő fejezetéhez. Az első példában csak az adatok különböznek. Meglepő, hogy a különböző adatok ellenére, a Kolozsvári Aritmetikában is a Géresi-féle adatok szerint oldják meg a példát. A második példa, megoldásával együtt, mind a két könyvben azonos.

A „Regula Societatis" című fejezet bevezetője eltér a Kolozsvári Aritmetikától. Utóbbi ezt a szabályt csak egy példán mutatja be, Géresi pedig kettőn. Az ő második példája egyezik a kolozsváriéval, bár a számítások csak részben azonosak, s a kísérőszöveg eltérést mutat. Géresi magyarul is közli a feladat nevét: „az tarsasagnak regulaja".

A „Regula Societatis Temporum" fejezet (15. ábra) igen hasonlít a Kolozsvári Aritmetika megfelelő fejezetéhez. Géresi egyetlen példán mutatja be a szabályt, elvégzi a művelet próbáját, majd magyarázatot fűz

---

[9] Fordítva arányos mennyiségek hármas szabálya.

hozzá. Ebben teljes az egyezés. A Kolozsvári közöl egy második példát is. A közös példa szövegében Géresi egy adatot tévesen ad meg (15 helyett 14), a kidolgozásban mégis pontosan a Kolozsvári Aritmetika szerint halad. A kísérő szövegben is van hiba, a számítás ennek ellenére egyezik. Hárs[10] megállapítja, hogy az arányszámok hibásan vannak kiszámítva. Ezek a hibák változatlanul szerepelnek Géresinél is. (Benne vannak a Debreceni Aritmetikában is.)

A „Regula Falsi sew Positionũ" című fejezet ugyszólván szószerinti egyezést mutat a két műben.

„Nem azirt hivattatik ez Regula hamisnak hogy hamisra tanitana, hanem hogy ket hamis szambul egy igaz talaltatik megh az positio szerint. (neveztetik Regula Positionum miirt hogy ket szamnak le irasabul iũ ki az facit)"

A Kolozsvári Aritmetika I_4 lapján, nyomdahiba folytán, a számítás szokásos vázlatára 16 helyett 26-t, 12 helyett 13-at és 22 helyett 32-t nyomtak. Géresi is 26, 13 illetve 32-t ír (16. ábra), átveszi a sajtóhibákat. (Talán mégis egy nyomtatott könyvből másolt!?) Megjegyzem, hogy a Debreceni Aritmetikában helyes adatok szerepelnek.

A Kolozsvári Aritmetika I_4 lapján, Operatio címszó alatti táblázaton a betűvel írt szavak és a számjegyek egy sorban vannak. A rossz nyomás következtében egyes számjegyek lennebb csúsztak, a vegyes számoknak is az egész részei távolabb és lennebb kerültek, mint ahogy kellett volna. Géresi ezeket a durva nyomdahibákat is átveszi. Egyik vegyes számnak az egészeit egy sorral lennebb, a tört rész nevezője mellé írja (16. ábra).

Géresi, akár a Kolozsvári Aritmetika, a második példa megoldásánál ezt mondja: „ezt megh kel keresned amaz fractiokbol, az mint oda ala az additionak fractioiaban megh mondottuk" (16. ábra). Benne van ez a kifejezés a Debreceni Aritmetikában is. Ott jogosan, mert az előzőkben már tanította a törtek összeadását. De sem a Kolozsvári Aritmetika, sem Géresi az előzőkben még nem tanította a törteket, tehát azokra jogosan nem is hivatkozhattak.

A Kolozsvári Aritmetika megrója a Debrecenit a tört-számításai miatt; szerzőjéről megállapitja, hogy „igen sleit számuető vólt". De ő is átveszi a hibás számítást a Regula Societatis Temporum-nál, amint említettük. Ebben a fejezetben is, az I_5 lapon a szokásos vázlatnál

$$\left.\begin{matrix}16 \text{---}+\text{---} 10\\ 1 \text{---}+\text{---} 5\end{matrix}\right\} 5$$

is átvesz egy nyomdahibát a Debreceni Aritmetikából: 1 helyett 14 kellene hogy legyen (s még a különben figyelmes Hárs sem igazítja helyre ezt a hibát). Géresi átveszi ezt a hibát is. Úgy tűnik, mintha az aritmetikának ebben a részében Géresi bizonytalanul mozogna: szolgai módon másol. Ennek a feladatnak a végére odaírja, akárcsak a Debreceni és a Kolozsvári Aritmetika is: „es igaz az operatio", saját maga, vagy a hallgatója, illetve olvasója meggyőzésére.

[10] H á r s, i.m., 131. lap.

A 144., 145. lapokon Géresi a plus és minus jelét éppen úgy rajzolja, mint ahogy a nyomda kihozta, legtöbb esetben ugyanannyi vonaldarabból rakja össze a hosszú vízszintes vonalát, a minus illetőleg a plus jel vízszintes vonalát. (Nem ismeri a plus és minus jelét ? !)

A következő lapon, a 149.-en, egy fél mondat, 9 szó, egészen elütő tintával van beírva. Ilyen tinta egyebütt nem fordul elő. Mintha Géresi valami okból kifolyólag írás közben átugrotta volna ezeket a szavakat és utólag írta volna be.

A következő rövid, pár soros fejezetek, „Az Nemet Penzrol", „Az Magiar Penzrul", „Az Masa szamrol", „Magiar Fontrol", „Az Magyar Fertonrol", „Az Nemet Masarol es Fontrol", „Az Nemet Fontrol es Lothrol", szóról-szóra megegyeznek a Kolozsvári Aritmetikában levő, ugyanilyen sorrendben következő fejezetekkel. A különböző pénznemek és a különböző súlyegységek közötti váltószámokat[11] tartalmazzák. Több másolási hibára bukkanunk bennük. „Harminc nyolcad fel" helyett „nyolcad fel", „fertaly" szó kimaradt egy helyen, $4\frac{1}{16}$ helyett $42\frac{1}{6}$ — t ír, $2\frac{1}{12}$ helyett $2\frac{1}{2}$ — t ír. A Kolozsvári Aritmetikában egyik helyen „nyolcadrész" helyett negyedrészt nyomtak. A hibákat Géresi is átveszi.

A következő fejezet címét Géresi nagy, feltűnő betükkel írja : „Lusus aritmeticus". A cím ugyan nincs meg sem a Debreceni, sem a Kolozsvári Aritmetikában, de a cím után következő szöveg megvan. Arról beszél, hogy „Ha megh akarod tudni a tarsodnak erszenyeben hagy penz legyen: igy cselekedgyel". A fogalmazás eltér a Kolozsvári Aritmetikáétól. Némileg eltér a számítások során is, habár ugyanazt az eljárást tárgyalja.

A továbbiakban „Alius Lusus" címen új szabályt is közöl : „Hogy az mastol megh gondolt szamot megh tudhassad". Ez a szabály nincs benne sem a Kolozsvári, sem a Debreceni Aritmetikában.

E fejezet végére a szerző odaírta : „Finis", de a következő lapon új címet találunk : „Keövetkeznek immar Külömbfele dirib darab Peldak es eloszoris Bor Tizedről es kilenczedrol", (a Bor szó helyett először Buza volt írva és arra ráírta az új szót). Ez a kézirat utolsó fejezete. Feladatait nem találjuk meg az említett aritmetikákban. Íme néhány feladat : „Mikor egy dezmas alavalo tartozo hegyben talaltatnak megh zaz hordo borok azt az dezmas megh tizedelne, Annak utanna el iutna a patvaros kilenczedesek, es kilenczedelne illyen modon". A megoldás után hozzáfűzi : „Ezen modgja vagion az gabona Tizednek is es kilenczednek,".

„Mas Pelda zolganak valo Fizetes, Egy ember foghadot volt eztendeigh egy szolgát R 3 de el akaria boczatani mert igen rest es morgho, szolgalta penigh 3 hetigh Akaria megh tudni az Ember mit erdemel az harom hetigh az harom fonrintbol, igy cselekedgyel",

---

[11] A krajcárokra vonatkozó váltószámokat nem adja a Debreceni Aritmetika, illetve, Kolozsvári Aritmetika, sem Géresi, elég pontosan. Hárs megjegyzi (136. lap): „Úgy látszik a krajcárokkal — a szegény ember pénzével — könnyelműen bántak el váltószám tekintetében. E váltószámok nem mind sajtóhibából erednek, hanem valószínűleg ezeket használták a gyakorlatban."

„Mas külömb Pelda. Egy ember kuldot volt az szolgaiatol az fel fodre harom zasz soth, hatta volt neki hogy minden soth 18 penzen adgion el, de mind el nem athata. Hozot ezert az so arraban haza 38 forintot megh akarja azert tudni hany sot hagiot oda es menyt adot ell, :"

Az utolsó feladatot a szerző idézett a'áírása és keltezése zárja (17. ábra). Az utolsó, 169. lapon (18. ábra) egy Tabula Cebetis-t találunk, — szorzótáblát, olasz módra, a Kolozsvári Aritmetika szerint.

ARITMETICA LUI GÉRESI
(Rezumat)

In Biblioteca de documentare „Bolyai" din Tg. Mureş s-a păstrat un manuscris aritmetic redactat de Ştefan Géresi, în anul 1626, la Baia Mare. Prezenta lucrare se ocupă de acest manuscris, în următoarele capitole:

I. Descrierea manuscrisului.
II. Structura şi cuprinsul Aritmeticii lui Géresi.
III. Compararea Aritmeticii lui Géresi cu aritmeticile contemporane.
IV. Istoricul manuscrisului.
V. Insemnătatea manuscrisului.

Apendice:

Dezvoltarea învăţămîntului aritmeticii. Aritmeticile şi operaţiile aritmetice mai înainte şi pe vremea lui Géresi.

I. Aritmetica manuscrisă a lui Géresi este o carte de format mic (in octavo), legată în piele şi cuprinde 169 pagini (vezi fig. 1). Pe pagina 166 citim: "Finis per me Stephanus (!) Geresi In scola Rivulina Anno Domini 1626 Sit Laus Deo" (Terminat de mine Ştefan Géresi In şcoala rivulină In anul Domnului 1626) (fig. 17). Data redactării, anul 1626, apare şi pe paginile 167 şi 168. Această dată rezultă de altfel şi din problemele tratate.

La sfîrşitul cărţii se găsesc încă 15 pagini, cuprinzînd poezii latine şi maghiare, scrise de alte mîini şi la date ulterioare.

Filigranele hîrtiei manuscrisului n-au putut fi identificate.

II. Aritmetica lui Géresi prezintă asemănări foarte evidente cu primele aritmetici ungureşti tipărite, în special cu aritmetica tipărită la Cluj în 1591. Pasagii întregi, pagini întregi, corespund cuvînt cu cuvînt. Sînt preluate des şi observaţiile de morală, jocurile de cuvinte şi o serie de expresii specifice aritmeticii clujene. In multe cazuri sînt preluate şi subtitluri ca: Compendium, Observatio, Aliud, Item, Cautio, Külömb külömb fele Peldak (fig. 16). La fel şi metodele de calcul aplicate, precum şi problemele tratate în manuscris, în multe cazuri, sînt identice cu cele din Aritmetica clujeană. Mai mult, sînt preluate chiar şi cîteva greşeli de tipar. In lucrarea de faţă toate acestea sînt arătate prin exemple abundente.

Multe capitole însă prezintă şi deosebiri evidente, mai ales în părţile introductive. În manuscrisul lui Géresi apar multe probleme ce nu figurează în aritmeticile tipărite amintite. În cîteva cazuri întîlnim şi procedee de calcul neîntîlnite în Aritmetica clujeană, sau în celelalte aritmetici ungureşti. Aritmetica lui Géresi cuprinde chiar şi cîteva capitole care nu figurează în celelalte aritmetici amintite.

Pe prima pagină a manuscrisului întîlnim titlul lucrării (fig. 2) care tradus în romîneşte sună: "Calea utilă şi metoda calculului din care poate învăţa prea uşor cel care se preocupă de aceste lucruri".

După titlu, în primul aliniat, se defineşte noţiunea de număr. Apoi se explică denumirea cifrelor.

In continuare sînt înşirate operaţiile aritmetice (Géresi le spune species) care vor fi tratate: 1. Numeratio, 2. Additio, 3. Substractio, 4. Multiplicatio, 5. De divisio, 6. In aequalis divisio, 7. Meditatio (!), 8. Progressio. Se spune că mai sînt patru alte species-uri utile mai ales pentru comercianţi: Regula Detri, Regula Vulgaris, Regula Societatis, Regula Falsi.

Această introducere diferă de cea din Aritmetica clujeană, unde se defineşte noţiunea de calcul (számvetés) şi se vorbeşte numai de şase species-uri.

După această introducere, în Aritmetica lui Géresi urmează tratarea fiecărui species în capitole distincte. Este de notat că Géresi tratează şi alte operaţii aritmetice, pe lîngă cele înşirate în introducere. Astfel mai include capitolele intitulate : ''Az geometrica progressiorul is'', (Despre progresia geometrică), ''A rostelyos ablakoknak megvetisirulis'' (Despre calcularea ferestrelor unui grilaj) (fig. 10), ''Regula Detri awersa'' (fig. 14)(Regula de trei inversă), ''Regula Societatis temporum'' (fig. 15), ''Lusus aritmeticus''. Mai include niște capitole mărunte : ,,Az nemet penzről'' (Despre banii nemțești), ,,Az magyar penzről'', (Despre banii maghiari), ,,Az masa szamrol'' (Despre măsura maja) ,,Maghiar Fontrol'' (Despre funtul maghiar) ,,Az nemet mazsarol és fontrol'' (Despre maja și funtul nemțesc). ,,Az nemet fontrol és lothrol'' (Despre funtul și loth-ul nemțesc). Ultimul capitol cuprinde niște calcule în legătură cu zeciuiala vinului și a grînelor, salariul servitorului, vînzarea bucăților de sare etc., probleme care, după cît știm, nu figurează în nici o altă lucrare. Cartea se încheie cu o ,,Tabula Cebetis'' (tabla înmulțirii, fig. 18).

Cele mai multe capitole se încep cu definiția speciesului respectiv. Regula după care se efectuează operația este prezentată pe exemple concrete, în mod dogmatic, fără nici o justificare. Capitolele se încheie cu lămurirea ,,probei'' operației respective. De cele mai multe ori se dă proba cu 9, iar în cîteva cazuri proba prin operația inversă.

Se constată că multe dintre definițiile și exercițiile cuprinse în Aritmetica lui Géresi sînt identice cu cele din Aritmetica clujeană. Alte definiții și exerciții sînt luate din Aritmetica lui Gemma Frisius. Mai sînt și alte probleme, ale căror proveniență nu poate fi stabilită, ele fiind compuse probabil chiar de Géresi.

Ne poate surprinde faptul că întîlnim cazuri în care textul problemei nu figurează în Aritmetica clujeană, ci numai rezolvarea ei, iar textul problemei se găsește în Aritmetica lui Géresi, sau invers. In Aritmetica lui Géresi întîlnim greșeli de calcul și rezultatul este totuși corect, coincidînd cu rezultatul din Aritmetica clujeană.

Intr-un capitol Géresi aplică regula detri la fracții, totuși ocolește operațiile cu fracții care nu sînt tratate în Aritmetica sa. În acest scop vorbește de jumătăți și sferturi.

Capitolele ''Regula Detri awersa'' și ''Keövetkeznek immar. . .'' din Aritmetica lui Géresi nu figurează în Aritmetica clujeană, nici în celelalte aritmetici tipărite, amintite mai sus. Sub titlul ,,Alius Lusus'' Géresi dă o regulă ,,pentru a afla numărul gîndit de altcineva'', regulă care diferă de regula cuprinsă în Aritmetica clujeană etc.

АРИФМЕТИКА СТЕФАНА ГЕРЕШИ

(Резюме)

В библиотеке бывшего коллежа (основанного в 1557 г.) г. Тр. Муреш автор нашел рукопись про которую утверждают, что она является самой старой математической рукописью из сохранившихся в нашей стране. Речь идет об арифметике, содержащей 169 страниц, редактированной в 1626 г. в школе г. Бая Маре (называвшейся Schola Rivulina) Стефаном Герешн.

Эта арифметика представляет весьма очевидное сходство с Клужской Арифметикой (напечатанной в 1591 г.) и арифметикой Гемма Фризнуса (1536 г.). Все же орфография рукописи коренным образом отличается от орфографии Клужской Арифметики и имеет и другие значительные отличия, из чего можно заключить, что у Гереши не было под рукой Клужской Арифметики.

В отдельных главах рукописи рассматриваютя следующие „species“: *Numeratio, Additio, Substractio, Multiplicatio, Divisio, In aequalis divisio, Mediatio, Progressio, Intercisa, Regula Detri sew aurea, Regula detri awersa, Regula Vulgaris, Regula Societatis, Regula societatis temporum, Regula Falsi seu positionum.* Следует дальше несколько небольших глав относительно мер и монет, бывших в обращении в то время в Трансильвании и глава с названием *Lusus aritmeticus*. Последняя глава называющаяся Különbféle . . ., и, вероятно, принадлежащая Гереши, содержит задачи, связанные с практикой повседневной жизни. Рукопись заканчивается Tabula cebetis (таблицей умножения).

L'ARITHMÉTIQUE DE STEFAN GÉRESI

(Résumé)

Dans la bibliothèque de l'ancien collège de Tîrgu Mureş (fondé en 1557) l'auteur a découvert un manuscrit que l'on a démontré être le plus ancien manuscrit de mathématique conservé dans notre pays: il s'agit d'une arithmétique de 169 pages, rédigée en 1626 à l'école de Baia-Mare (nommée Schola Rivulina) par Stephanus Géresi.

Cette arithmétique présente des ressemblances évidentes avec l'Arithmétique de Cluj (imprimée en 1591) et avec l'arithmétique de Gemma Frisius (1536). Cependant l'orthographe du manuscrit en question diffère radicalement de celle de l'Arithmétique de Cluj et présente d'autres différences importantes, de sorte qu'on peut conclure que Géresi n'avait pas en main l'Arithmétique de Cluj.

Le manuscrit traite en chapitres distincts des ,,*species*'' suivantes: *Numeratio, Additio, Substractio, Multiplicatio, Divisio, In aequales divisio, Mediatio, Progressio, Intercisa, Regula Detri seu aurea, Regula detri aversa, Regula Vulgaris, Regula Societatis, Regula societatis temporum, Regula Falsi seu positionum.* Suivent quelques chapitres plus brefs relatifs aux mesures et monnaies employées en ce temps-là en Transylvanie, ainsi qu'un chapitre intitulé *Lusus arithmeticus.* Le dernier chapitre, avec le titre de ,,Külömbféle...'', qui provient probablement de Géresi, comprend des problèmes se rapportant à la vie pratique quotidienne. Le manuscrit s'achève sur une *Tabula Cebetis* (table de multiplication).

OBSERVAȚII ALE STELEI VARIABILE *CC HERCULIS*

de

IOAN TODORAN

Steaua variabilă *CC Herculis* (*BD* + 9°3179) a fost descoperită de L. Ceraski la Moscova în anul 1929. S. N. Blajko [7] a arătat că variabila este de tipul Algol și dă următoarele elemente pentru variația luminozității:

$$\text{Max.} = 9{,}^{m}5 \qquad \text{Min. I.} = 13{,}^{m}5$$

$$\text{Min. hel} = \text{D.J. } 2426120{,}415 + 1{,}^{z}73400.\text{E}$$

R. Prager[7] dă magnitudinile stelelor de comparație pentru domeniul fotografic și, bazat pe 33 evaluări pe plăci, dă următoarele valori între care este cuprinsă variația luminozității:

$$\text{Max.} = 10{,}^{m}00 \qquad \text{Min I.} = 11{,}^{m}8$$

În anul 1944 V. P. Tsesevich[14] efectuează observații vizuale pentru momentele a două minime principale, trasează curba medie în minim și dă următoarele elemente:

$$\text{Min. hel} = \text{D. J. } 2426120{,}415 + 1{,}^{z}7340314.E$$

În a IV-a prelungire a Catalogului General de Stele Variabile[3] erau date următoarele elemente:

$$\text{Min. hel} = D.J.\ 2433448{,}454 + 1{,}^{z}73398190.\text{E}$$

$$\text{Max.} = 10{,}^{m}36 \qquad \text{Min } I. = 12{,}^{m}75$$

G. E. Erleksova[2] dă curba medie obținută din 88 evaluări pe plăci fotografice, iar pentru limitele între care variază luminozitatea dă următoarele mărimi:

$$\text{Max.} = 10{,}^{m}06 \qquad \text{Min. I.} = 12{,}^{m}07$$

Luînd în considerare minimele existente, G. E. Erleksova obține pentru elementele din a IV-a prelungire a Catalogului General de Stele Variabile, următoarele corecții:

$$\Delta M = -0{,}^{z}020 \qquad \Delta P = +0{,}^{z}00005075$$

Observații pentru determinarea momentelor minimelor au mai efectuat: S. N. B l a j k o[16], P i o t r o w s k i[5],[6], R. S z a f r a n i e c [8][9][10] și A. S z c z e p a n o w s k a[11][12][13].

Intre anii 1955—1958, V. P. T s e s e v i c h[15],[16] se ocupă cu problema variației perioadei și ajunge la concluzia că minimele observate între anii 1929 și 1949 ($-188 < E < +3207$) sînt verificate de următoarele elemente:

$$\text{Min. hel} = \text{D. J. } 2426120{,}415 + 1^{z}{,}7340314.E,$$

iar observațiile cuprinse între anii 1949 și 1954 ($+3207 < E < +5072$) sînt verificate de elementele:

$$\text{Min. hel.} = \text{D.J. } 2431265,\ 288 + 1^{z}{,}7340460.E$$

În ediția a II-a a Catalogului General de Stele Variabile[4] sînt date următoarele elemente:

$$\text{Max.} = 10^{m}{,}2 \qquad \text{Min. I.} = 13^{m}{,}1$$

$$\text{Min. hel. D.J. } 2431625{,}288 + 1{,}7340460.E$$

La Observatorul astronomic din Cluj, între 12. VIII. 1954 și 17. X. 1959, la variabila *CC Herculis* au fost efectuate 193 observații fotografice și 191 observații fotovizuale. Observațiile fotografice au fost efectuate cu ajutorul unui reflector *Newton* (D=50 cm. F = 250 cm) folosind în acest scop plăci *Agfa Astro*. Observațiile fotovizuale au fost efectuate cu ajutorul unui refractor *Prin* (D = 20 cm F = 300 cm) utilizînd plăci *Isopan F*. și *Isopan ISS*. Pentru domeniul fotovizual, plăcile au fost hipersensibilizate cu o soluție de alcool și amoniac și s-a utilizat un filtru *Schaut GG* 11 de dimensiunile 9 × 12 cm.

Observațiile au fost efectuate de către colectivul de la Observatorul din Cluj (E. Botez 20%, G. Chiș 16%, I. Popa 6%, I. Todoran 48% și alți colaboratori 10% din totalul observațiilor).

Luminozitatea variabilei a fost evaluată pe plăci fotografice prin metoda Argelander și metoda Nijland-Blajko, folosind stelele de comparație indicate de P r a g e r[7].

Scara magnitudinilor stelelor de comparație date de P r a g e r nu acoperă tot intervalul în care are loc variația luminozității stelei *CC Herculis*, din acest motiv a fost nevoie de alegerea a încă două stele puțin luminoase — stelele *r* și *s* (fig.1), iar pentru ca evaluările să se poată efectua cu o precizie suficientă, între stelele *f* și *m* a fost intercalată steaua *g*, deoarece diferența de luminozitate între *f* și *m* era mai mare de 10 grade de luminozitate.

Pentru determinarea magnitudinilor stelelor de comparație am fotografiat pe aceeași placă regiunea stelei variabile și regiunea Secvenței Polare. În modul acesta am obținut 6 expuneri pentru domeniul fotografic și 8 expuneri pentru fotovizual. Prelucrarea materialului fotografic și fotovizual a fost efectuată cu ajutorul unui microfotometru „Hartmann" Rezultatele obținute sînt date în tabelul 1, coloanele 3 și 6.

Tabelul nr. 1

Steaua	$m_{pg.}$ (Prager)	$m_{pg.}$ (Todoran)	ε	s	$m_{pv.}$ (Todoran)	ε	s
c	9,50	9,45	+0,06	—	9,02	±0,08	—
b	9,54	9,64	0,07	29,4	9,41	0,03	33,1
a	10,22	9,89	0,05	27,9	10,29	0,07	26,5
f	10,57	10,02	0,06	25,9	10,62	0,05	24,0
g	—	10,97	0,04	18,8	—	—	—
m	11,33	11,50	0,04	13,1	11,40	0,08	16,0
p	11,59	12,23	0,04	6,6	11,97	0,07	10,4
r	—	13,11	+0,05	0,0	12,38	0,09	5,0
s	—	inv.	—	—	13,03	±0,07	0,0

În tabelul 1, *s* reprezintă numărul gradelor de luminozitate iar ε este eroarea medie pătratică cu care a fost determinată magnitudinea stelei respective.

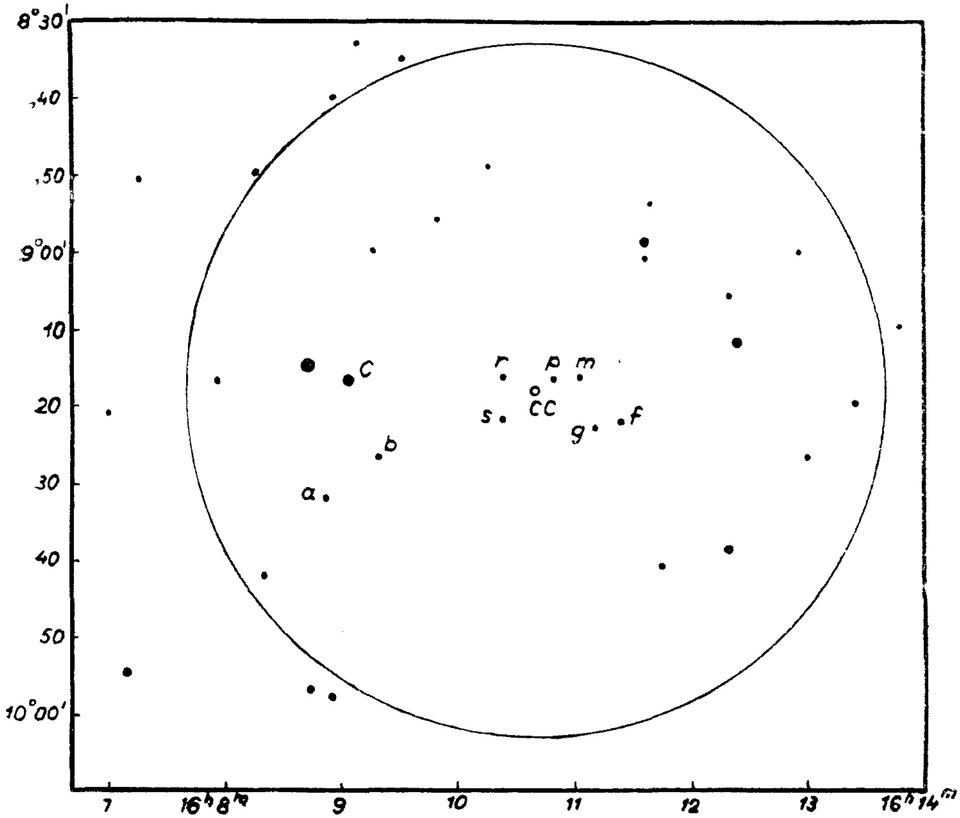


Fig. 1.

În cazul observațiilor fotografice luminozitatea variabilei nu a fost mai mare decît aceea a stelei *b*, astfel că steaua *c* nu a fost utilizată, iar steaua s nu a fost înregistrată.

Pentru trecerea de la grade de luminozitate la magnitudini stelare, am obținut următoarele relații:

$m_{pg.} = 13{,}06 - 0{,}116.s$ pentru observațiile fotografice, și

$m_{pv.} = 13{,}03 - 0{,}106.\ s$,, ,, fotovizuale.

Din observațiile efectuate în interiorul minimului principal am determinat momentele a 25 minime, din care 17 fotografice și 8 fotovizuale. Acestea sînt date în tabelul 2, unde momentele minimelor sînt exprimate în zilele iuliene (D. J.), Diferențele $O-C_1$ reprezintă abaterile minimelor observate de la cele calculate pe baza elementelor date de V. P. T s e s e v i c h[14]

Tabelul nr. 2

D.J.hel. 243...,	Limitele erorii $\mp 0^z{,}0001$	Nr. de observații		Pondere	$O - C_1$ 0,0001	Felul observației
		ramura descend.	ramura ascend.			
4941,4705	—	4	—	1/2	+378	Fotografic
4948,4043	20	3	5	1	+354	,,
4962,2790	—	—	4	1/2	+379	,,
4967,4850	—	4	—	1/2	+418	,,
5182,5027	30	2	1	1/2	+396	,,
5227,5880	—	5	—	1/2	+401	,,
5229,3225	—	—	5	1/2	+406	,,
5234,5233	30	5	4	2	+393	,,
5248,3963	27	5	6	2	+400	,,
5286,5450	—	8	—	1	+400	,,
5359,3745	—	4	—	1/2	+402	,,
5567,4607	—	4	—	1/2	+426	,,
5704,4390	—	4	—	1/2	+325	Fotovizual
6056,4475	—	4	—	1/2	+326	,,
6335,6275	—	9	—	1	+335	,,
6337,3530	20	3	11	2	+250	,,
6349,5035	30	9	1	1	+373	,,
6375,5065	—	7	—	1/2	+298	,,
6389,3845	35	1	7	1	+355	,,
6401,5170	—	16	1	1	+298	,,
6753,5260	—	10	—	1	+305	Fotografic
6760,4617	30	13	2	2	+300	,,
6807,2810	—	—	8	1	+305	,,
6819,4140	—	11	—	1	+253	,,
6833,2917	10	12	8	3	+307	,,

Momentele minimelor au fost determinate prin metoda hîrtiei de calc a lui K o r d y l e w s k i și prin suprapunerea curbei medii peste curba individuală a minimului respectiv, Ponderea a fost atribuită ținînd seama de limitele erorilor, numărul de observații și de gradul de potrivire a curbei medii peste curba minimului individual.

Observațiile individuale (date în tabelul 6 și 7) au fost grupate în puncte normale după fază și felul observațiilor. Curbele medii de lumină sînt date în tabelul 3, iar reprezentarea lor grafică este dată în fig. 2 și fig. 3.

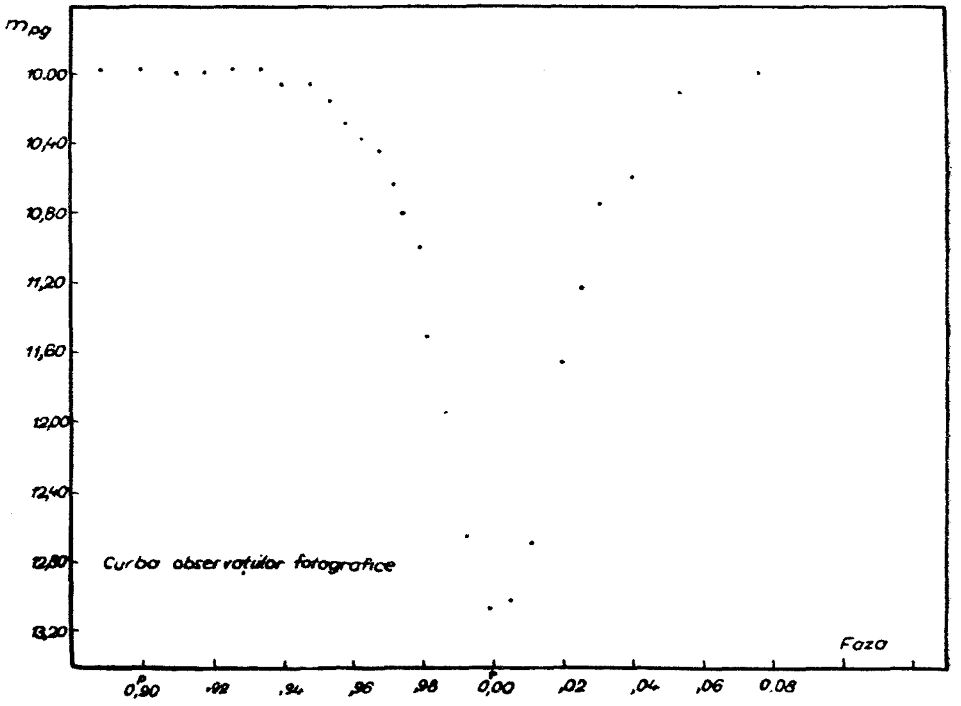

m_{pg}
10.00
10,40
10,80
11,20
11,60
12,00
12,40
12,80
13,20
Curba observaţiilor fotografice
Faza
0,90
,92
,94
,96
,98
0,00
,02
,04
,06
0.08

Fig. 2.

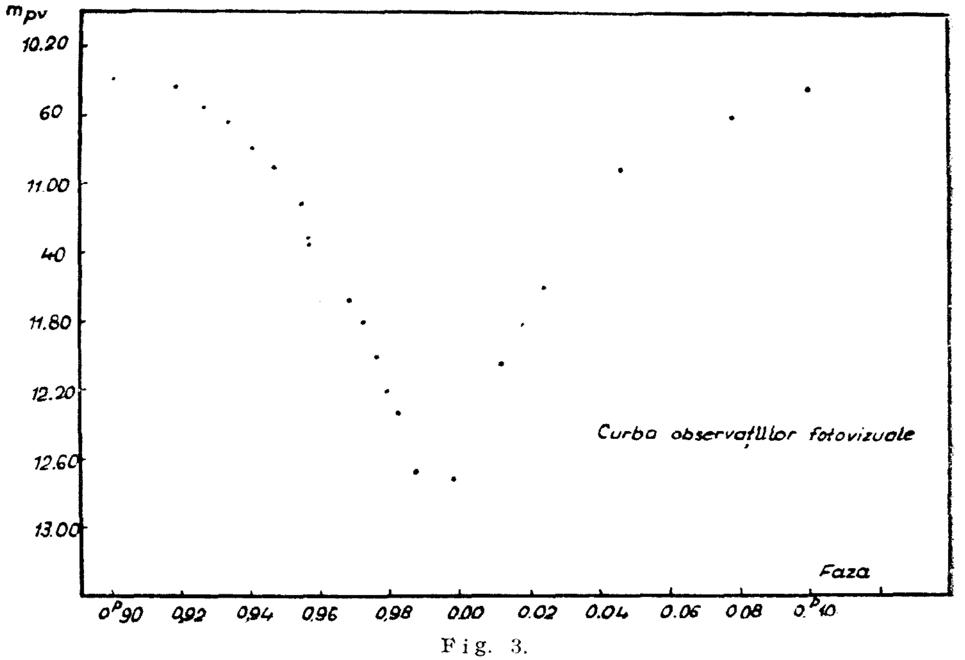

m_{pv}
10.20
60
11.00
40
11.80
12.20
12.60
13.00
Curba observaţiilor fotovizuale
Faza
0.90
0,92
0,94
0,96
0,98
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10

Fig. 3.

În fig. 2 este dată curba de lumină numai în minimul principal, observaţiile fotografice fiind efectuate numai pentru determinarea momentelor minimelor. De aici rezultă că în minimul principal magnitudinea variabilei este de $13^{m},15$.

În fig. 3 este dată curba de lumină a minimului principal. Minimul secundar nu se poate pune în evidenţă din observaţiile existente. Pentru limitele între care are loc variaţia luminozităţii se obţin următoarele valori:

$$\text{Max.} = 10^{m},44 \qquad \text{Min. I.} = 12^{m},73$$

Tabelul nr. 3

Curba fotografică			Curba fotovizuală					
Faza	*mpg*	*n*	Faza	*mpv*	*n*	Faza	*mpv*	*n*
0^{P},8885	9,97	8	0^{P},0126	12,09	5	0^{P},9016	10,41	4
,9006	9,97	8	,0238	11,59	5	,9184	10,46	4
,9101	10,00	7	,0464	10,91	4	,9262	10,54	5
,9185	10,00	8	,0788	10,59	4	,9332	10,66	5
,9273	9,98	7	,1053	10,46	4	,9396	10,79	4
,9350	9,98	7	,1298	10,42	4	,9469	10,89	5
,9415	10,07	7	,1553	10,46	4	,9543	11,12	5
,9480	10,07	7	,1860	10,45	4	,9563	11,36	4
,9537	10,17	7	,3905	10,45	6	,9565	11,38	4
,9593	10,29	7	,4634	10,42	5	,9682	11,68	4
,9630	10,38	8	,4761	10,43	5	,9718	11,81	5
,9680	10,45	7	,4842	10,51	5	,9758	12,08	4
,9710	10,64	7	,4903	10,49	5	,9793	12,21	4
,9754	10,81	7	,4961	10,45	5	,9819	12,34	4
,9791	11,00	7	,5022	10,41	5	,9870	12,69	4
,9829	11,53	7	,5086	10,46	4	0,9983	12,71	5
,9870	11,97	8	,5179	10,41	5			
,9932	12,67	7	,5236	10,47	4			
,9991	13,09	7	,5307	10,48	5			
,0050	13,04	7	,5403	10,52	5			
,0112	12,70	6	,5527	10,42	4			
,0194	11,66	7	,5716	10,37	4			
,0256	11,23	7	,6534	10,46	4			
,0311	10,74	7	,7114	10,48	5			
,0405	10,61	7	,7724	10,39	5			
,0543	10,11	7	,8778	10,42	4			
0,0765	10,00	7	0,8943	10,43	5			

n = numărul observaţiilor individuale.

Pentru cercetarea modului de variaţie a perioadei stelei variabile *CC Herculis*, în afară de minimele date în tabelul 2, am luat în considerare şi minimele observate de alţi autori pe care le-am adăugat la tabelul minimelor întocmit de V. P. Tsesevitch[16]. În acest mod am dispus de 83 minime care sînt date în tabelul 4, unde diferenţele $O-C_1$ sînt calculate cu ajutorul primelor elemente date de V. P. Tsesevich[14].

Tabelul nr. 4

D. J. hel. 24.......	Pondere	E	$O-C_1$ $0^z,0001$	$O-C_2$ $0^z,0001$	$O-C_3$ $0^z,0001$	Observatori şi surse
25794,424	1	— 188	+ 69			S.N.Blajko [12]
26082,226	1	— 22	—403			,,
26094,404	1	— 15	— 05			,,
26120,416	1	— 00	+ 10			,,
26212,319	1	+ 53	+ 03			,,
26219,254	1	+ 57	— 08			,,
27162,564	1	+ 601	— 39			S. Piotrowski [6,2]
27188,576	1	+ 616	— 23			,,
27190,314	1	+ 617	+ 16			,,
27221,526	1	+ 635	+ 11			,,
27247,534	1	+ 650	— 14			,,
27327,302	1	+ 696	+ 11			,,
27535,387	1	+ 816	+ 24			,,
27573,536	1	+ 838	+ 27			,,
27606,484	1	+ 857	+ 41			,,
27932,478	1	+1045	+ 02			,,
27951,552	1	+1056	— 02			,,
27958,487	1	+1060	— 13			,,
28298,3560	3	+1256	— 24			,,
28588,5090	1	+1481	— 65			,,
28695,4441	2	+1485	— 75			,,
29028,3828	1	+1677	— 29			,,
29040,5172	$^1/_2$	+1684	— 67			,,
29080,4043	1	+1707	— 23			,,
29106,4117	1	+1722	— 54			,,
29132,4236	$^1/_2$	+1737	— 39			,,
29411,6065	2	+1898	— 01			,,
29539,3512	3	+1914	+ o1			,,
29451,4886	2	+1921	— 07			,,
29458,4239	1	+1925	— 15			,,
29465,3593	2	+1929	— 23			,,
29477,4983	2	+1936	— 15			,,
29510,4454	2	+1955	— 10			,,
29536,4495	1	+1970	— 74			,,
31265,2863	3	+2967	+ 01			V. P. Tsesevich* [14]
31272,2122	2	+2971	—101			,,
31556,606	1	+3135	+ 26			S. Piotrowski [2]
31584,351	1	+3151	+ 31			,,
31596,489	1	+3158	+ 28			,,
31603,424	1	+3162	+ 17			,,
31610,359	1	+3166	+ 06			
31622,498	1	+3173	+ 14			,,
31655,445	1	+3192	+ 18			,,
31681,450	1	+3207	— 37			,,
33030,549	2	+3985	+189	+ 22		A. Szczepanowska [12]
33056,556	3	+4000	+164	— 05		,,
33429,377	3	+4215	+196	— 04		,,
33448,456	1	+4226	+243	+ 41		,,
33497,005	1	+4254	+204	— 02		G. K. Erleksova [2]
34133,397	1	+4621	+229	— 30		R. Szafraniec [8], [16]
34478,474	1	+4820	+277	— 12		,,
34490,612	2	+4827	+274	— 16		A. Szczepanowska [11]

* = minimele au fost determinate de subsemnatul din observaţiile lui **V. P. Tsesevich**[14].

Tabelul 4 (continuare)

D. J. hel. 24	Pondere	E	O—C₁ 0,0001	O—C₂ 0,0001	O—C₃ 0,0001	Observatori şi surse
34915,457	1	+5072	+347	+22	−61	R.Szafraniec [9], [16]
34941,4705	1/2	+5087	+378		−29	I. Todoran
34948,4043	1	+5091	+354		−52	,,
34962,2790	1/2	+5099	+379		−27	,,
34967,4850	1/2	+5102	+418		+13	,,
35182,5027	1/2	+5226	+396		+02	,,
35227,5880	1/2	+5252	+401		+10	,,
35229,3225	1/2	+5253	+406		+14	,,
35234,5233	1	+5256	+393		+02	,,
35248,3963	2	+5264	+400		+10	,,
35286,5450	1/2	+5286	+400		+12	,,
35340,306	1	+5317	+460		+75	R. Szafraniec [10]
35359,3745	1/2	+5328	+402		+18	I. Todoran
35553,591	1	+5440	+452		+79	A. Szczepanowska [13]
35567,4607	1/2	+5448	+426		+54	I. Todoran
35626,412	1	+5482	+369		−01	A. Szczepanowska [13]
35704,439	1/2	+5527	+325		−11	I. Todoran
36023,511	1	+5711	+427		+79	A. Szczepanowska [13]
36056,4475	1/2	+5730	+326		−20	I. Todoran
36335,6275	1	+5891	+335		+05	,,
36337,3530	2	+5892	+250		−81	,,
36349,5035	1	+5899	+373		+43	,,
36349,501	2	+5899	+348		+18	A. Szczepanowska [13]
36375,5065	1/2	+5914	+298		−30	I. Todoran
36389,5922	1	+5922	+355		+28	,,
36401,3845	1	+5929	+298		−29	,,
36753,5260	1	+6132	+305		−03	,,
36760,4617	1	+6136	+300		−07	,,
36807,2810	1/2	+6163	+305		00	,,
36819,4140	1/2	+6170	+253		−51	,,
36833,2917	3	+6178	+307		+04	,,

În tabelul 4, diferenţele $O-C_2$ sînt raportate la ultimele elemente date de V. P. Tsesevich[16], care, aşa cum se vede din tabel şi de pe graficul din fig. 4, verifică observaţiile efectuate între anii 1949—1955. Diferenţele $O-C_3$ sînt calculate cu ajutorul noilor elemente pe care le vom deduce în cele ce urmează.

Minimele individuale din tabelul 4 au fost grupate în 23 minime normale care sînt date în tabelul 5. Ponderile au fost obţinute din suma ponderilor minimelor individuale care intră în minimul normal respectiv.

Diferenţele $O-C_1$ din coloana a 4—*a* a tabelului 4, au fost reprezentate grafic în funcţie de numărul de perioade E (fig. 4), de unde se vede că perioada variază neuniform şi că observaţiile pot fi reprezentate în diferite epoci prin diferitele elemente.

Observaţiile efectuate între anii 1954—1959 nu pot fi verificate de elemente calculate pînă în prezent. Pentru determinarea elementelor corespunzătoare ultimei serii de observaţii, cu ajutorul ultimelor 7 minime normale din tabelul 5 am scris 7 ecuaţii de condiţie de forma

$$O - C_1 = \Delta M + E . \Delta P$$

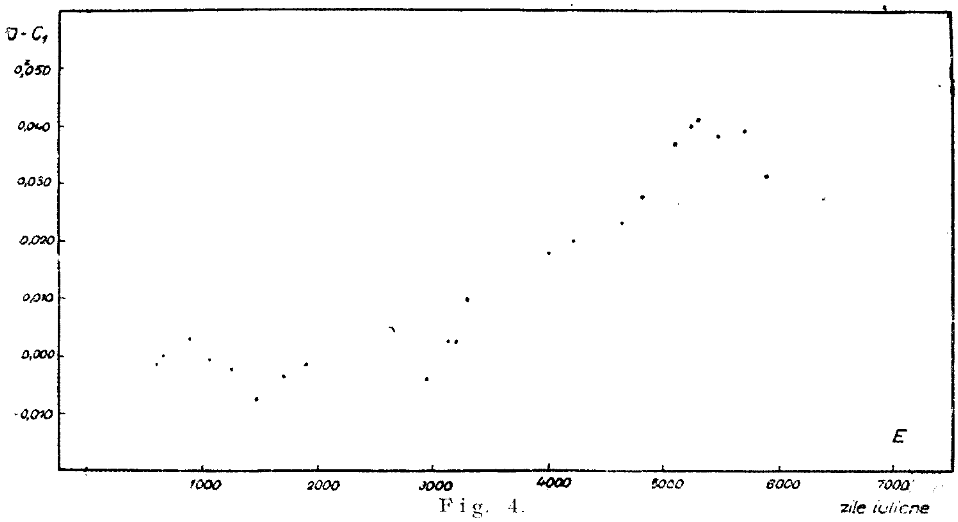


Fig. 4.

Rezolvînd sistemul de ecuaţii de condiţie, am obţinut valorile

$$\Delta M = +\ 0^z\!,089 \pm 0^z\!,0048$$
$$\Delta P = -\ 0^z\!,00000956 \pm 0^z\!,00000085$$

care aplicate elementelor lui V. P. T s e s e v i c h [16] ne dau următoarele elemente:

$$\text{Min. hel.} = \text{D. J. } 2435310{,}8201 + 1^z\!,7340219.E$$
$$\pm 48 \qquad\qquad \pm 85$$

Cu ajutorul acestor elemente am calculat diferenţele $O-C_3$ din tabelele 4 şi 5.

Tabelul nr. 5

D. J. hel. 24 ...,	Nr. min. indiv.	Pon-dere	$O-C_1$ 0,0001	$O-C_2$ 0,0001	$O-C_3$ 0,0001	E
26087,470	5	5	+ 16			− 19
27181,6407	3	3	− 15			+ 612
27266,6100	3	3	− 02			+ 661
27271,8025	3	3	+ 32			+ 837
27946,3497	3	3	− 04			+1053
28298,356	1	3	− 24			+1256
28691,976	2	3	− 76			+1483
29076,935	5	4	− 35			+1705
29468,828	8	13	− 16			+1931
31268,7502	2	5	− 40			+2969
31584,3505	4	4	+ 26			+3151
31641,5733	4	4	+ 23			+3184
33042,686	2	5	+177	+08		+3992
33458,856	3	5	+201	−02		+4232
34133,397	1	1	+229	−30		+4621
34478,474	1	1	+277	−12		+4820
34946,6716	5	4	+368	+39	−39	+5090
35218,9176	4	3	+398		+07	+5247
35310,8226	4	4	+412		+25	+5300
35612,5410	4	3	+381		+11	+5474
36039,1138	2	2	+392		+45	+5720
36361,6353	7	7	+309		−21	+5906
36793,4085	5	6	+302		−03	+6155

Din cele de mai sus rezultă că variabila *CC Herculis* are perioada variabilă şi pentru studiul cauzei care produce această variaţie sînt necesare observaţii de minime care să fie efectuate în fiecare perioadă de vizibilitate.

Tabelul nr. 6

Observaţii fotografice

D.J. hel 2434 ...,	$m_{pg.}$	D.J. hel. 2435 ...,	$m_{pg.}$	D.J. hel. 2435 ...,	$m_{pg.}$	D.J. hel 2436 ...,	$m_{pg.}$
936,3528	10,57	220,4953	10,06	248,4652	10,30	760,4209	11,27
3667	10,06	5092	10,06	4833	10,06	4271	11,32
936,3806	10,06	220,5231	10,18	248,5111	9,94	4320	11,98
941,3594	10,06	227,4069	9,94	253,3767	9,94	4403	12,21
4149	10,94	4250	9,94	4045	10,06	4473	12,74
4287	11,41	4382	10,06	253,4253	9,94	4515	12,97
4455	11,98	4535	10,06	286,3460	9,94	4584	13,18
941,4594	12,41	4680	10,06	3585	9,94	4632	12,97
948,3352	10,61	4819	10,18	3699	10,06	760,4702	12,85
3490	10,94	4986	10,30	3924	9,94	807,3050	11,39
3629	11,27	5132	10,65	4063	9,94	3113	11,32
4344	12,91	227,5278	10,84	4202	10,06	3176	11,20
4483	11,98	229,3497	11,98	4341	10,06	3217	11,08
4622	10,82	3630	11,20	4480	10,18	3266	10,86
4761	10,56	3773	10,82	4619	10,30	3308	10,71
948,4897	10,47	3911	10,59	4758	10,42	807,3349	10,59
960,3383	9,82	4054	10,06	4897	10,47	819,3091	10,14
3516	9,94	4224	10,06	5036	10,82	3197	10,13
3662	10,06	4356	9,94	286 5154	11,63	3267	10,18
3804	10,06	229,4544	9,94	305,4910	9,73	3334	10,13
3952	10,06	234,3276	9,94	305,5066	9,73	3406	10,06
4112	9,94	3461	9,94	359,3159	10,24	3440	10,18
4251	10,06	3600	10,06	3293	10,71	3475	10,30
4404	10,18	3738	10,06	3432	11,69	3510	10,30
960,4543	10,42	3891	9,94	359,3571	12,79	3545	10,42
962,3132	11,27	4037	9,94	567,3899	10,47	3573	10,59
3292	10,86	4176	9,94	4052	10,82	819,3614	10,71
3466	10,71	4315	9,94	4121	10,08	833,2472	10,79
962,3512	10,47	4454	10,06	567,4225	11,44	2507	11,16
967,2955	9,94	4593	10,18	2436...,		2542	11,39
3094	9,94	4731	10,53	753,4147	10,06	2576	11,81
3233	9,94	4933	11,81	4224	10,06	2611	11,98
3372	9,94	5107	12,85	4328	10,06	2646	12,16
3511	9,94	5245	13,09	4419	10,06	2680	12,45
3649	9,94	5384	12,91	4642	10,18	2715	12,76
3823	9,94	5530	11,87	4719	10,30	2792	12,97
3962	10,06	234,5690	10,97	4776	10,47	2826	13,09
967,4101	10,47	236,3773	10,22	4826	10,65	2861	13,18
993,2834	9,94	4030	10,06	4869	11,27	2896	13,18
3501	9,94	236,4162	10,06	753,4915	11,44	2930	13,09
993,3699	10,06	248,3235	10,24	760,3591	9,94	2965	12,97
2435...,		3374	10,59	3653	10,06	3000	12,85
182,4911	12,91	3569	10,93	3799	9,94	3035	12,64
5050	13,18	3708	12,15	3861	10,18	3111	12,16
182,5102	12,91	3874	13,06	3938	10,30	3173	11,81
187,5100	10,06	4013	13,06	4009	10,30	3243	11,32
5252	9,94	4159	12,79	4070	10,42	3312	10,82
5392	9,94	4354	11,08	4111	10,65	833,3340	10,71
187,5532	10,06	248,4492	10,47	760,4146	10,97		

Tabelul nr. 7

Observaţii fotovizuale

D.J. hel. 2435 ...,	m_{pv}	D.J. hel. 2436 ...,	m_{pv}	D.J. hel. 2436 ...,	m_{pv}	D.J. hel. 2436...,	m_{pv}
704,3861	11,21	336,5603	10,59	343,4906	10,43	395,4973	10,33
3987	11,79	5708	10,59	343,5010	10,38	5070	10,38
4154	12,37	336,5770	10,59	349,3307	10,38	395,5162	10,43
2436...,		337,3172	11,79	3479	10,38	401,3457	10,38
017,4160	10,59	3301	12,27	3618	10,54	3561	10,43
4250	10,59	3394	12,48	3920	10,59	3672	10,38
4360	10,59	3468	12,71	4013	10,59	3951	10,38
4493	10,59	3710	12,71	4152	10,70	4012	10,38
4632	10,49	3797	12,61	4229	10,91	4089	10,70
4771	10,59	3879	12,27	4312	11,02	4186	10,70
4911	10,59	3971	12,05	4402	11,12	4318	10,91
5047	10,49	4075	11,79	4513	11,23	4449	11,02
5188	10,49	4193	11,58	4597	11,63	4512	11,12
017,5327	10,59	4332	11,23	4680	11,90	4604	11,23
051,4171	10,59	4457	10,91	4763	12,03	4688	11,63
4308	10,49	4596	10,80	349,5462	11,63	4730	11,68
4440	10,38	4735	10,70	364,3990	10,38	4807	11,90
051,4592	10,45	4874	10,59	367,3843	10,49	4846	12,01
056,4097	11,74	5037	10,59	375,3518	10,49	4925	12,32
4147	11,84	5172	10,49	3682	10,38	4967	12,43
4188	12,14	5485	10,49	3795	10,49	5012	12,53
056,4225	12,25	337,5623	10,39	3878	10,59	5061	12,61
319 4419	10,49	339,3289	10,38	4073	10,70	5109	12,71
4558	10,45	3379	10,38	4236	10,91	401,5186	12,81
4697	10,49	3491	10,49	4448	11,23	402,3866	10,49
4808	10,45	3588	10,49	4518	11,47	3971	10,38
4905	10,49	3695	10,49	4612	11,58	4068	10,33
5051	10,59	3803	10,45	375,4688	11,79	4707	10,43
319,5190	10,49	3956	10,38	389,3757	12,71	4805	10,43
335,5013	10,45	4074	10,49	3815	12,82	4900	10,32
5166	10,59	4213	10,38	3981	12,61	5014	10,32
5256	10,70	4372	10,43	4107	12,32	5083	10,37
5368	10,75	339,4511	10,45	4181	12,16	5151	10,32
5472	10,91	343,3378	10,49	4256	11,68	402,5226	10,32
5552	11,02	3517	10,38	4333	11,52	844,2561	10,43
5632	11,23	3656	10,38	389,4481	11,39	844,2644	10,43
5708	11,47	3733	10,49	394,3668	10,33	849,2248	10,33
335,5791	11,52	3809	10,49	3778	10,49	849,2314	10,33
336,4600	10,49	3885	10,38	394,3883	10,43	855,2257	10,43
4673	10,49	3962	10,49	395,4049	10,33	855,2396	10,49
4749	10,45	4038	10,49	4153	10,38	856,1976	10,49
4826	10,49	4115	10,59	4257	10,33	856,2118	10,43
4909	10,38	4191	10,59	4354	10,43	856,2240	10,37
5013	10,38	4351	10,38	4452	10,38	858,1975	10,49
5118	10,49	4455	10,49	4549	10,38	858,2129	10,37
5239	10,38	4601	10,49	4688	10,38	859,1903	10,43
5381	10,49	4698	10,38	4778	10,38	859,2014	10,59
336,5499	10,59	343,4809	10,33	395,4875	10,38	859,2135	10,91

BIBLIOGRAFIE

1. C e r a s k i, L. ,,Astronomische Nachrichten'' **236**, p. 279, 1929.
2. E r l e k s o v a G. E. ,,Biulleten Stalinabadskoi Astronomiceskoi Observatorii'', nr, 7, pp. 29–31, 1953
3. K u k a r k i n B. V., P a r e n a g o P. P., E f r e m o v J. I., H o l o p o v P. N., *Cetvertoe dopolnenie k pervomu izdaniu Obşcevo Kataloga Peremenîh Zvezd*, 1952.
4. K u k a r k i n B. V., P a r e n a g o P. P., E f r e m o v J. I., H o l o p o v P. N. *Obşcii Katalog Peremenîh Zvezd, t.* I. vtoroe izdanie, pp. 276–277, Moskva 1958.
5. P i o t r o w s k i S., ,,Acta Astronomica'' serie C, **4**, p. 121, 1950
6. P i o t r o w s k i S., ,,Acta Astronomica'' serie C, **2**, p. 124, 1935
7. P r a g e r R., ,,Astronomische Nachrichten'' **243**, p. 363, 1931.
8. S z a f r a n i e c R., ,,Rocznik Astronomiczny Observatorjum Krakowskiego''. Supplimento Internationale, nr. 25, pp. 85–88, 1954.
9. S z a f r a n i e c R., ,,Acta Astronomica serie C, **5**, p. 195, 1955.
10. S z a f r a n i e c R., ,,Acta Astronomica'' **6**, p. 142, 1956.
11. S z c z e p a n o w s k a A., ,,Acta Astronomica'' **6**, p. 145, 1956.
12. S z c z e p a n o w s k a A. ,,Acta Astronomica'', serie C, **5**, p. 76.
13. S z c z e p a n o w s k a A. ,,Acta Astronomica'' **9**, p. 47, 1959.
14. T s e s e v i c h V. P., ,,Izvestia Astronomiceskoi Observatorii'', t. IV. vîp. II, pp.–84–85, 1954.
15. T s e s e v i c h V. P., ,,Astronomiceskii ţirkular,'' nr. 164, p. 16,1955.
16. T s e s e v i c h V. P., ,,Peremenîe Zvezd'', **11**, nr. 6, p. 419, 1958.

НАБЛЮДЕНИЯ НАД ПЕРЕМЕННОЙ ЗВЕЗДОЙ CC HERCULIS

(Р е з ю м е)

В промежутке 12. VII. 1954 — 17. X. 1959 в Клужской Астрономической Обсерватории были произведены 193 фотографических наблюдения и 191 фотовизуальных наблюдение. Для получения изменения светимости применялся метод оценки на фотографических пластинках. Фотографические наблюдения были произведены с целью определения моментов наблюденных минимумов, а фотовизуальные наблюдения были выполнены и для начертания средней фотовизуальной кривой.

Из исследования фотовизуальной кривой были получены величины:

$$\text{Max.} = 10{,}^{m}41 \qquad \text{Min. I.} = 12{,}^{m}78$$

а вторичного минимума не смогли определить.

Для исследования характера изменения периода, из собственных наблюдений автор определил моменты для 25 основных минимумов и, приняв во внимание и минимумы, полученные другими авторами, определил следующие элементы:

$$\text{Min. hel.} = \text{D. J. } 2435310{,}8201 + 1{,}^{z}7340219 \cdot \text{E}$$
$$\pm 48 \qquad\qquad \pm 8$$

которые могут представить наблюдения, произведенные в 1952—1959 гг.

Из исследования изменения периода следует, что он изменяется нерегулярно и что необходимы новые наблюдения минимумов для того, чтобы установить закон изменения периода.

OBSERVATIONS SUR L'ÉTOILE VARIABLE CC HERCULIS

(Résumé)

Entre le 12. VII. 1954 et le 17. X. 1959, on a effectué à l'Observatoire Astronomique de Cluj 193 observations photographiques et 191 observations photovisuelles. Pour obtenir la luminosité de la variable, on a utilisé la méthode des évaluations sur plaques photographiques. Les observations photographiques ont été effectuées en vue de déterminer les moments des minimums observés et les observations photovisuelles ont été effectuées aussi pour le tracé de la courbe moyenne photovisuelle.

L'analyse de la courbe photovisuelle a fourni les grandeurs:

$$\text{Max.} = 10^{m}_{,}44, \qquad \text{Min. I.} = 12^{m}_{,}73$$

quant au minimum secondaire, il n'a pu être mis en évidence.

Afin d'étudier le mode de variation de la période, l'auteur a déterminé, à partir de ses propres observations, les moments de 25 minimums principaux et, prenant aussi en considération les minimums donnés par d'autres auteurs, il a déterminé les éléments suivants:

$$\begin{array}{l}\text{Min hel.} = \text{D. J. } 2534310{,}8201 + 1^{z}_{,}7340219.E \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \pm 48 \qquad\qquad \pm 8\end{array}$$

qui peuvent représenter les observations effectuées au cours des années 1952—1959.

De l'étude de la variation de la période il a résulté que celle-ci varie irrégulièrement et qu'il est nécessaire d'effectuer de nouvelles observations de minimums pour pouvoir établir la loi de variation de la période.

STUDIUL PARALEL AL EFECTULUI MOTOELECTRIC ŞI AL COROZIUNII, LA UNELE METALE, SUB INFLUENŢA TEMPERATURII

de

FRIDERIC KELEMEN, FELICIA BOTA şi ARPAD NÉDA

S-a observat că mişcarea lichidului prezintă o influenţă asupra coroziunii metalelor [1,2]. Pornind de la această observaţie N. A. Zapolskaia a arătat că există o anumită legătură între comportamentul coroziv al nichelului şi efectul lui motoelectric [3]. Mai tîrziu studiind influenţa unor substanţe oxidante ($K_2Cr_2O_7$, $KMnO_4$, $(NH_4)_2S_2O_8$) asupra coroziunii şi efectului motoelectric al cîtorva metale (Al, Co, Cu, Fe, Ni, Zn, şi oţel de mangan), Zapolskaia a constatat că în multe cazuri cînd se atinge starea pasivă a metalului, atunci şi efectul lui motoelectric devine zero sau de abia observabil [4]. Conform concepţiei autorului aceasta se datoreşte faptului că în stare pasivă pe suprafaţa metalului se formează un strat de protecţie care împiedică dizolvarea mai departe a metalului şi de aceea mişcarea lichidului nu produce schimbări la suprafaţa limită. Totuşi în mai multe cazuri s-a observat că efectul motoelectric nu arată aceeaşi variaţie în funcţie de concentraţia substanţei oxidante ,ca şi coroziunea metalului [4].

Studiind efectul motoelectric la cîteva metale am constatat că acesta în unele cazuri suferă variaţii esenţiale sub influenţa temperaturii [4,5]. După concepţia noastră efectul motoelectric provine din variaţia concentraţiei ionilor care determină potenţialul electrodului, produs de mişcarea electrodului în stratul limită de difuziune.

Coroziunea metalelor, potrivit datelor din literatură [7,8], se modifică esenţial sub influenţa temperaturii. Pornind de la consideraţiile acestea ne-am propus să studiem legătura celor două fenomene prin variaţia lor cu temperatura.

PROCEDEUL EXPERIMENTAL

Potenţialul motoelectric sau potenţialul de mişcare (e) care reprezintă diferenţa potenţialului de electrod în mişcare şi în repaus ($e = V_m - V_0$), a fost măsurat cu un electrod în formă de disc rotativ. La diferite metale grosimea discului era între 0,2 şi 0,5 mm, iar diametrul lui între 2,8 şi 3,2 cm. Pentru ca viteza electrodului să fie bine determinată, el se află în contact cu soluţia numai la periferia lui, celelalte părţi ale lui, precum şi axul la care a fost fixat, erau învelite cu un strat de parafină. Turaţia electrodului era 1 tură/s.

Potenţialul de electrod în repaus şi în mişcare, referit la potenţialul unui electrod de calomel $0{,}1N$, a fost măsurat cu o punte de compensaţie de tip *EKM*, cu o precizie de 0,1 *m.V*. Ca etalon de *f.e.m.* a fost luat un element Weston ($E_n = 1{,}0187$ *V* la 20°C). (Pentru a se evita difuziunea soluţiei *ClK* în soluţia studiată, între vasele care conţineau aceste soluţii, era introdus în circuit încă un vas cu soluţia studiată.)

Potenţialul de mişcare (e) după introducerea electrodului în soluţie a fost măsurat la diferite timpuri (la diferite vechimi ale electrozilor): prima dată s-a măsurat peste 30—60 minute, cînd potenţialul de electrod a devenit aproape staţionar, iar după aceea peste 3 ore şi peste 24 ore (vechimile electrozilor în figuri sînt notate în ore (*h*)). Variaţia potenţialului *e* în timp după presupunerea noastră este în legătură cu schimbările ce se petrec pe suprafaţa electrozilor [5,6].

Potenţalul *e* în multe cazuri suferă variaţii şi în timpul mişcării. Noi am urmărit şi aceste variaţii, fiindcă după presupunerea noastră acestea sînt în legătură cu procesele chimice şi fizice ce se petrec la suprafaţa electrozilor [5,6]. Valorile iniţiale (notate cu i) au fost măsurate peste un minut după începerea mişcării, iar valorile finale (notate cu *f*) peste 5—10 minute, cînd potenţialul electrodului în timpul mişcării a devenit staţionar sau aproape staţionar.

Probele de metal folosite pentru experienţele de coroziune au fost confecţionate din aceleaşi plăci de metal ca şi cele folosite la studierea efectului motoelectric. Valoarea coroziunii s-a stabilit din pierderea de greutate în timp de 5 zile, cu excepţia fierului la care s-a măsurat după o zi. Înainte de experienţe probele au fost curăţate cu şmirghel şi dezgresate cu alcool. Ca să evităm variaţia concentraţiei provenită din evaporarea solventului în timpul şederii probelor în soluţii, vasele au fost închise cu plăci de sticlă parafinate.

Experienţele s-au efectuat la temperaturi de 20, 30 şi 40°C, pentru ambele fenomene. Temperatura soluţiilor a fost stabilizată cu un termostat Wobser. Experienţele s-au făcut în soluţii de SO_4H_2, $0{,}1N$ şi de $ClNa$ 4%, la următoarele metale: *Ag, Al, Cu, Fe, Ni,* şi *Ta*.

REZULTATELE EXPERIMENTALE ŞI INTERPRETAREA LOR

Rezultatele măsurătorilor sînt redate în figurile 1—12. În figurile acestea curbele notate cu *K* reprezintă variaţia greutăţii probelor (valoarea coroziunii) raportată la 1 cm² în timp de 5 zile, iar curbele notate cu 1^h, 3^h şi 24^h, variaţia potenţialului motoelectric *e* la timpurile respective în funcţie de temperatură.

În figura 1, se observă că pierderea de greutate prin coroziune a argintului, în soluţie de SO_4H_2 0,1 *n*, la 40°C este mai mare decît la 20° şi 30°. Potenţialul de mişcare *e* la 1 oră (1^h) de la introducerea electrodului în soluţie este neînsemnat (1—2mV), dar peste 3 ore devine mai mare şi creşte cu ridicarea temperaturii, ca şi coroziunea. O variaţie asemănătoare a celor două fenomene, la acest metal se vede mai bine în soluţie de $ClNa$ 4% (fig. 2):

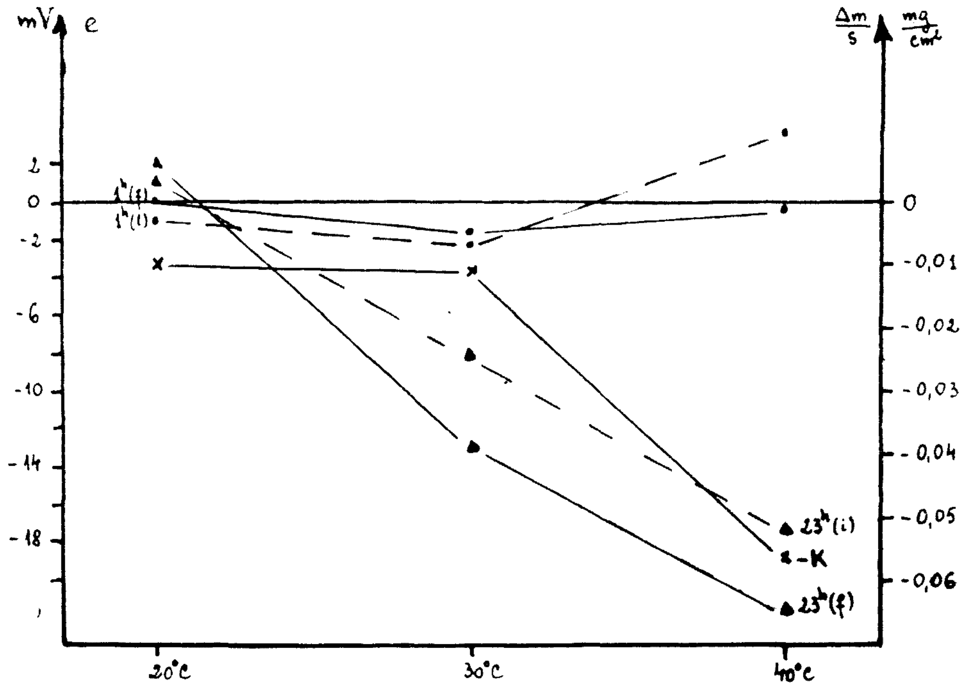


Fig. 1. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la argint în soluţie de SO_4H_2 0,1N.

în acest caz la 20°C se observă o pierdere în greutate (coroziune), în schimb la 40°C o creştere a greutăţii; în mod asemănător se schimbă şi semnul potenţialului e cu ridicarea temperaturii. Din variaţia coroziunii rezultă că schimbarea în timp a potenţialului e este în legătură cu procesele ce se petrec pe suprafaţa electrodului.

La cupru, în soluţie de SO_4H_2 0,1 n, coroziunea creşte cu temperatura (fig. 3). Variaţia potenţialului e este asemănătoare, cu excepţia celui măsurat la 30°C. Se observă că la 1 oră de la introducerea electrodului în soluţie diferenţa dintre valorile iniţiale (i) şi finale (f) ale potenţialului e este destul de însemnată (atinge şi 10 mV), în schimb peste 24 ore el nu se schimbă esenţial la menţinerea mişcării. Aceasta arată că procesul de coroziune al cuprului în soluţie de SO_4H_2 0,1 n este la început influenţat în mod esenţial de mişcarea soluţiei, iar peste 24 ore într-o măsură mai mică, probabil din cauză că se formează un strat de protecţie pe suprafaţa metalului. În soluţie de $ClNa$ 4% cuprul nu arată coroziune la 30°C şi 40°C (fig. 4). În mod corespunzător potentialul e la aceste temperaturi este mai mic decît la 20°C, dar nu este egal cu zero, probabil din cauză că cuprul se dizolvă la început în această soluţie, iar după aceea se formează depuneri pe suprafaţa lui.

La tantal în soluţie de SO_4H_2 0,1 n s-a observat coroziune numai la 40° C(fig. 5.). Potenţialul de mişcare la început (1^h) nu este zero la nici una din temperaturile studiate, dar peste 3 ore variaţia lui corespunde variaţiei

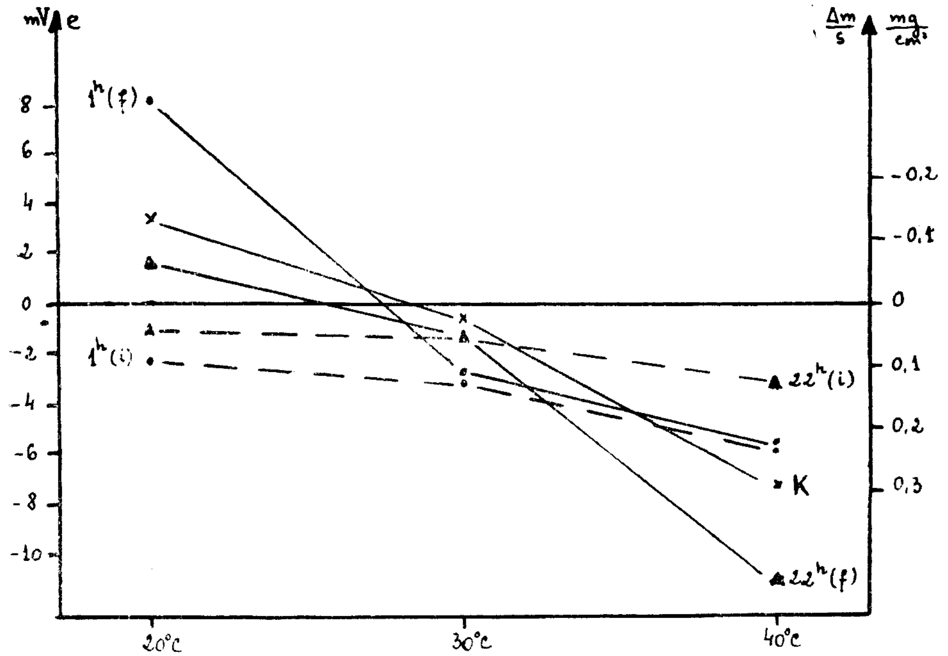


Fig. 2. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la argin în soluţie de $NaCl$ 4%.

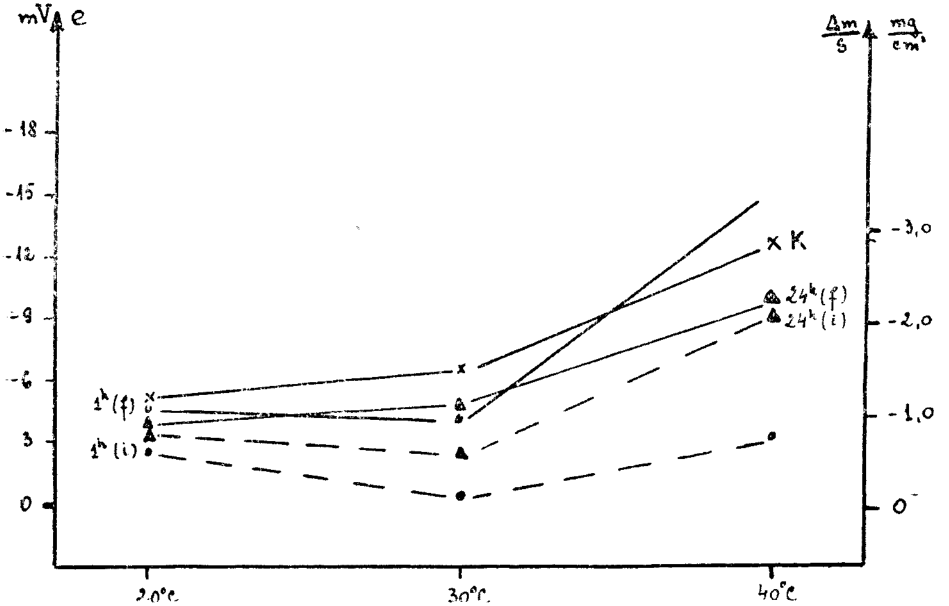


Fig. 3. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la cupru în soluţie de SO_4H_2 0,1N.

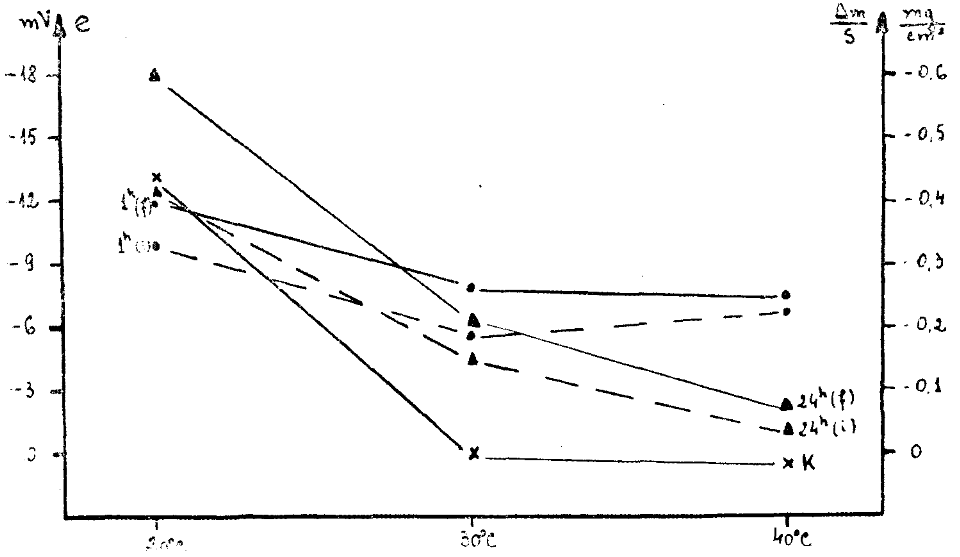


Fig. 4. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la cupru în soluţie de $NaCl$ 4%.

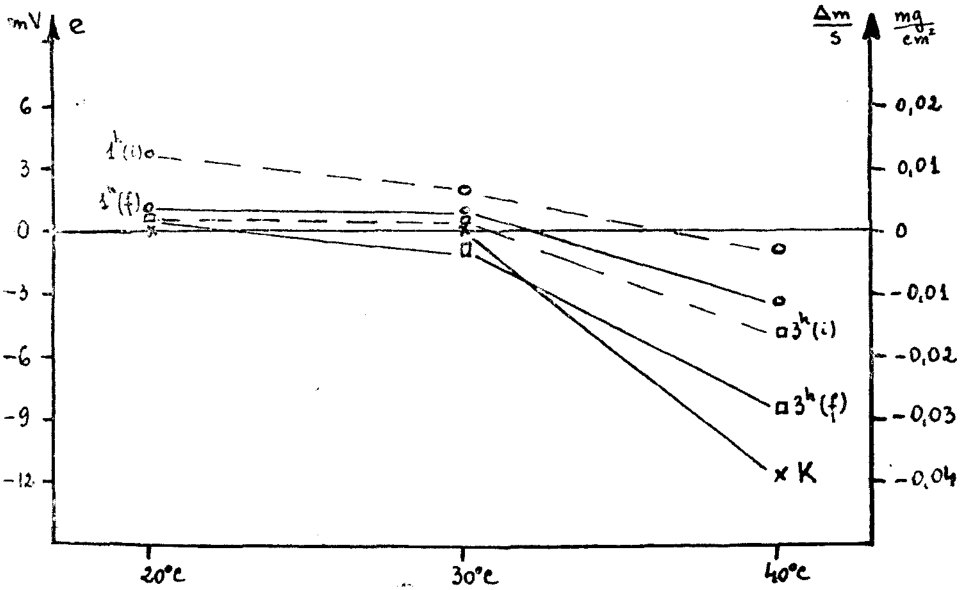


Fig. 5. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la tantal în soluţie de SO_4H_2 0,1N.

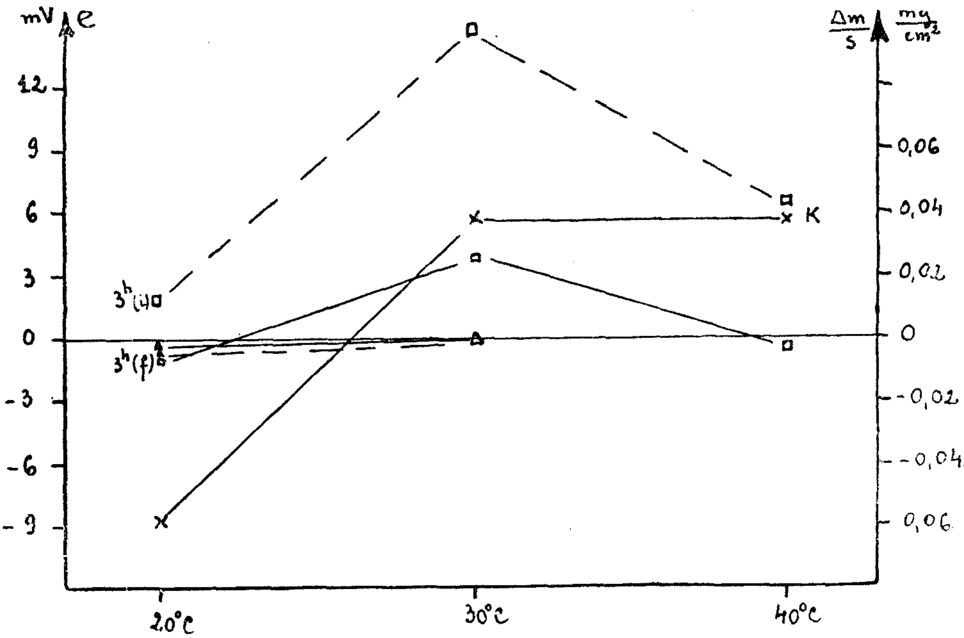


Fig. 6. Variația coroziunii și a potențialului motoelectric în funcție de temperatură la tantal în soluție de NaCl 4%.

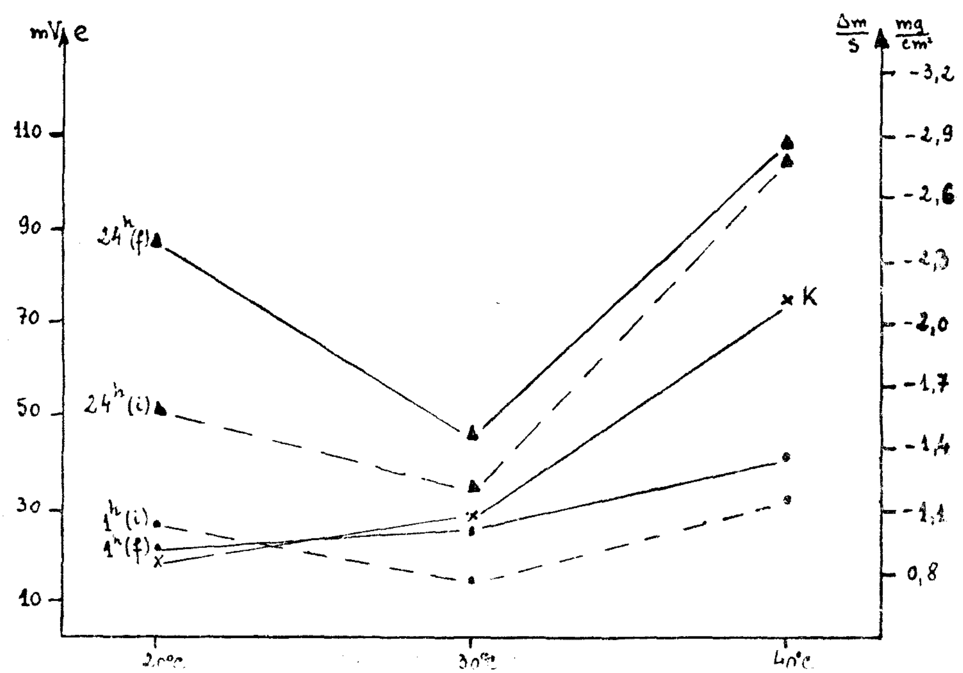


Fig. 7. Variația coroziunii și a potențialului motoelectric în funcție de temperatură la aluminiu în soluție de SO_4H_2 O,1N.

coroziunii. În soluţie de *ClNa* 4%, la 20°C se observă o pierdere în greutate, în schimb la 30°C şi 40°C o creştere în greutate (fig. 6). Potenţialul *e* la 3 ore după introducerea probei în soluţie arată valori însemnate, însă peste 24 ore valoarea lui este aproape zero. Aceasta arată că procesele pe suprafaţa probei se petrec în primele ore după introducerea ei în soluţie.

Coroziunea aluminiului în soluţie de SO_4H_2 0,1 *n* arată o creştere cu ridicarea temperaturii (fig. 7). Alura variaţiei potenţialului *e* în general corespunde variaţiei coroziunii. Din datele figurii 7 se vede că atît coroziunea cît şi potenţialul *e* al aluminiului are valori însemnate în soluţia menţionată. În schimb, în soluţie de *Cl Na* 4% ambele au valori mult mai mici (fig. 8). În acest caz la 20°C se observă coroziune, iar la 30°C şi 40°C o creştere în greutate. În mod asemănător potenţialul *e* îşi schimbă semnul, devenind negativ peste 24 de ore.

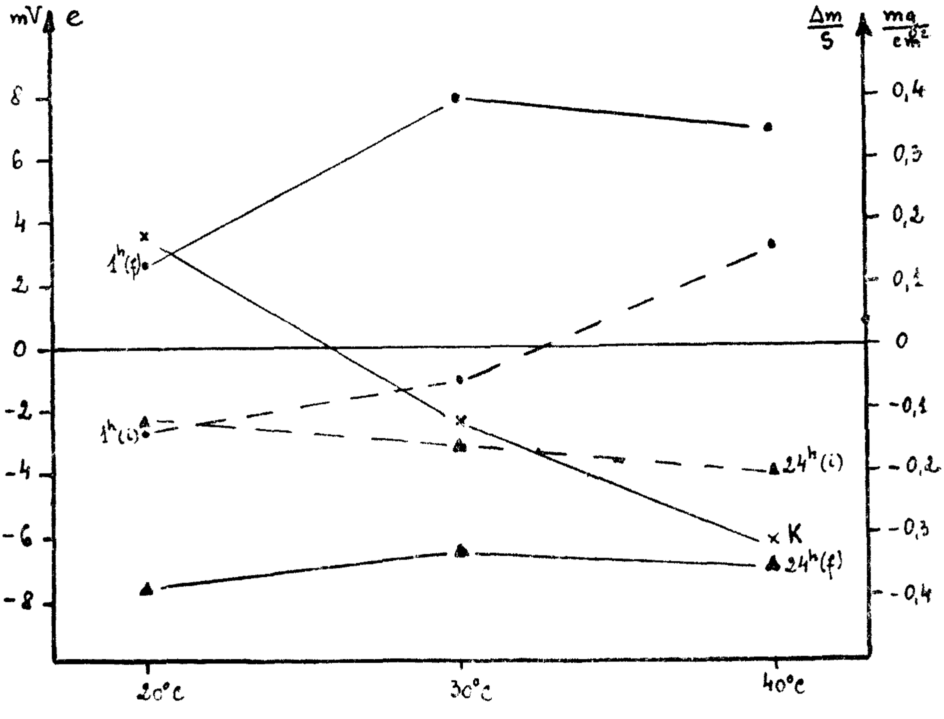


Fig. 8. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la aluminiu în soluţie de *NaCl* 4%.

Coroziunea fierului în soluţie de SO_4H_2 0,1 *n* arată o creştere hotărîtă cu ridicarea temperaturii (fig. 9). În schimb, potenţialul *e* la început (1^h,3^h) descreşte cu temperatura, iar după o şedere de 24 ore în soluţie, începe să crească. În soluţie de ClNa 4% coroziunea în mod asemănător arată creştere cu temperatura (fig. 10). Comportarea potenţialului *e* este asemă-

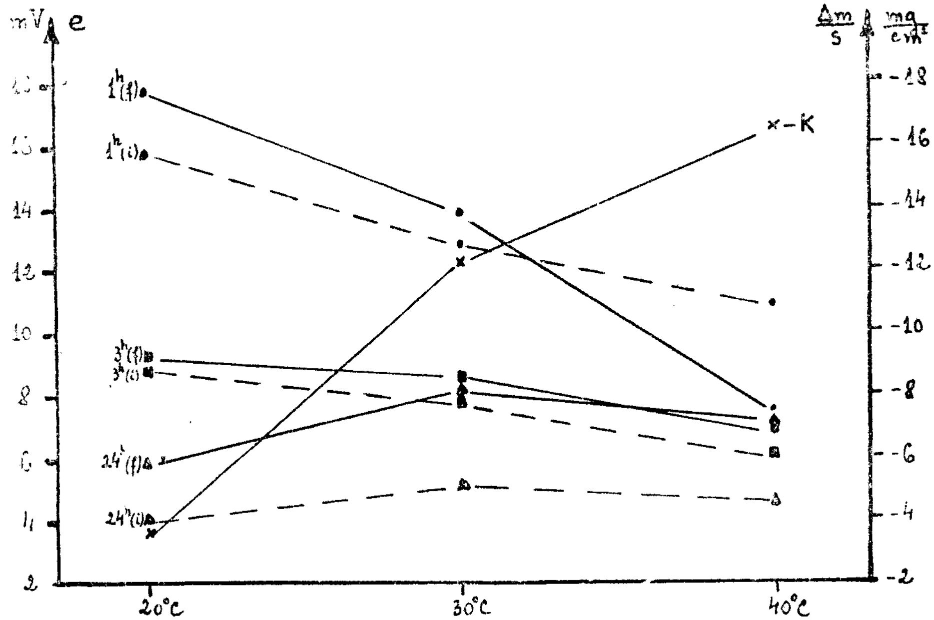


Fig. 9. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la fier în soluţie de SO_4H_2 0,1N.

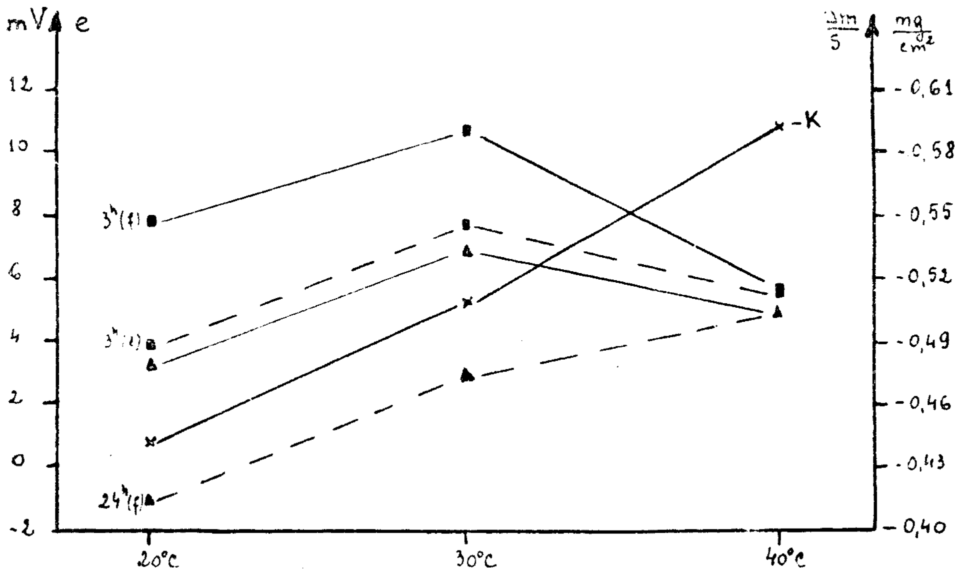


Fig. 10. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la fier în soluţie de $NaCl$ 4%.

nătoare, cu excepţia celui măsurat la 40°C, la care nu se observă variaţie esenţială nici sub influenţa mişcării.

Creşterea coroziunii fierului cu temperatura provine probabil din faptul că viteza reacţiei $2Fe + 2O_2 + H_2 = Fe_2O_3 + H_2O$ creşte cu temperatura şi ea nu este influenţată de stratul de oxid format pe suprafaţa probei, fiindcă acest strat nu este compact şi de aceea nu are un rol protector împotriva coroziunii. În schimb, descreşterea potenţialului *e* în soluţie de SO_4H_2 0,1 *n* este determinată de faptul că concentraţia oxigenului dizolvat în soluţie descreşte cu temperatura şi astfel variaţia potenţialului de electrod sub influenţa mişcării descreşte cu ridicarea temperaturii [5]. Rolul trecerii oxigenului spre suprafaţa electrodului în determinarea potenţialului este accentuat şi de alţi autori [9]. Descreşterea potenţialului *e* cu timpul de şedere al electrodului în soluţie arată că starea lui se apropie de starea pasivă, cînd acţiunea oxigenului în timpul mişcării este mai mică decît la început, după 1—3 ore de la introducerea electrodului în soluţie.

Pierderea de greutate a nichelului prin coroziune în soluţie de SO_4H_2 0,1 *n* creşte cu temperatura (fig. 11). Potenţialul *e* arată variaţii esenţiale cu timpul de şedere al electrodului în soluţie şi la menţinerea mişcării, dar variaţia lui cu temperatura nu pare asemănătoare cu cea a coroziunii. Explicarea abaterii probabil constă în aceea că potenţialul de electrod al nichelului este mult influenţat de procesele ce se petrec pe suprafaţa lui [10].

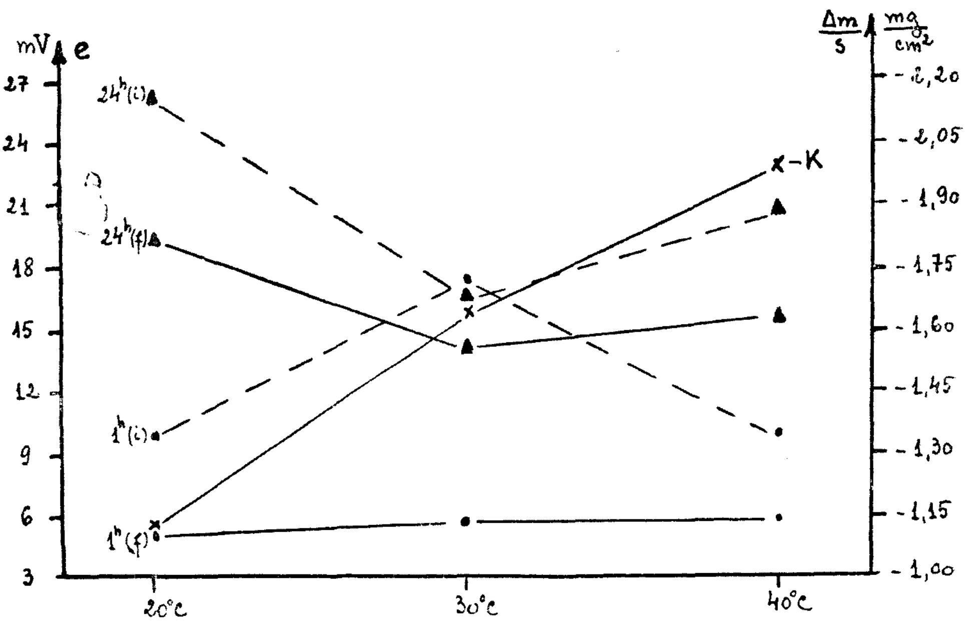


Fig. 11. Variaţia coroziunii şi a potenţialului motoelectric în funcţie de temperatură la nichel în soluţie de SO_4H_2 0,1*N*.

În soluție de ClNa 4%, la temperatura 20°C și 40°C, nichelul este corodat, în schimb la 30°C greutatea probei crește în timpul experienței (fig. 12). În mod corespunzător valoarea potențialului *e* la 20°C și 40°C, este însemnată, iar la 30°C este mică.

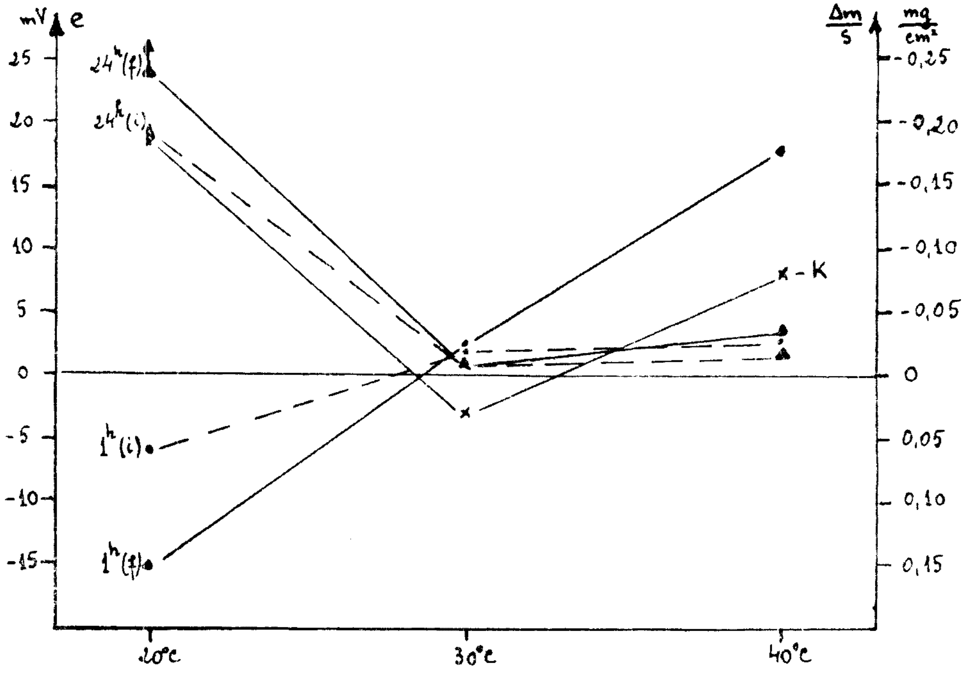


Fig. 12. Variația coroziunii și a potențialului motoelectric în funcție de temperatură la nichel în soluție de *NaCl* 4%.

CONCLUZII

1. Potențialul motoelectric al unui metal într-o soluție este în general cu atît mai mic cu cît este mai mică coroziunea lui în soluția respectivă. Dacă metalul nu este corodat, atunci și efectul motoelectric are valori neînsemnate, în acord cu constatarea făcută de Zapolskaia [3, 4].

2. Dacă greutatea probei crește în timpul experienței, adică se fac depuneri pe suprafața ei, atunci potențialul motoelectric atinge de asemenea valori apreciabile (5—15 mV) și nu rămîne constant în timpul de ședere al probei în soluție, ca și în cazul coroziunii.

3. Din cele menționate rezultă că variația potențialului motoelectric în timp și la menținerea mișcării provine din procesele ce au loc la suprafața limită metal-lichid.

BIBLIOGRAFIE

1. Kistiakovskii, V. A., *Elektrohimiceskie reakţii i elektrodnîe potenţiali nekatorîh metalov.* Izd. Politehn. In-ta, Petersburg, 1910.
2. Frumkin, N. A., Bagotki, V., S. Iofa, Z. A. Kabanov, N. V., *Cinetica proceselor electrodice* (trad. din l. rusă). Edit. energ. de stat, 1954, p. 253.
3. Zapolskaia N. A., *O vliianii nekatorîh passsivatonov na motoelektriceskii effekt nikelevo elektroda.* ,,Jurn Fiz. Him. SSSR'' 25. 352 (1951).
4. Zapolskaia. N. A., *O motoelektriceskom effekte nekatorîh metallov v rastvorah okisilitel.* ,,Jurn. Fiz. Him. SSSR'' 32, 318 (1958).
5. Kelemen F., *Néhány fém motoelektromos potenciálja és annak változása a hőmérséklettel savoldatokban,* ,,Magy. Kém. Folyóirat'', 66, 219 (1960).
6. Kelemen, F., *Über den Einfluss der Temperatur auf den motoelektrischen Effekt und über die Erklärung des Effektes.* ,,Z. Physik. Chemie'', 218.13 (1961).
7. Golden, L. B., Lane, I. R. and Acherman W. L., *Corrosion Resistance o Titanium, Zirconium and Stainless Steel,* ,,Ind. Eng. Chem.'' 44, nr. 8, 1930 (1953); vezi şi ,,Korrozia metallov'', Izd. I. L. Moskva, 1955.
8. Xitrov, V. A., Satalova V. I., Smolianikov. I. S. i Sadovskaia Iu. I., *K voprosu o vliiania temperaturî na skorost korroziia metallov v kislîh sredah,* ,,D.A.N. SSSR'' 133, 886 (1960).
9. Schwabe, K. und Müller, G., *Über die korrosionshemmende Wirkung des Dampfphaseninhibitors Dichan auf Eisen in neutralen Lösungen,* ,,Z. physik. Chem.'' 215, 143, (1960).
10. Kolotyrkin Iu. M. und Bune, *N. Ia., Das elektrochemische Verhalten von Nickel in Schwefelsäure in Anwesenheit verschiedener Oxydationsmittel.* ,,Z. Physik. Chem.'' 214, 264, (1960).

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ МОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ И КОРРОЗИИ НА НЕКОТОРЫХ МЕТАЛЛАХ ПОД ВЛИЯНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

(Резюме)

Изучая связь мотоэлектрического потенциала и коррозии у Ag, Al, Cu, Fe, Ni и Ta в растворе SO_4H_2 . 0,1 n и ClNa 4%, из изменений имеющих место с переменной температурой проверяется положение [3, 4], по которому мотоэлектрический потенциал имеет незначительные величины, если металл без коррозии. Устанавливается однако, что мотоэлектрический потенциал достигает значительных величин (5—15 mV) и в том случае, когда на поверхности электрода получаются отложения. Из результатов измерений следует, что изменение мотоэлектрического потенциала за время пребывания электрода в растворе или при поддерживании движения, получается из процессов происходящих на поверхности предела металл — жидкость, т.к. это изменение наблюдается во всех случаях, когда вес пробы испытывает изменения во время опыта.

ÉTUDE PARALLÈLE DE L'EFFET MOTOÉLECTRIQUE ET DE LA CORROSION, POUR CERTAINS MÉTAUX, SOUS L'INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

(Résumé)

En étudiant la relation du potentiel motoélectrique et de la corrosion pour *Ag*, *Al*, *Cu*, *Fe*, *Ni* et *Ta*, dans une solution de SO_4H_2 0,1 n et de $ClNa$ 4%, on vérifie d'après les variations concomittantes au changement de température l'observation [3,4] suivant laquelle le potentiel motoélectrique a des valeurs réduites si le métal n'est pas corrodé. On constate toutefois que le potentiel motoélectrique atteint des valeurs appréciables (5—15) mV dans le cas où des dépôts se produisent sur la surface de l'électrode. Des mesures effectuées il résulte que la variation du potentiel motoélectrique en fonction du temps de séjour de l'électrode dans la solution ou avec le maintien du mouvement, provient des processus qui ont lieu à la surface limite métal-liquide, car cette variation s'observe dans tous les cas où le poids de l'essai subit une variation durant l'expérience.

DETERMINAREA CONCENTRAŢIEI DE OXIGEN DINTR-UN AMESTEC DE GAZE, PE CALE MAGNETICĂ

de

I. URSU şi C. BĂLINTFFI

INTRODUCERE

În laboratoarele noastre s-au făcut numeroase cercetări asupra proprietăţilor magnetice ale gazelor [1, 2, 3, 4, 5]. De asemenea s-au cercetat şi posibilităţile de aplicare a acestor cercetări la analiza de gaze pe cale magnetică [6]. Pentru calităţile lor metodele magnetice de determinare a conţinutului de gaze paramagnetice şi în special a oxigenului gaz, sînt folosite astăzi pe scară largă atît în industrie cît şi în laboratoarele de cercetări [7]. Marea lor răspîndire este justificată de faptul că se pretează la automatizare şi constituie metode continue şi foarte exacte de analiză.

În lucrarea de faţă vom prezenta rezultatul cercetărilor noastre asupra unui oximetru (Junkalor) modificat, care ne-au servit la proiectarea unui nou tip de oximetru ce are calităţi de lucru superioare celor din import şi preţ de cost mai redus decît acestea.

METODA DE LUCRU. REZULTATE EXPERIMENTALE

Se ştie că oxigenul gaz are o susceptibilitate magnetică mult mai mare decît celelalte gaze. Acest fapt se foloseşte la analiza conţinutului de oxigen din amestecuri de gaze. Susceptibilitatea magnetică la temperatura absolută T şi T_0, unde $T > T_0$, este dată de relaţia:

$$K = \frac{C}{T}, \quad K_0 = \frac{C}{T_0} \tag{1}$$

unde C este constanta lui Curie. Susceptibilitatea magnetică specifică în funcţie de densitate este de forma:

$$\chi = \frac{Cm}{R} \cdot \frac{p}{T^2}, \quad \chi_0 = \frac{Cm}{R} \cdot \frac{p}{T_0^2} \tag{2}$$

unde p este presiunea, iar m masa moleculară a oxigenului.

Deoarece măsurarea directă prezintă dificultăţi, o utilizare practică au căpătat numai analizatoarele de gaze care folosesc fenomene secundare legate de proprietățile paramagnetice ale oxigenului. Printre aceste fenomene se numără: 1. variația vîscozității și conductibilității termice sub influența unui cîmp magnetic omogen și 2. efectul convecției termomagnetice („vînt magnetic") care apare în gazul paramagnetic dintr-un cîmp magnetic neomogen, dacă în gazul paramagnetic se realizează un gradient de temperatură. Esența convecției termomagnetice constă în faptul că susceptibilitatea magnetică a oxigenului se micșorează cu creșterea temperaturii (ecuația 3). Partea rece a gazului avînd prin urmare o susceptibilitate magnetică mare, va fi atrasă în domeniul cîmpului mai intens și va împinge gazul cald către sectorul de intensitate mică a cîmpului. Forța care acționează asupra elementului de volum de oxigen (se obține din relațiile 1 și 2) este de forma:

$$dF = \frac{Cmp}{R} \int_{0}^{v} H \frac{dH}{dx} \left(\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2} \right) dv \tag{3}$$

Ca rezultat al acțiunii acestei forțe asupra oxigenului gazos apare convecția termomagnetică. Efectul de convecție termomagnetică este cu atît mai intens cu cît concentrația de oxigen din amestecul de gaze este mai mare și cu cît gradientul de cîmp și de temperatură este mai mare.

Schema de principiu a unui oximetru care se bazează pe efectul de convecție termomagnetică este dat în fig. 1. Oximetrul este format dintr-o cameră de analiză inelară (1) cu un tub orizontal de legătură (3). Pe tubul de legătură se află o înfășurare de încălzire, împărțită în două părți egale A și B. La una din extremitățile tubului de legătură se află cîmpul magnetic neomogen (2). Gazul de analizat intră în camera de analiză prin partea de jos și iese prin partea de sus. În stînga magnetului găsindu-se gazul mai rece decît în partea dreaptă, curentul de gaz care se creează este îndreptat, prin tubul orizontal, de la stînga spre dreapta. Acest curent de convecție termomagnetică produce o inegală răcire a celor două înfășurări care funcționează ca termoanemometre, și deci produce dezechilibrarea punții în curent continuu din care fac parte cele două înfășurări.

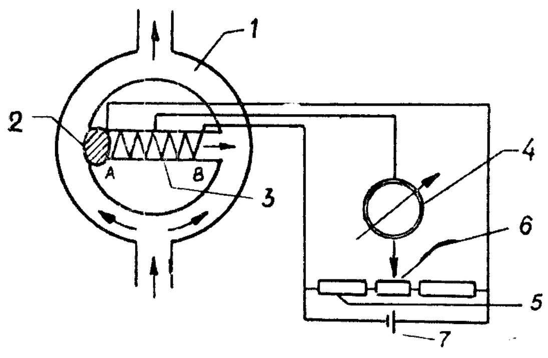
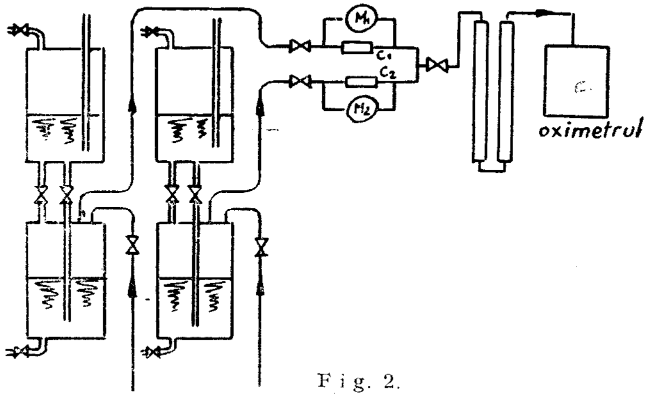


Fig. 1.

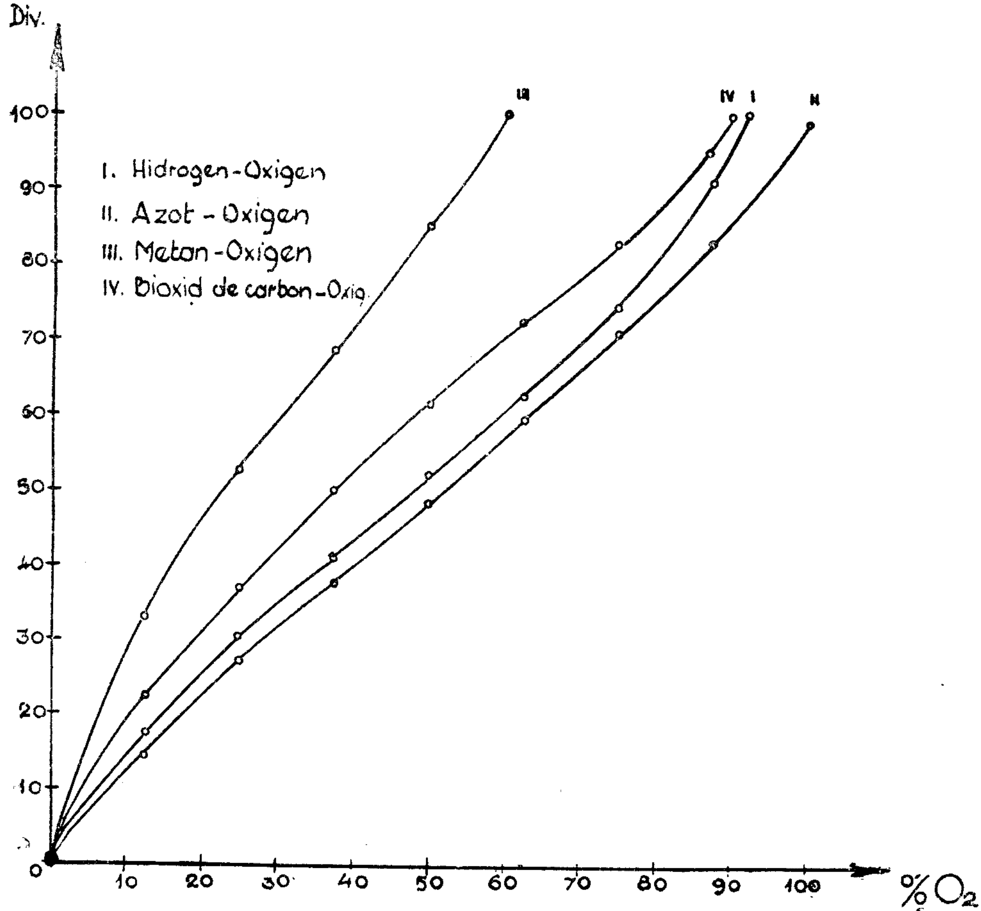
Pe principiul de mai sus s-au construit numeroase oximetre [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Tipul de oximetru experimentat de noi, căruia i s-au făcut modificări esențiale (de principiu), este de fabricație Junkalor-R.D.G.

Deoarece întreprinderea Junkalor-R.D.G. furnizează tipurile de oximetre cu domeniu de analiză limitat (0—2% O_2, 0—5% O_2, 0—10% O_2, 0—21% O_2, 0—50% O_2, 0—100% O_2), noi am căutat prin modificările făcute să putem folosi un singur oximetru cu mai multe domenii de măsură. În același timp am etalonat oximetrul (fig. 2, 3 și 4) cu numeroase ames-



M_1
C_1
C_2
M_2
oximetrul

Fig. 2.



Div.
I. Hidrogen-Oxigen
II. Azot - Oxigen
III. Metan-Oxigen
IV. Bioxid de carbon-Oxig.
III
IV
I
II
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
% O_2

Fig. 3.

tecuri de gaze (O_2-N_2, O_2-CO_2, O_2-CH_4, O_2-H_2, Aer-H_2, Aer$-CH_4$, Aer-N_2, Aer$-CO_2$) şi de asemenea am ridicat de circa 25 de ori sensibilitatea de lucru a oximetrului. Aceste studii ne-au permis să proiectăm un oximetru superior celor amintite, ca performanţe şi la un preţ mai scăzut.

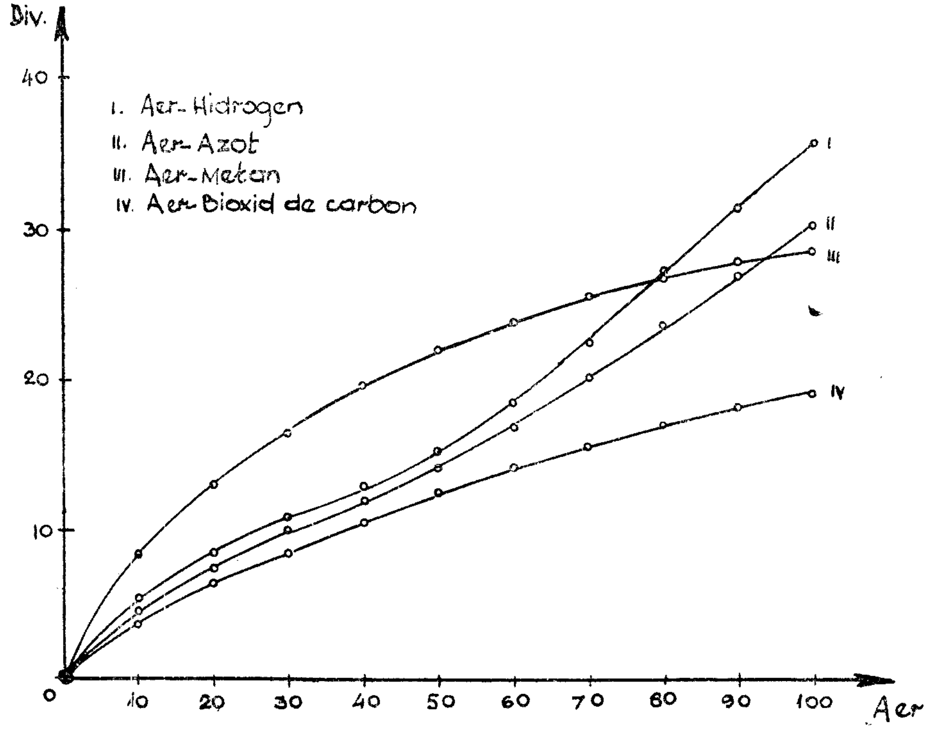


Fig. 4.

Pentru mărirea sensibilităţii oximetrului s-au făcut următoarele modificări:

a) Ţinînd seama de teoria punţilor neechilibrate în curent continuu (fig. 5), am modificat rezistenţele din diagonala punţii de măsură în aşa fel ca să se realizeze condiţia de optim dintre rezistenţele punţii şi parametrii traductorului:

$$R_i = \frac{R_1}{2} + \frac{R_3}{2}$$

unde R_i este rezistenţa interioară echivalentă. Dacă $\frac{\Delta R_1}{R_1} = \sigma$ atunci avem:

$$I_m = U \frac{\frac{\sigma}{2}}{R_m + R_i}$$

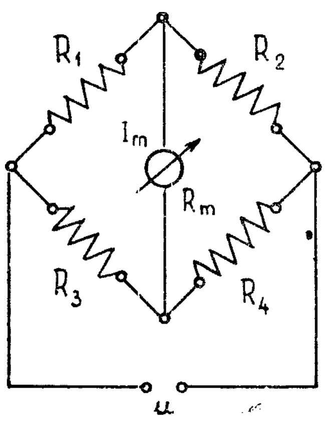


Fig. 5.

unde I_m este intensitatea curentului din diagonala punții
U — tensiunea de alimentare a punții
R — rezistența din diagonala punții.

Dacă $U \frac{\sigma}{2} = U_0$ avem :

$$I_m = \frac{U_0}{R_m + R_i}$$

În cazul în care nu s-au făcut modificări în montajul electric al punții (știind că instrumentele din diagonala punții sînt de tip magnetoelectric cu rezistența interioară de 140 Ω și cu rezistențele adiționale de 100 Ω și 50 Ω), cu ajutorul relației de mai sus se obține:

$$R_m = 220\ \Omega$$
$$R_1 = R_2 = 54\ \Omega$$
$$R_3 = R_4 = 50\ \Omega$$
$$R_i = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2} = 52\Omega$$
$$I'_m = \frac{U_0}{272}$$

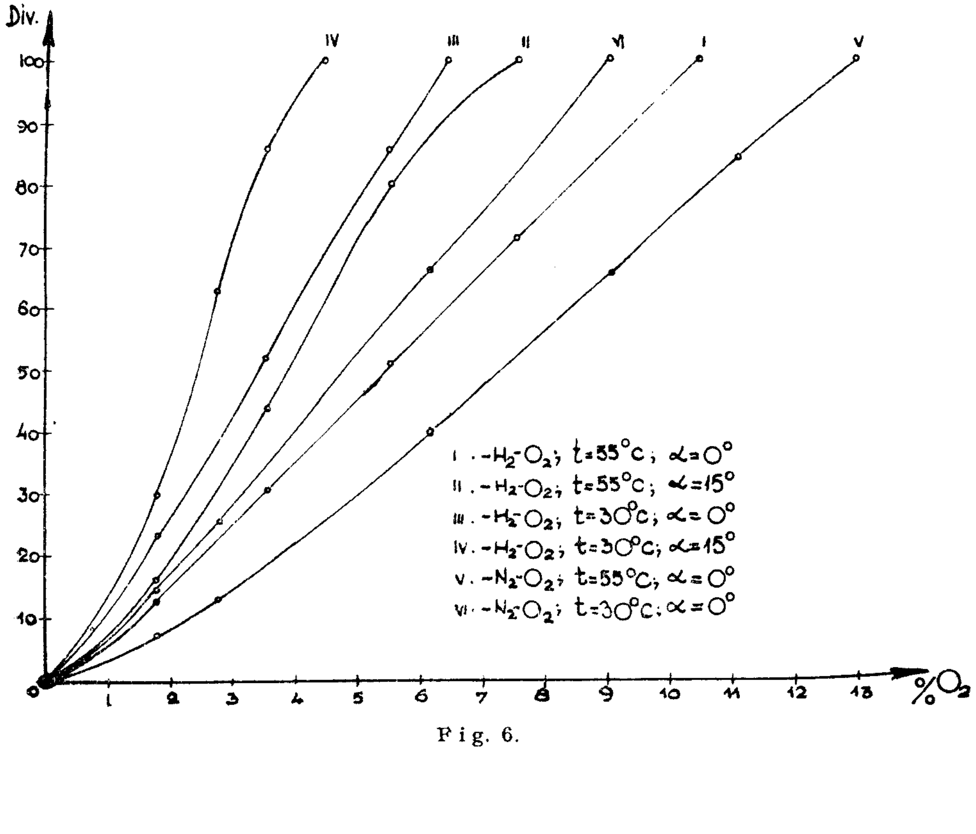


Fig. 6.

Dacă se micşorează rezistenţa din diagonala punţii pentru realizarea condiţiilor optime de sensibilitate a punţii:

$$R_m = 30\ \Omega$$

$$\bar{I}''_m = \frac{U_0}{82}$$

În acest caz sensibilitatea (s) a punţii este dată de relaţia:

$$s = \frac{I''_m}{I'_m} = \frac{272}{82} = 3{,}3$$

Se vede că în acest caz numai prin modificările rezistenţelor din diagonala punţii se poate ridica sensibilitatea oximetrului de cca 3,3 ori. Măsurătorile experimentale confirmă acest lucru (vezi fig. 6).

b) Întrucît rezistenţele de pe braţul orizontal AB al traductorului lucrează ca termoanemometre, pentru mărirea sensibilităţii oximetrului am căutat să mărim efectul de tiraj prin acest tub înclinînd traductorul

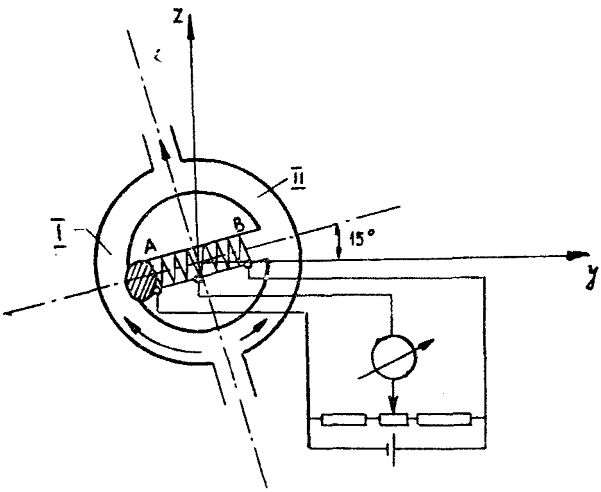


Fig. 7.

sub diferite unghiuri. Din măsurătorile efectuate s-a găsit efectul maxim pentru o înclinare de 15° (vezi fig. 7). În aceste condiţii sensibilitatea instrumentului a crescut de circa 15 ori.

c) Dat fiind dependenţa efectului de convecţie termomagnetică de temperatură (vezi relaţia 3), s-au încercat diferite temperaturi de termostatare. Prin termostatarea celulei de analiză la 30 °C s-a găsit că sensibilitatea de măsură a oximetrului creşte de 25 ori (vezi fig. 6).

CONCLUZII

Studiile făcute, arată că instalaţia pentru analiza magnetică a gazelor poate fi folosită la analiza a numeroase amestecuri de gaze cu oxigen, în condiţii de sensibilitate foarte ridicată şi cu timp de răspuns satisfăcător (15 sec.). În aceste condiţii oximetrul poate fi folosit la analiza automată a amestecurilor de gaze cu oxigen (gaze de ardere, şi alte gaze conţinînd oxigen), precum şi la automatizarea şi controlul diferitelor procese în care intervin amestecuri de gaze paramagnetice.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Mercea- I. Ursu, *Untersuchungen über die Zähigkeitsänderung in magnetiscnen Feldern.* ,,Rev. d. Phys''., **II**, 2, 217 (1957).
2. V. Mercea — I. Ursu , *Studiu asupra limitei de variaţie a vîscozităţii oxigenului în cîmp magnetic.* ,,Studii şi cercetări de fizică'', **9**, 2, 227 (1958).
3. I. Ursu, *Variaţia magnetică a vîscozităţii oxigenului şi aerului în medii poroase.* ,,Bul. Şt. Univ. ,,V. Babeş'' şi ,,Bolyai'' Cluj'', 2(1957).
4. I. Ursu. *Paramagnetische Effecte bei der zähen Strömung von Sauerstoff-Gasgemischen im magnetischen Feld und ihre Anwendung bei der Untersuchung von Gasen.* ,,Rev. d. Phys'', 1,51 (1958).
5. I. Ursu, *Variation of the Viscosity of Certain Gas—Oxygen Mixtures under the Influence of a Magnetic Field.* Acad. R. P. R., IFA Măgurele (1958).
6. I. Ursu, *Efecte magnetomecanice la oxigen.* ,,Monografii de fizică'' Edit. Acad. R.P.R., 1959.
7. S. Badics, *Korszerű gázvizsgáló készülék.* ,,Mérés és automatika'', 12, 361 (1955).
8. C. A. Dyer, *A Paramagnetic Oxygen Analyser.* ,,Rev. Sci. Instr'', 18, 696 (1957).
9. R. Richardson, *Continuous Determination of Oxygen Concentration Based on the Magnetic Properties of Gases.* ,,Transactions of A. S. M. E.'', 70, 211 (1948).
10. M. M. Feinberg, *Sovromennie metodî avtomaticeskova analiza gazov v promîşleniosti.* ,,Zavodskaia laboratoria'', 15, 6 (1949).
11. E. Lehrer u. E. Ebingraus, *Ein Apparat zu Sauerstoffmessungen in Gasgemischen auf magnetischer Grundlage.* ,,Z. Angew. Phys.'', 2,20 (1950).
12. J. Hengstenberg, B. Sturm u. O. Wincler, *Messen und Regeln in der chemischen Technik.* Berlin, 1957, p. 463—482.
13. A. Hobson a. R. H. Kary, *Two Designs for a Paramagnetic Oxygen Meter.* ,,Journ. Scient. Instr''. 5,33, 176 (1956).
14. Prospect, VEB, Junkalor, Catalog nr. 4, pag. 7a/1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНЫМ ПУТЕМ КОНЦЕНТРАЦИИ КИСЛОРОДА В СМЕСИ ГАЗОВ

(Резюме)

В этой работе дано изучение условий поднятия достижений оксиметра, действующего на принципе термомагнитной конвекции.

Изучив несколько смесей газов (O_2—N_2, O_2—CO_2, O—CH_4, O_2—H_2, воздух—H_2, воздух—N_2, воздух—CH_4, воздух—CO_2) пришли к значительному повышению чувствительности оксиметра. Так, например, для смеси О—Н чувствительность оксиметра по отношению к 1% O_2, как было вначале, возросла до 0,025% O_2.

Величина действия тяги аналитической камеры, изменение температурных условий, создание наилучших условий для работы реостатного датчика, при помощи которых были получены указанные выше достижения, позволили авторам спроектировать новый тип оксиметра.

DÉTERMINATION DE LA CONCENTRATION EN OXYGÈNE DANS UN MÉLANGE DE GAZ, PAR VOIE MAGNÉTIQUE

(Résumé)

On recherche dans quelles conditions peuvent être améliorées les performances d'un oxymètre fonctionnant d' après le principe de la convection thermomagnétique.

Etudiant plusieurs mélanges de gaz (O_2N_2, O_2-CO_2, O_2-CH_4, O_2-H_2, air-H_2, air-N_2 air-CH_4, air-CO_2) on est parvenu à augmenter nettement la sensibilité de l'oxymètre: par rapport à 1% O_2 telle qu'elle était au début, elle s'est élevée à 0,025% O_2.

La grandeur de l'effet de tirage pour la cellule d'analyse, le changement des conditions de température, la réalisation des conditions optima de fonctionnement du traducteur résistif, à l'aide duquel ont été réalisées les performances ci-dessus, nous ont permis d'établir le projet d'un nouveau type d'oxymètre.

OBSERVAŢII ASUPRA PUNCTELOR NORMALE DE TOPIRE LA ELEMENTELE DE TRANZIŢIE

de

IULIU POP, OLIVIA POP ŞI ALEXANDRU NICULA

Studiind proprietăţile magnetice a elementelor de tranziţie Néel [1] a găsit o creştere regulată a cîmpului molecular începînd de la titan şi pînă la nichel, la fel şi pentru seria Ru, Rh, Pd, şi Os, Ir, Pt.

S l a t e r [2] a găsit un criteriu pentru feromagnetismul elementelor Ni, Fe, Co luînd în considerare diametrul δ al păturii „$3d$" şi distanţa d dintre doi atomi vecini în reţeaua cristalină a acestor elemente, stabilind şi o formulă pentru calculul diametrului oricărui înveliş electronic al unui atom cu o configuraţie electronică dată. Mergînd pe aceeaşi cale S t o n e r [3] a precizat faptul că energia de interacţiune are o variaţie regulată în funcţie de raportul $\frac{d}{\delta}$ pentru elementele de tranziţie.

Se vede, prin urmare, că proprietăţile magnetice ale elementelor de tranziţie sînt strîns legate de configuraţia electronică a atomilor şi de structura lor cristalină.

Examinînd dintr-un punct de vedere analog o altă latură a acestor elemente, şi anume, considerînd că temperatura normală de topire este o măsură a energiei de interacţiune a atomilor în reţeaua cristalină, noi am obţinut o variaţie regulată a acestor temperaturi pentru majoritatea elementelor de tranziţie în funcţie de raportul $\frac{a}{\delta}$, unde prin a am notat constanta reţelei cristaline, iar prin δ diametrul păturii electronice necomplete a elementelor în Å.

În figură am reprezentat în ordonată temperaturile normale de topire exprimate în grade Celsius pentru un număr de 17 elemente de tranziţie iar în abscisă raportul $\frac{a}{\delta}$.

Din figură se vede că temperaturile normale de topire se dispun după o hiperbolă echilateră, astfel că între mărimile reprezentate se poate stabili ușor o relație de dependență

$$t_f \frac{a}{\delta} = \text{const.}$$

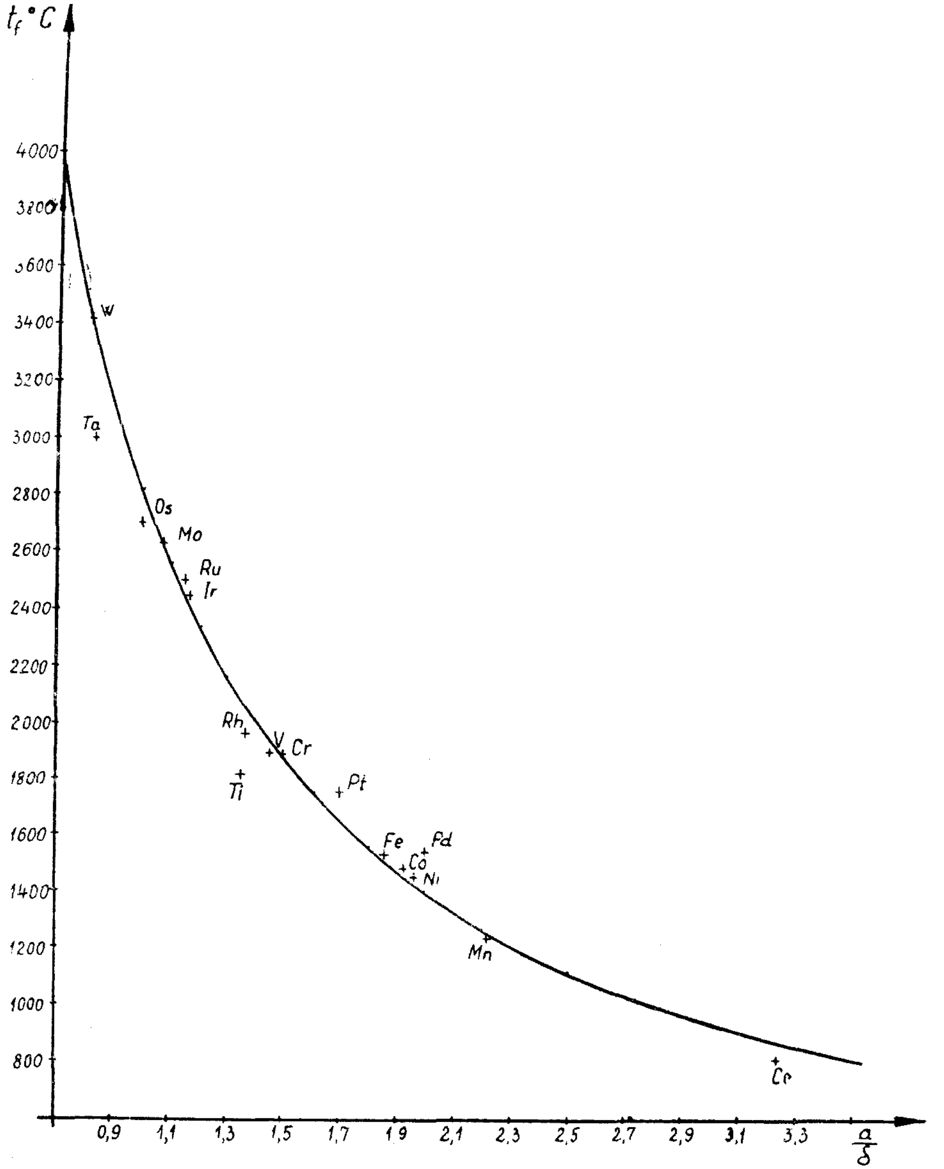


Fig. 1.

unde t_f reprezintă temperatura normală de topire, *a* și δ au semnificația deja cunoscută, constanta $C = 2810$. Micile abateri care se constată în cazul Ti, Ta, Pt, Pd le-am atribuit preciziei cu care a fost calculat δ, care este legat de o anumită configurație electronică a atomului și reprezintă de fapt probabilitatea ca electronii păturii respective să se găsească la o anumită distanță față de nucleul atomului.

Datele numerice cuprinse în tabelul de mai jos le-am cules din literatura de specialitate [1], [2], [4], [5].

Tabelul nr. 1

Nr. crt.	Simbol și nr. de ord.	Denumirea păturii electronice	Diametrul păturii electronice δ Å	Constanta rețelei crist.		$\frac{a}{\delta}$	$t_f \cdot a$°C	$t_f \cdot \frac{a}{\delta}$
				a Å	*c* Å			
1	22 Ti	3d	2,46	3,3132	—	—	1.820	2449,7
2	23 V	3d	2,09	3,0338	—	1,451	1.1919	2774,4
3	24 Cr	3d	1,93	2,8796	—	1,497	1.890	2829,3
4	25 Mn	3d	1,71	3,72	—	2,207	1.245	2747,7
5	26 Fe	3d	1,53	2,8606	—	1,86	1536	2856,9
6	27 Co	3d	1,3	2,501	4,066	1,924	1495	2876,4
7	28 Ni	3d	1,27	2,49	4,08	1,96	1455	2851,8
8	42 Mo	4d	2,49	3,141	—	1,07	2625	2808,8
9	44 Ru	4*d*	2,33	2,6984	4,273	1,15	2500	2857
10	45 Rh	4d	1,98	2,7	—	1,363	1966	2681,7
11	46 Pd	4d	1,93	3,8824	—	2,01	1554	3123,5
12	7r Ta	5d	3,95	3,2959	—	0,834	2996	2578,7
13	74 W	5d	3,44	2,82	—	0,82	3410	2796,2
14	76 Os	5d	2,72	2,7298	4,3104	1,003	2700	2708,1
15	77 Ir	5d	2,32	2,709	—	1,176	2454	2863,8
16	78 Pt	5d	2,25	3,9158	—	1,7	1760	2992
17	58 Ce	4f	1,6	5,1612	—	3,226	804	2593,7

Din ultima coloană se pot constata abaterile de la valoarea medie a elementelor citate mai sus. Considerăm că nici nu se poate pretinde o regularitate perfectă dată fiind aproximația cu care s-a calculat valoarea diametrului δ. Remarcăm numai faptul că după aceeași formulă au calculat diametrul δ, Néel și Slater și au obținut valori diferite la ordinul zecimilor de Å. Această diferență se explică prin faptul că pentru a calcula valorile diametrilor învelișurilor electronice, mai întîi este necesară precizarea unei anumite configurații electronice a atomului; ori la cei doi autori configurația electronică aleasă probabil diferă. Care din cele două serii de valori calculate și configurații electronice alese corespund mai bine realității este greu de precizat. În plus între valorile calculate și cele obținute din observații experimentale există de asemenea deosebiri, cu atît mai mult cu cît valorile experimentale de această dată au un caracter mult mai aproximativ, după părerea noastră.

Cu toate acestea, considerațiile făcute de noi mai sus le credem utile în fizica corpului solid, întrucît regularitatea constatată între punctele normale de topire a elementelor de tranziţie şi raportul $\frac{a}{\delta}$ nu pare a fi întîmplătoare pentrucă în cristalele acestor elemente predomină forţe de schimb puternice, iar elementele cercetate fac parte din patru serii şi toate conduc la acelaşi rezultat (vezi tabelul).

Am cercetat dependenţa punctelor normale de topire a elementelor de mai sus şi în funcţie de raportul dintre constanta reţelei cristaline şi diametrul atomic, însă n-am obţinut nici o regularitate.

În concluzie, accentuăm că în teoria topirii trebuie să se ţină cont şi de consideraţiunile de mai sus alături de alţi factori care determină fenomenul topirii.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Néel, *Propriétés magnétiques de l'état métallique et énergie d'interaction entre atomes magnétiques*, în ,,Ann. de Phys.'' **5** (1936), ppp. 267—271.
2. J. Slater, *Atomic Shielding Constants*, în ,,Phys. Rev.'' **36** (1930), p. 57.
3. E. C. Stoner, *Atomic Moments in Ferromagnetic Metals ans Alloys with Non-Ferromagnetic Elements*. ,,Phil. Mag.'' (7), **15** (1932), p. 1018—1034.
4. A. E. Vol, *Stroenie i svoistva dvoinîh metaliceskih sistem*, t. 1, Fizmatghiz (1959), ppp. 8—60.
5. R. Bozorth, *Feromagnetizm*, Izd. Inostran. Lit., Moskva, 1956, ppp. 351—357; 686—691.

НАБЛЮДЕНИЯ НАД НОРМАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ ПЛАВЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

(Резюме)

В работе проработаны данные относительно нормальных точек плавления переходных элементов в зависимости от соотношения между постоянной кристаллической решетки и диаметром недостроенного слоя соответствующих элементов. Рассматривая нормальную температуру плавления, как меру энергии взаимодействия между атомами кристалла, авторы устанавливают отношение нормальной температуры плавления и отношение постоянной кристаллической решетки к диаметру недостроенного электронного слоя.

$$t_f \frac{a}{\delta} = \text{const.}$$

где t_f есть нормальная температура плавления, a — постоянная кристаллической решетки в фазе плавления, а δ есть диаметр неполного электронного слоя переходных элементов.

OBSERVATION SUR LES POINTS NORMAUX DE FUSION DANS LES ÉLÉMENTS DE TRANSITION

(Résumé)

Les auteurs ont interprété les données relatives aux points normaux de fusion des éléments de transition en fonction du rapport entre la constante du réseau cristallin et le diamètre de la couche incomplète des éléments respectifs. Considérant la température normale de fusion comme mesure de l'énergie d'interaction entre les atomes du cristal, les auteurs établissent une relation entre les températures normales de fusion et le rapport entre la constante du réseau cristallin et le diamètre de la couche électronique incomplète

$$t_f \cdot \frac{a}{\delta} = \text{const.}$$

où t_f est la température normale de fusion, a la constante du réseau cristallin, dans la phase de fusion, et δ le diamètre de la couche électronique incomplète des éléments de transition.

ASUPRA STABILIRII MATRICEI ASOCIATE SISTEMULUI DE ECUAȚII DIFERENȚIALE MAGNETOHIDRODINAMICE ALE UNUI FLUID PERFECT, INCOMPRESIBIL, CU CONDUCTIVITATE ELECTRICĂ INFINIT DE MARE

de

MIRCEA VASIU

În această lucrare ne propunem să stabilim matricea asociată sistemului de ecuații diferențiale magnetohidrodinamice ale unui fluid perfect, incompresibil, ce prezintă o conductivitate electrică infinit de mare ($\sigma = +\infty$).

Pentru simplificarea problemei vom neglija curentul de deplasare electrică, forțele masice de tip neelectromagnetic, procesele de conductibilitate termică și de transfer de radiație din interiorul fluidului conductor.

Stabilirea matricei asociate o vom face pe baza matricelor asociate unui sistem de ecuații diferențiale liniare cu derivate parțiale, cu coeficienți constanți, metodă dezvoltată la noi în țară de către acad. Gr. C. Moisil, [1], iar în Uniunea Sovietică de către I. N. Lopatinski [2]. Conform acestei metode, care permite o tratare unitară a sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu derivate parțiale cu coeficienți constanți, unui astfel de sistem i se poate asocia o matrice ale cărei elemente sînt polinoame de mai multe variabile. Metoda matricelor asociate a fost aplicată de către acad. Gr. C. Moisil și colectivul său la studiul unei serii de probleme din mecanica mediilor continuu deformabile și din electrodinamică [3), [4], iar de către Ed. Nicolau la studiul propagării undelor electromagnetice [5].

ECUAȚIILE FUNDAMENTALE

Sub aspect magnetohidrodinamic, studiul unui fluid perfect și conductor — în condițiile fizice arătate mai sus —, se face cu ajutorul următorului sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale neliniare [6]:

$$\operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \; \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}; \; \sigma = +\infty \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad})\vec{v} = \frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{2}$$

cu condițiile

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{4}$$

Observăm de asemenea că ecuația (3) este o consecință a ecuației (1) întrucît, aplicînd operatorul divergență asupra acestei ecuații, membrul drept al ecuației (1) este identic nul și deci ne putem dispensa de ecuația (3). De asemenea presupunem densitatea constantă $\rho = \rho_0 = \text{const.}$, deoarece fluidul este incompresibil. Pe baza celor arătate mai sus, sistemul de ecuații (1)—(4) se reduce la ecuațiile următoare:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\vec{v} \times \vec{H}) \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad})\vec{v} = \frac{1}{4\pi\rho_0} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p \tag{2'}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{4'}$$

Sistemul de ecuații cu derivate parțiale (1′), (2′), (4′) fiind neliniar, pentru a putea aplica metoda matricelor asociate, va trebui, în prealabil, să liniarizăm acest sistem de ecuații.

În acest sens vom admite că starea staționară inițială este definită de mărimile $\vec{H}_0$, $\vec{v}_0$, ρ_0 și p_0 pe care le considerăm constante. Admitem apoi că, această stare este puțin modificată prin suprapunerea unor mici perturbații caracterizate de mărimile $\vec{h}$, $\vec{v}'$ p, încît cîmpul magnetic, viteza presiunea, densitatea vor fi date de expresiile:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}; \; \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \; p = p_0 + p'; \; \rho = \rho_0 \tag{5}$$

unde $\vec{h}$, $\vec{v}'$ p' sînt perturbații mici, astfel încît în calcule, patratele și produsele lor se neglijează.

Înlocuind expresiile (5) în sistemul de ecuații cu derivate parțiale neliniare (1′), (2′), (4′), obținem, în urma calculelor efectuate, următorul sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale liniare, cu coeficienţi constanţi:

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = (\vec{H}_0 \cdot \operatorname{grad})\vec{v}' - (\vec{v}_0 \cdot \operatorname{grad})\vec{h} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \operatorname{grad})\vec{v}' = \frac{1}{4\pi\rho_0}(\vec{H}_0 \cdot \operatorname{grad})\vec{h} - \frac{1}{4\pi\rho_0}\operatorname{grad}(\vec{H}_0 \cdot \vec{h}) - \tag{7}$$

$$- \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p'$$

$$\operatorname{div} \vec{v}' = 0 \tag{8}$$

Luînd în considerare sistemul cartezian tridimensional de axe de coordonate, astfel încît să avem $\vec{h}(h_x, h_y, h_z)$ şi $\vec{v}'(v_x', v_y', v_z')$ şi făcînd proiecţiile ecuaţiilor diferenţiale vectoriale (6), (7), (8) pe cele trei axe de coordonate, obţinem următorul sistem de ecuaţii diferenţiale scalare cu derivate parţiale liniare, cu coeficienţi constanţi:

$$\frac{\partial h_x}{\partial t} - \left(H_{0x}\frac{\partial v_x'}{\partial x} + H_{0y}\frac{\partial v_x'}{\partial y} + H_{0z}\frac{\partial v_x'}{\partial z}\right) + \left(v_{0x}\frac{\partial h_x}{\partial x} + v_{0y}\frac{\partial h_x}{\partial y} + v_{0z}\frac{\partial h_x}{\partial z}\right) = 0 \tag{$6_1'$}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t} - \left(H_{0x}\frac{\partial v_y'}{\partial x} + H_{0y}\frac{\partial v_y'}{\partial y} + H_{0z}\frac{\partial v_y'}{\partial z}\right) + \left(v_{0x}\frac{\partial h_y}{\partial x} + v_{0y}\frac{\partial h_y}{\partial y} + v_{0z}\frac{\partial h_y}{\partial z}\right) = 0 \tag{$6_2'$}$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} - \left(H_{0x}\frac{\partial v_z'}{\partial x} + H_{0y}\frac{\partial v_z'}{\partial y} + H_{0z}\frac{\partial v_z'}{\partial z}\right) + \left(v_{0x}\frac{\partial h_z}{\partial x} + v_{0y}\frac{\partial h_z}{\partial y} + v_{0z}\frac{\partial h_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{$6_3'$}$$

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t} + \left(v_{0x}\frac{\partial v_x'}{\partial x} + v_{0y}\frac{\partial v_x'}{\partial y} + v_{0z}\frac{\partial v_x'}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}(H_{0x}h_x + H_{0y}h_y + H_{0z}h_z) - \tag{$7_1'$}$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho_0}\left(H_{0x}\frac{\partial h_x}{\partial x} + H_{0y}\frac{\partial h_x}{\partial y} + H_{0z}\frac{\partial h_x}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v_y'}{\partial t} + \left(v_{0x}\frac{\partial v_y'}{\partial x} + v_{0y}\frac{\partial v_y'}{\partial y} + v_{0z}\frac{\partial v_y'}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}(H_{0x}h_x + H_{0y}h_y + H_{0z}h_z) - \tag{$7_2'$}$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho_0}\left(H_{0x}\frac{\partial h_y}{\partial x} + H_{0y}\frac{\partial h_y}{\partial y} + H_{0z}\frac{\partial h_y}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_z'}{\partial t} + \left(v_{0x}\frac{\partial v_z'}{\partial x} + v_{0y}\frac{\partial v_z'}{\partial y} + v_{0z}\frac{\partial v_z'}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(H_{0x}h_x + H_{0y}h_y + H_{0z}h_z) - \tag{$7_3'$}$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho_0}\left(H_{0x}\frac{\partial h_z}{\partial x} + H_{0y}\frac{\partial h_z}{\partial y} + H_{0z}\frac{\partial h_z}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} = 0$$

$$(8')$$

Am obținut astfel un sistem de 7 ecuații diferențiale cu derivate parțiale liniare, cu 7 necunoscute: h_x, h_y, h_z, v_x', v_y', v_z' și p'.

Conform metodei propuse de acad. G r. C. M o i s i l, un sistem de ecuații cu derivate parțiale liniare, cu coeficienți constanți, fără membrul doi, se poate scrie simbolic sub forma:

$$E_i = 0 \tag{9}$$

unde

$$E_i = \sum_{j=1}^{m} D_{ij}\varphi_j \tag{10}$$

D_{ij} fiind operatori diferențiali de tipul:

$$D_{ij} = \sum a_{i_1} \ldots a_{i_s} \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} \tag{11}$$

suma extinzîndu-se asupra tuturor combinărilor cu repetiție ale indicilor $i_1, \ldots i_s$ aleși printre numerele naturale $1, 2, \ldots r$, s variază între valoarea 0 și t, unde t este ordinul operatorului diferențial respectiv, φ_j sînt funcții de r variabile și operatorii respectivi acționează asupra acestor funcții, iar $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ sînt constantele operatorilor diferențiali respectivi.

Matricea asociată sistemului (10) de ecuații diferențiale cu derivate parțiale liniare, cu coeficienți constanți, este de forma:

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = D_{ij} \tag{12}$$

dacă această matrice are ca elemente așa numitele polinoame $P_{ij}(X)$ asociate operatorilor diferențialei D_{ij}:

$$P_{ij}(X) = \sum a_{i_1} \ldots a_{i_s} \cdot X_{i_1} \ldots X_{i_s} \tag{13}$$

În cazul problemei noastre, vom introduce matricea cu o singură coloană, a cărei elemente sînt funcțiile necunoscute h_x, h_y, h_z, v_x', v_y', v și p':

$$\varphi = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \\ v_x' \\ v_y' \\ v_z' \\ p' \end{pmatrix} \tag{14}$$

Avînd în vedere sistemul (6′)—(8′) de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale liniare, cu coeficienţi constanţi, pe baza formulelor (14), (13), (12) şi (11), şi a următoarelor notaţii:

$$T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z} \tag{15}$$

unde T, X, Y, Z reprezintă operatori diferenţiali, şi

$$\begin{aligned} a &= v_{ox}, & b &= v_{oy}, & c &= v_{oz} \\ d &= H_{ox}, & e &= H_{oy}, & f &= H_{oz} \end{aligned} \tag{16}$$

unde a, b, c, d, e şi f reprezintă mărimi constante, iar polinoamele asociate $P_{ij}(X)$ $(i = 1, 2, \ldots 7,\ j = 1, 2, \ldots 7)$ sînt de forma:

$$\begin{aligned} &P_{11} = T + aX + bY + cZ \\ &P_{12} = 0,\ P_{13} = 0 \\ &P_{14} = -(dX + eY + fZ) \\ &P_{15} = 0,\ P_{16} = 0,\ P_{17} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &P_{21} = 0 \\ &P_{22} = T + aX + bY + cZ \\ &P_{23} = 0,\ P_{24} = 0 \\ &P_{25} = -(dX + eY + fZ) \\ &P_{26} = 0,\ P_{27} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &P_{31} = 0,\ P_{32} = 0 \\ &P_{33} = T + aX + bY + cZ \\ &P_{34} = 0,\ P_{35} = 0 \\ &P_{36} = -(dX + eY + fZ) \\ &P_{37} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &P_{41} = -(lY + mZ) \\ &P_{42} = lX \\ &P_{43} = mX \\ &P_{44} = T + aX + bY + cZ \\ &P_{45} = 0,\ P_{46} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

$$P_{47} = \frac{1}{\rho_0} X$$

unde prin constantele l şi m am notat:

$$l = \frac{H_{oy}}{4\pi\rho_0}, \quad m = \frac{H_{oz}}{4\pi\rho_0} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} P_{51} &= kY \\ P_{52} &= -(kX + mZ) \\ P_{53} &= 0, \ P_{54} = 0 \\ P_{55} &= T + aX + bY + cZ \\ P_{56} &= 0 \\ P_{57} &= \frac{1}{\rho_0} Y \end{aligned} \tag{22}$$

unde prin constanta k am notat:

$$k = \frac{H_{0x}}{4\pi\rho_0} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} P_{61} &= kZ \\ P_{62} &= lZ \\ P_{63} &= -(kX + lY) \\ P_{64} &= 0, \ P_{65} = 0 \\ P_{66} &= T + aX + bY + cZ \\ P_{67} &= \frac{1}{\rho_0} Z \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} P_{71} &= 0, \ P_{72} = 0, \ P_{73} = 0, \\ P_{74} &= X \\ P_{75} &= Y \\ P_{76} &= Z \\ P_{77} &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Avînd în vedere notaţiile (15) şi expresiile (17—(25) pentru polinoamele asociate $P_{ij}(X)$ operatorilor diferenţiali $D_{ij}(i = 1, 2 \ldots 7; j = 1, 2, \ldots 7)$, matricea M asociată sistemului de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale liniare (6′)—(8′), are forma următoare:

$$
= \begin{pmatrix}
T+aX+bY+cZ & 0 & 0 & -(dX+eY+fZ) & 0 & 0 & 0 \\
0 & T+aX+bY+cZ & 0 & 0 & -(dX+eY+fZ) & 0 & 0 \\
0 & 0 & T+aX+bY+cZ & 0 & 0 & -(dX+eY+fZ) & 0 \\
-(lY+mZ) & lX & mX & T+aX+bY+cZ & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0}X \\
kY & -(kX+mZ) & 0 & 0 & T+aX+bY+cZ & 0 & \frac{1}{\rho_0}Y \\
kZ & lZ & -(kX+lY) & 0 & 0 & T+aX+bY+cZ & \frac{1}{\rho_0}Z \\
0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 0
\end{pmatrix} \qquad (26)
$$

Caz particular. Considerăm cîmpul magnetic $\vec{H}_0$ în starea neperturbată orientat după axele Oy şi Oz şi viteza fluidului $\vec{v}_0$ în starea neperturbată o considerăm nulă. Perturbaţia $\vec{h}$ a cîmpului magnetic şi perturbaţia $\vec{v}'$ a vitezei fluidului le considerăm dirijate după cele trei axe de coordonate carteziene. În acest caz vom avea îndeplinite următoarele condiţii:

$$
\begin{aligned}
&h_x \neq 0; \quad h_y \neq 0; \quad h_z \neq 0; \quad v'_x \neq 0; \quad v'_y \neq 0; \quad v'_z \neq 0 \\
&a = 0; \quad b = 0; \quad c = 0 \\
&d = 0; \quad e = H_{oy} = \text{const.}; \quad f = H_{oz} = \text{const.} \\
&k = 0; \; l = \frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0}; \; m = \frac{H_{0z}}{4\pi\rho_0}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

În acest caz matricea M definită în (26) se reduce la forma simplificată:

$$
\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix}
T & 0 & 0 & -fZ-eY & 0 & 0 & 0 \\
0 & T & 0 & 0 & -fZ-eY & 0 & 0 \\
0 & 0 & T & 0 & 0 & -fZ-eY & 0 \\
-mZ-lY & lX & mX & T & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0}X \\
0 & -mZ & 0 & 0 & T & 0 & \frac{1}{\rho_0}Y \\
0 & (lZ) & -lY & 0 & 0 & T & \frac{1}{\rho_0}Z \\
0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 0
\end{pmatrix}
\tag{28}
$$

Determinantul acestei matrice are valoarea:

$$
\begin{aligned}
D = \frac{1}{\rho_0} T \{ &- T^4(X^2 + Y^2 + Z^2) + T^2(fZ + eY)[(X^2 + Y^2 + Z^2)\cdot(mZ + lY) + \\
&+ lY\,(X^2 + Y^2 + Z^2) + mZ\,(X^2 + Z^2)] - (mZ + lY)^2\,(fZ + eY)^2\,(X^2 + Z^2) - \\
&- (mZ + lY)\,(fZ + eY)^2 \cdot lY^3 \}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Într-o lucrare viitoare ne vom ocupa de consecinţele metodei matricilor asociate în cazul în care determinantul matricei asociate nu este nul, după cum rezultă din (29).

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, „Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R." seria A, IV, nr. 2, 1952, p. 319.
2. I. N. Lopatinski, „Mat. Sbornik", 17, 1945, p. 267.
3. Gr. C. Moisil, *Matrice şi sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinski*, Ed. Acad. R.P.R. 1951.

4. Gr. C. Moisil, „Anal. Acad. R.P.R." seria A, II, mem. 20, 1949, p. 509.
5. Ed. Nicolau, *Propagarea undelor electromagnetice*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., 1960.
6. L. D. Landau şi E. M. Lifşiţ, *Elektrodinamika sploşnîh sred*, Moskva, 1959. p. 270.

ОТНОСИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦЫ, ПРИСОЕДИНЕННОЙ К СИСТЕМЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОГО СОВЕРШЕННОГО ФЛЮИДА С БЕЗКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ

(Резюме)

В этой работе автор выводит матрицу, присоединённую к системе магнитогидродинамических дифференциальных уравнений с частными линейными производными, с постоянными коэффициентами для несжимаемого совершенного флюида с безконечно большой электропроводностью. Для упрощения задачи пренебрегли током перемещения, силами масс неэлектромагнитного типа и процессами теплопроводности внутри флюида проводника. Предполагая флюид в постоянном и равномерном магнитном поле, и рассматривая ненарушенное состояние флюида, характеризованное постоянными величинами, получают систему магнитогидродинамических уравнений с частными линейными производными, с постоянными коэфициентами. В дальнейшем, для вычисления матрицы, присоединенной к этой системе уравнений, применяется метод, разработанный Академиком Гр. К. Мойсилом.

SUR LA DÉTERMINATION DE LA MATRICE ASSOCIÉE AU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUES D'UN FLUIDE PARFAIT, INCOMPRESSIBLE, DE CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE INFINIE

(Résumé)

L'auteur déduit la matrice associée au système d'équations différentielles magnétohydrodynamiques à dérivées partielles linéaires et à coefficients constants, pour un fluide parfait, incompressible, de conductivité électrique infinie. Pour simplifier le problème on a négligé le courant de déplacement, les forces massiques de type non-électromagnétique, les processus de conductibilité thermique et de transfert radiatif à l'intérieur du fluide conducteur. En supposant le fluide situé dans un champ magnétique uniforme et en considérant l'état non perturbé du fluide comme caractérisé par des grandeurs constantes, on obtient le système d'équations magnétohydrodynamiques à dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants. L'auteur applique ensuite, pour calculer la matrice associée à ce système d'équations, la méthode développée par Gr. C. Moisil.

MANUSCRISELE ASTRONOMIEI LUI BISTERFELD (I)

de

VICTOR MARIAN

În două lucrări anterioare am prezentat manuscrisele de matematică[1], geometrie şi fizică[2] care conţin cursurile privitoare la aceste discipline ţinute de Johann Heinrich Bisterfeld, profesor la Collegium Bethlenianum din Alba-Iulia. Aceste manuscrise sînt note de curs scrise de Porcsalmi András, între anii 1638—42 cînd era elev la şcoala superioară menţionată din Alba Iulia, după cursul profesorului său Bisterfeld. Notele lui Porcsalmi ca şi cele de mai tîrziu ale lui Csernátoni, au o valoare documentară deosebită pentru istoria învăţămîntului din Ardeal atît din cauza vechimei lor, cît şi din motivul că ele redau fidel conţinutul disciplinelor predate de profesorii de la Collegium Bethlenianum în jumătatea întîia a secolului al XVII-lea.

În lucrarea de faţă mă voi ocupa de manuscrisele cu caracter astronomic, rămase de la Porcsalmi, şi cuprinse în diverse coligate, pe care le voi numerota, ca şi în lucrarea precedentă, cu cifre romane.

Manuscrisul I, care face parte din coligatul ce se păstrează în Biblioteca Academiei R.P.R. Filiala Cluj, Anexa II, purtînd cota A.2.Ms.42, cuprinde pe 82 pagini cursul de fizică ţinut de Bisterfeld în 1632 şi copiat de Porcsalmi în 1639. Din cele zece cărţi ale manuscrisului care poartă titlul *Speculum naturae*, numai cartea II, intitulată *De corpore naturali simplici*, şi Cartea X, *Cosmologia*, se ocupă cu probleme de astronomie.

Bisterfeld împarte fizica în două părţi: fiziologie şi cosmologie, ,,Dar acestea deşi sînt deosebite totuşi nu trebuie separate, ci totdeauna trebuie comparate corpurile între ele'', căci această comparaţie este cheia fizicii.

Fiziologia consideră corpul natural privit în sine. Ea se împarte în generală şi în specială. Cea generală tratează despre corpul natural în general, pe cînd cea specială se ocupă cu corpul natural în particular. Aceasta

[1] Victor Marian, Un manuscris ardelean de aritmetică din veacul al XVII-lea. ''Buletinul Universităţilor ,,V. Babeş'' şi ,,Bolyai'' Cluj'', 1957, ser. Ştiinţele naturii, vol. I, nr. 1—2, pag. 83—89.

[2] Victor Marian şi Maria Popescu, Manuscrisele geometriei şi fizicii lui I. H. Bisterfeld, ,,Studia Universitatis Babeş-Bolyai'' Cluj, Series I, Fasciculus I, 1959, Physica.

din urmă este astronomia care în clasificarea lui Bisterfeld aparține deci fizicii. El se ocupă cu acest subiect în Cartea a II-a, unde tratează: Despre corpul natural simplu.

Cartea a II-a cuprinde zece capitole cu următoarele titluri: Cap. I. De coelo in genere, Cap. II. De coeli affectionibus, Cap. III. De coelestium operatione, Cap. IV. De orbibus coelestibus, Cap. V. De stellis și Cap. VI. De stellis anomalis et cometis.

Cap. I., care tratează Despre cer în general, începe cu proprietățile corpurilor naturale. Bisterfeld, admite, după Aristotel, că lumea este perfectă, deci speciile corpurilor naturale nici nu se micșorează, nici nu se înmulțesc; ele numai se amestecă. Corpurile sînt regulate sau neregulate. Bisterfeld admite, la fel ca Comenius, ca mijloc al cunoașterii naturii experiența, rațiunea și Scriptura, de aceea afirmă că proprietățile corpurilor naturale se află prin experiență. Corpul natural poate fi simplu sau compus. Corp simplu este acela care nu constă din diverse corpuri naturale.

Trecînd la natura și proprietățile cerului, Bisterfeld consideră, la fel ca Aristotel, cerul drept un corp simplu spiritual, avînd cea mai mare durată, cantitate, loc, virtute și operație. Cerul poate fi considerat în general și în special. În general trebuie să-i cunoaștem principiile și atributele. Principiile cerului sînt părțile esențiale din care constă, și anume materia și forma.

Existența materiei cerești ne-o dovedesc atributele sale: cantitatea, calitatea și acțiunea corporală. ,,Afară de aceea dacă nu ar avea materie, nu ar fi corp natural, ci spirit propriu zis''. Materia cerului este primară sau secundară. Materia primară este aceeași cu entitatea (Ens) elementelor și nu este una, ci mai multe. ,,În sfîrșit nu trebuie să înmulțim entitățile fără o necesitate ardentă. Dar nu ne constrînge nici o necesitate să spunem că materiile sînt diferite,,. Deși toate cele transmutabile între ele sînt din aceeași materie, nu toate cele care au aceeași materie sînt transmutabile între ele. ,,Materia cerului apropiat se pare că este o substanță foarte subtilă capabilă de expansiunea luminii pe care unii o numesc lumină substanțială (lux substantialis)''!

Cealaltă parte esențială a cerului este forma care dă esența cerului. Este evident că cerul are formă internă fiindcă este corp natural și foarte ordonat. Combate apoi pe peripateticienii care susțin că forma cerului este inteligența (intelligentia); fizica însă nu ne obligă la aceasta, fiindcă forma internă este suficientă tuturor operațiilor cerului. În sfîrșit, afirmă că ,,forma internă a cerului este un spirit foarte pur și eficace (efficacissimus), adică o substanță corporală mai nobilă și mai clară (lucidissima) decît toate. De aceea mai adesea se numește suflet (anima), nu fiindcă cerul ar fi un animal sau un corp viu, ci fiindcă are o formă corporală foarte nobilă''.

Cele două capitole următoare se ocupă cu atributele (attributa) cerului, care sînt afecțiuni (affectiones) sau operațiuni (operationes). Cap. II. tratează despre afecțiunile cerului, care sînt: durata, cantitatea și calitatea. În ce privește durata, Bisterfeld este de acord cu Aristotel că cerul este incoruptibil și cel mai constant (constantissimum) dintre toate. Imediat însă se pune pe punctul de vedere religios afirmînd că cu aceasta nu e în contrazicere o viitoare schimbare în timp îndelungat (extrema diu). În adevăr, scrie el, cerul fiind creat spre fericirea cuiva, urmează că, îndeplinindu-şi acest scop, cel puţin în ce priveşte întrebuinţarea sa, se poate schimba. Rămîne ca teologia să hotărască (definiunt) dacă se schimbă în ce priveşte substanţa sau accidentele. În consecinţă incoruptibilitatea cerului nu se opune condensării sau expansiunii lui, existenţa cărora în corpurile cereşti ne-o arată experienţa.

După astfel de consideraţii teologice sprijinite de Biblie, Bisterfeld trece la problema cantităţii, adică a mărimii sau volumului ocupat de cer. Acesta fiind corpul cel mai nobil în esenţă, datorită mai ales expansiunii sale, ocupă volumul cel mai mare şi locul extrem şi poziţia cea mai înaltă, şi împrejmuieşte toate elementele. ,,Mărimea lui însă pînă acum nu s-a putut determina precis, dar se demonstrează uşor că este finit, fiindcă este corp''.

Calităţile cerului sînt figura, subtilitatea şi lumina. De acord cu Aristotel susţine că figura cerului este rotundă ,,fiindcă aceasta este figura primă cea mai simplă şi cea mai perfectă, deci cea mai potrivită corpurilor prime şi omogene''. De altfel mişcarea stelelor şi uzul instrumentelor optice ne arată că această figură a cerului este cea mai cuprinzătoare.

Datorită subtilităţii sale cerul este liber de orice densitate (crassitio). ,,Acesteia îi aparţine lichiditatea (liquiditas) datorită căreia cerul cedează corpurilor dure cum sînt astrele''. Lichiditatea cerului se demonstrează mai întîi prin dovezi optice, căci dacă ar fi solid ca cristalul, am greşi la observaţia locului distanţelor şi mărimii stelelor, ceea ce e în contrazicere cu experienţa. Căci toate se văd după legea refracţiei, deoarece cerurile sînt mai dense decît razele.

Urmează iarăşi un argument teologic. ,,Apoi în creaţie s-a stabilit penetraţia corpurilor. În adevăr, fiindcă Dumnezeu a pus stelele pe cer în ziua a patra, iar cerul după consensul unanim a fost creat în ziua a doua, în mod necesar s-a acordat stelelor penetraţia''. Aduce apoi un argument ştiinţific: ,,astăzi aceasta este cu atît mai necesar cu cît planetele sînt cînd mai apropiate cînd mai îndepărtate''. Afară de aceea, deoarece cometele sînt corpuri eterice, cerul trebuie să aibă o penetrabilitate maximă. Dar nu uită să mai adauge un argument teologic. Dacă cerul ar fi dur, cum s-ar fi ridicat la cer Enoch, Ilie şi Christos?

Bisterfeld se ocupă apoi mai pe larg cu natura şi proprietăţile luminii, problemă care a preocupat mult pe fizicienii acelei epoci. Alsted consideră lumina drept un element. Elevii săi, Comenius şi Bisterfeld, nu au mers chiar atît de departe, dar i-au dat o mare importanţă. Acesta din urmă face o distincţie între lumina substanţială şi cea accidentală. ,,Lumina substanţială este un corp diafan concentrat, după cum se vede din nori, lemne putrede'' etc., ea este materia cerească, fiindcă nu se poate ca o calitate atît de divină să pornească de la o substanţă simplă opacă.

Lumina accidentală este fie ,,lux'', fie ,,lumen''. Întîia este calitatea corpului luminos, a doua imaginea luminii în transparent (perspicuo), imagine intenţională nu reală. Lumina şi umbra se raportează între ele precum proprietatea (habitus) şi privaţia (privatio). Focul este o lumină mai densă (crassitior) şi mai impur, pe cînd lumina este un foc mai pur şi mai subtil. Lumina difuză (sparsa) nu este corp: aceasta ne-o dovedeşte generarea, propagarea şi pătrunderea ei. În adevăr un corp nu poate pătrunde imediat (subito) şi nu se poate propaga atît de repede. De altfel un corp nu poate pătrunde prin corpuri atît de dense ca sticla, pietrele preţioase etc. Numai în mod impropriu se spune că lumina se propagă, reflectă şi refractă. Ea se propagă în linie dreaptă, în toate direcţiile şi foarte departe. Lumina este foarte activă, izvorul oricărei vieţi şi activităţi. Ajungînd la corpurile opace nu poate trece mai departe şi se reflectă. Ea este finită fiindcă la distanţe mari pe încetul slăbeşte.

,,Lumen'' este de ordinul întîi, al doilea, al treilea, al patrulea, după cum rezultă din ,,magisterium opticum''. Lumina (lux) depinde atît de mult de corpul luminos, încît îndepărtînd acesta dispare şi ea. Ea are mare afinitate cu spiritele, de aceea toate vietăţile se delectează de lumină. În fine, lumina este foarte divizibilă, de aceea ea zace în corpul opac, căci corpul transparent ca întreg nu este vizibil.

Cap. III. se ocupă cu operaţiunile cerului, care sînt două: mişcarea şi influxul. Corpurile cereşti se mişcă perpetuu, foarte repede şi ordonat. Privitor la această mişcare mai întîi constată că, după cum ne arată simţurile, stelele se îndepărtează şi se apropie de noi. De aici trage concluzia logică: ,,în realitate se mişcă sau stelele sau Pămîntul''. Răspunsul însă nu este acela la care ne-am aşteptat, căci continuă: ,,se pare că se mişcă stelele; sau se mişcă simultan stelele şi Pămîntul''. Care din aceste posibilităţi este cea adevărată? Bisterfeld se ataşează categoric sistemului geocentric, pe care-l susţine cu diverse argumente, cum este cel al căderii corpurilor, sau următoarele: ,,Afară de aceea fără îndoială s-ar naşte un zgomot enorm după cum se observă cînd bate vîntul. Spiritul animalelor nu ar fi nicicînd liniştit şi de altfel s-ar produce alte absurdităţi''. În consecinţă se mişcă stelele după cum învaţă şi Scriptura. Mărimea imensă a cerului şi marea lui viteză nu e în contrazicere cu această mişcare, deoarece mişcarea pe circumferinţă este mai uşoară decît cea spre centru.

Dar cui se datoreşte mişcarea cerului? Răspunde că, deşi e probabil că este mişcat de îngeri, ,,totuşi pare mai probabil că se mişcă datorită formelor sale. Căci pare a fi inconvenient să atribuim anumitor stele anumiţi îngeri. Afară de aceea nimeni nu ne constrînge la aceasta, fiindcă această mişcare poate fi efectuată prin natura proprie a cerurilor''. Susţine apoi incoruptibilitatea cerurilor, de unde rezultă că mişcarea lor este perpetuă şi de aici că este circulară, sau aproape circulară, de ex. pe o spirală. Urmează o concluzie progresistă: ,,Deşi mişcările cerurilor sînt variate atît faţă de noi, cît şi comparate între ele, totuşi legea lor este eternă, după cum rezultă din observaţiile şi prezicerile astronomilor''.

În continuare se ocupă cu influenţa corpurilor cereşti asupra fenomenelor terestre şi a omului. În sprijinul acestei influenţe aduce ca dovadă experienţa zilnică, raţiunea sigură şi Scriptura. ,,Deci astrologia îşi are temelia sa. Cei care afirmă contrarul vorbesc sau de abuzul ei sau se îndreaptă împotriva acelora care atribuie prea multe astrelor''. Influenţa cerurilor este manifestă sau ocultă. Cea manifestă este ,,lumen'', care posedă forţa de a suscita spiritele incluse în corpuri, a deschide porii, a digera cele necoapte. ,,Influenţa ocultă este raza invizibilă a celor cereşti, a cărei existență o dovedește experiența, căci astrele exercită forță asupra corpurilor situate în locuri ascunse''.

Cap. IV. se ocupă cu orbita cerească, prin care înțelege partea difuză și fluidă a cerului. Orbita cerească se numește de teologi ,,empireu'', iar în Scriptură,, cerul al treilea''. *Filozoful* (Aristotel) nu vrea să definească dacă empireul este de specie diversă de a celorlalte orbite, se pare însă că răspunsul la această întrebare este negativ. E probabil că orbitele cunoscute filozofilor diferă între ele prin oarecare accidente de natură nefizică. Orbitele cerești sînt fluide ce nu se ating, ci sînt continue, astfel că nu sînt cauze ale mișcării, iar stelele nu sînt fixate de ele. Dar deși orbitele cerești nu sînt reale, totuși ele sînt folosite de astronomi în scop didactic. Orbitele cerești nu acționează asupra lumii inferioare prin raze vizibile, ci numai prin raze invizibile.

Cap. V. tratează despre stele ,,care sînt corpuri sferice, luminoase, născute din conglobarea cerului, receptaculele și izvoarele luminii''. Stelele se împart în analoge (analogae) și în anomale, sau în ordinare și extraordinare. Ordinare se numesc acelea care au fost observate de la începutul lumii, durează etern și au formă precisă. Principiul corpurilor cerești este armonia. ,,Numărul stelelor este cu mult mai mare decît ne arată Sf. Scriptură, Galaxia și tubul optic sau telescopul, probabil nu par a depăși 1600''.

Stelele ordinare sînt fixe și planete. Stelele fixe se găsesc în orbita a opta, păstrează aceeași distanță între ele și se mișcă uniform de la răsărit la apus. Nu e lămurit dacă ele sînt libere sau legate.

,,Planetele sînt stele ce se mișcă cu mișcare variabilă. Ele sînt în număr de șapte, anume: Saturn, Jupiter, Marte, Soarele, Venus, Mercur și Luna. Dintre ele două, Soarele și Luna au eclipsă: acela în conjuncție sau lună nouă, aceasta în opoziție sau lună plină''.

Cap. VI. se ocupă cu stelele anomale și cu cometele. ,,Stelele anomale sînt corpuri cerești de durată aparentă, și alte accidente asemănătoare, diferite''. Ele se împart în stele propriu zise și planete. Stelele anomale fixe sînt acelea care apar în sfera a opta avînd aspectul celorlalte stele, dar de durată neasemenea. Prima a apărut în 1072 în Cassiopeia și a durat 16 luni, a doua în 1600 în Vultur, iar a treia în 1607. Este însă îndoielnic dacă ele se nasc în realitate sau au numai apariție recentă, totuși ultima pare mai probabilă. Planetele anomale sînt acele ce se văd cu telescopul, cum sînt cei patru sateliți ai lui Saturn.

,,Cometele sînt corpuri mai neregulate decît celelalte fenomene cerești menționate mai sus''. Ele durează rareori mai mult de șase luni, de obicei o lună, uneori însă abia o oră. Au diverse mărimi și concurează cu stelele fixe, uneori însă sînt egale, ba chiar întrec planetele inferioare. Cometele apar destul de rar, căci de la nașterea lui Christos abia au apărut pe emisfera noastră 130; uneori însă apar două sau trei. Ele se văd mai ales la nord, dar apar și în în zodiac, ca cea din 1618. Sînt variate atît ca formă, cît și ca culoare care poate fi argintie, plumburie etc., de asemenea le variază mișcarea, predominînd cea după lățime.

Partea cea mai interesată din această expunere este cea privitoare la natura cometelor ,,despre care discută îndeosebi filozofii''. Bisterfeld își propune să treacă în revistă diversele păreri și să le discute pe scurt. Problema importantă este dacă cometele sînt aparențe pure (emphasis) sau esență corporală reală (hypostasis). El combate întîia părere, căci aparențele pretind materie solidă reflectătoare, iar aceasta totdeauna este granulară și deci nu se pot ridica atît de sus, apoi aparențele nu sînt constante și dispar repede, pe cînd cometele durează cu lunile. Apoi aparențele se mișcă datorită luminii, în timp ce cometele se mișcă liber.

În sfîrșit, aparențele se mișcă numai sub anumite unghiuri și în anumite locuri, pe cînd cometele se deplasează sub orice unghi și în orice loc.

Trecînd la a doua părere spune că dacă cometele au existență reală, sau există de la prima creație sau sînt născute recent. Dacă există de la creație, sau sînt corpuri unice sau o colecție de corpuri oarecare.

Bisterfeld argumentează că cometele nu există din etern, căci atunci ar fi sau stele fixe sau planete. Dar deja caldeenii știau că nu sînt stele fixe. Însă nu sînt nici planete, fiindcă atît forma cît și distanța planului lor este diferită de a planetelor. Iar dacă ar fi planetele ele s-ar vedea totdeauna, cum se văd stelele fixe foarte îndepărtate, și nu și-ar varia mărimea. Apoi nu s-ar rarefia atît de mult încît să se vadă prin ele stelele. În sfîrșit, ar trebui să fie cu mult mai numeroase, prin telescop însă nu se vede nici una.

Dar cometele nu sînt nici o aglomerație de mai multe stele, căci dispărînd ele nu apar stele, iar cînd apar se văd toate planetele. Apoi ar fi mai frecvente, nu ar dura atîta și nici nu ar fi atît de mari.

Dacă cometele ar fi corpuri născute de curînd, sau ar fi corpuri incandescente sau luminate; alt caz nu există. Intîia părere o susțin peripateticienii, ea nu este cu totul improbabilă, totuși pare a fi departe de adevăr. Argumentele lui Bisterfeld sînt următoarele: Mai întîi un corp incandescent nu poate dura cît cele mai multe comete, căci un corp inflamabil oricît de mare, în aer liber se consumă repede. Acestei concepții i se opune faptul că capul cometelor nu este cu mult mai mic decît Pămîntul, iar coada lor de cîteva mii de ori mai mare, astfel că nu pot proveni din fumul (fumo) terestru, deoarece întreg aerul nu e suficient pentru o masă atît de mare. Apoi se opune locul și situația cometelor, căci ele sau nu au paralaxă, sau au una cu mult mai mică decît Luna, deci sînt mai depărtate decît Luna. Aerul însă nu depășește 50 de mile. Dar chiar dacă i-am da 100 nu am putea salva aparențele. Un alt argument este mișcarea cometelor. Căci dacă aceasta ar avea loc în straturile superioare ale aerului, ea ar fi atît de rapidă cît este fulgerul și nu ar dura mai mult de două ore, ba la dreptul vorbind nici una; experiența însă arată contrarul. Așadar cometele nu sînt în aer ci în cer, și nu sînt incandescente.

Dacă cometele sînt corpuri luminate, ele s-ar găsi fie în regiunea elementară fie în cea eterică. Dar s-a arătat mai sus că nu se găsesc în regiunea elementară cum credea Scaliger. Dar dacă se găsesc în regiunea eterică, sînt sau emanații ale corpurilor cerești sau condensații eterice. Kepler și alți matematicieni celebri susțin că sînt emanații ale corpurilor cerești, de ex. ale lui Saturn, ale Soarelui etc. Aceasta însă nu e probabil din cauza nestatorniciei distanței și armoniei cerului, deci nu e admisibilă.

Concluzia lui Bisterfeld este deci că cometele sînt corpuri condensate din eter și luminate de Soare. În adevăr eterul condensat strălucește atît cu lumina proprie, cît și în lumina primită, și uneori apare ca un singur corp, alte ori ca mai multe corpuri aglomerate. Dacă părţile sînt distribuite în mod egal sau dacă coada este acoperită de cap, cometa va apare sferică. Dacă sînt distribuite inegal în aşa fel încît să fie aproape poroase, nu va fi exact sferică, ci alungită şi dacă se vede dimineaţa va avea barbă, dacă se vede seara va fi cu coadă. Se pare că mişcarea cometei este rectilinie sau aproape rectilinie. La fel cu cometele şi fenomenele lor trebuie judecate după lumina şi umbra lor.

Cartea a X-a poartă titlul: *Cosmologia sau doctrina despre lume*. Ea cuprinde două capitole: I. Despre construcţia lumii; II. Despre atributele lumii.

,,Lumea luată strict şi în mod fizic, este construcţia foarte ordonată a tuturor corpurilor''. Lumea a fost creată. Aceasta este evident din însăşi definiţia ei. În adevăr ea fiind construită sau compusă, în mod necesar trebuie să aibă o cauză componentă, căci nimic nu se poate crea prin sine însuşi''. Aşadar lumea este oglinda clară a atotputerniciei, înţelepciunii şi unităţii divine''.

Urmează descrierea creării lumii din haos, sprijinită de Scriptură şi de raţiune. Aceasta din urmă ne spune că lumea fiind corporală constă din materie, care fiind o entitate finită e necesar să fie creată din nimic. Haosul a avut forma sferică, după cum ne arată forma sferică a apei. Lumea a fost creată prin aceea că ,,Sf. Spirit a înzestrat haosul cu un spirit oarecare corporal'', care astfel a agitat toată masa în aşa fel ca fiecare lucru să tindă spre locul său natural. El a făcut ca lucrurile de acelaşi fel 'să se adune, iar cele eterogene să se separe. Atît Scriptura, cît şi raţiunea ne spune că dumnezeu deodată cu crearea lumii i-a dat şi o ordine punînd lucrurile mai uşoare mai sus, iar cele mai grele cum este apa şi pămîntul au rămas în centru. Acest aranjament dovedeşte înţelepciunea, bunătatea atotputernicului dumnezeu, ,,mai ales că şi azi apa şi pămîntul se generează în mod egal''.

După aceasta expune crearea lumii, potrivit Bibliei, în şase zile.

Cap. II se ocupă cu atributele lumii, adică cu proprietăţile ei. Cea mai de seamă este că ea e finită atît ca durată cît şi ca perfecţiune. ,,Corpul este finit, nu numai fiindcă a fost creat, ci şi fiindcă este corp. Sfîrşitul duratei este, prin care lumea a început în timp şi cu timpul, şi oarecînd se va termina''. Din diversele mişcări ale Soarelui şi Lunii şi din deosebirea oamenilor rezultă în mod necesar că lumea nu a existat din etern. Acelaşi lucru îl arată şi schimbările din cer şi apariţia stelelor noi şi a cometelor, precum şi sfîrşitul lumii.

În continuare tratează despre mărimea universului, căci faţă de sfera Soarelui, Pămîntul este ca un punct. După calculele lui Copernic, de la suprafaţa Pămîntului pînă la sfera Soarelui sînt 1119 semidiametre terestre (care conţin 60 de mile germane). Dar sferele sînt proporţionale cu cubul diametrelor, astfel că numai sfera Soarelui va fi aproape infinit de mare faţă de globul terestru. Susţine apoi ideea progresistă că universul este unic, afirmînd că aceasta o arată nu numai Scriptura, ci şi raţiunea. Afirmă apoi după Aristotel că: ,,Forma lumii este sferică: căci aceasta este cea mai omogenă'', această formă o are Pămîntul şi cerul după cum arată măsura fiecăruia. ,,Căci dacă lumea nu ar fi sferică, în natură ar exista vid''. Manuscrisul se termină cu o expresie de admiraţie faţă de armonia şi ordinea părţilor lumii, care totdeauna corespund întregului şi sieşi, începutului şi sfîrşitului, sau, în modul cel mai precis, ca o dovadă a puterii, înţelepciunii şi bunătăţii divine. ,,De aici se naşte conexia lumii şi se exclude vidul''.

Manuscrisul II. nu se ocupă cu chestiuni de astronomie, în schimb *manuscrisul III*, care poartă cota A2. Ms 443, de format 90 × 160 mm, conţine 4 pagini de cosmologie şi 16 de astronomie. La sfîrşitul cosmologiei găsim notată data şi locul scrierii manuscrisului: ,,24 decemb. Annii 1641. Albae Juliae''. Din faptul că aceste două capitole sînt puse după însemnările de fizică, aritmetică şi geometrie se vede că ele intrau în cadrul cursului de filozofie al lui Bisterfeld. Se mai poate vedea din acest manuscris că la fel cu celelalte capitole, notele de cosmologie şi astronomie sînt recapitulări ale cursului, probabil în vederea uşurării examenelor.

Cosmologia cuprinde XX de propoziţii luate în mare parte după Cartea XXVI-a a Enciclopediei lui Alsted, carte care se ocupă cu cosmografia. Se vede că aceşti autori nu făceau nici o deosebire între cosmologie şi cosmografie.

Propoziţia I. defineşte cosmologia ca ,,ştiinţa sferei lumeşti''. Ea se împarte în generală şi în specială.

Propoziţia II. ,,Cosmologia generală tratează despre sfera lumii în general, care este un corp rotund cuprinzînd cerul şi Pămîntul. Ea este reală sau reprezentativă''. Se trece apoi la proprietăţile şi diviziunile sferei reale, cu care se ocupă următoarele 15 propoziţii.

Propoziţia III. Proprietăţile sferei lumeşti sînt absolute sau relative. Cele absolute sînt cantitatea şi forma lumii.

Propoziţia IV. Cantitatea lumii este mărimea, cu care ea întrece orice cantitate continuă a celorlalte corpuri. După această definiţie luată din Alsted, Bisterfeld continuă: ,,De aceea cantitatea lumii este mai mare ca a tuturora, şi nu o putem exprima prin nici un număr. Ea totuşi este finită, deoarece nici un corp sferic nu poate fi infinit, de aceea ea poate fi cuprinsă de Dumnezeu'', după cum spune Aristotel.

Propoziţia V. ,,Forma lumii este exact sferică, pe care o cuprinde o singură suprafaţă, în exterior convexă iar în partea interioară concavă''. Aici atrage atenţia că: ,,Identitatea formulelor din lume şi a părţilor ei mai importante demonstrează identitatea naturii''.

Propoziţia VI. ,,Proprietatea relativă a lumii este poziţia care se observă în lume în raport cu întregul şi cu părţile. Poziţia în raport cu întregul este aceea în care înţelegem că este aşezată lumea în spaţiul intern egal cu ea sau într-un loc invariabil''. Bisterfeld adaugă că: ,,Lumea are proprietatea înăscută de a rămîne totdeauna în acelaşi loc''. Apoi continuă iarăşi după Alsted: ,,Poziţia în raport cu părţile este configuraţia prin care regiunea eterică cuprinzînd cerul şi stelele ocupă locul suprem, şi înconjoară pe cel elementar; iar cel elementar cuprinde focul şi aerul, apa şi pămîntul''.

Propoziţia VII. începe diferit de Alsted: ,,Părţile lumii sînt substanţiale, care constituie întregul, sau accidentale, care variază după poziţia şi distanţele locurilor, de aceea depinde de concepţia noastră astfel, că în cea mai mare parte se pot numi arbitrare''. La fel ca Alsted, Bisterfeld atribuie lumii şase poziţii diferite: ,,La dreapta, partea de nord. La stînga, partea de sud. Înainte apusul, înapoi răsăritul. Sus partea cerului pe care o avem deasupra capului, jos partea terestră în care trăim. Apoi emisfera superioară care cuprinde cerul şi Pămîntul nostru, şi emisfera inferioară care cuprinde cerul şi pămîntul antipod. La fel emisfera boreală dincoace de ecuator şi cea australă dincolo de ecuator''.

Propoziţa VIII. ,,La fel în al doilea rînd lumea se împarte în staţii cuprinse de anumite cercuri. Aceste cercuri au proprietăţi, părţi şi specii.''

Propoziţia IX. ,,Proprietăţile acestor cercuri sînt: 1. au 360 de grade, 2. posedă un principiu oarecare extern''.

Propoziţia X. ,,Părţile sînt: axa, care este linia dreaptă dusă prin cerul din mijloc. Polul, care este extremitatea axei. Circumferinţa, care este înconjurul sferei''.

În propoziţia XI se dau felurile de cercuri, dintre care ,,unele sînt mai mari altele mai mici. Mai mari sînt acelea care împart sfera lumii în două părţi egale. Ele sînt mobile sau imobile''.

Propoziţia XII. ,,Cercurile mobile sînt acelea care se rotesc împreună cu cerul, deşi ni le închipuim că zac pe pămînt. Ele sînt primare sau secundare''.

Propoziţia XIII. Cercurile mobile primare sînt ecuatorul şi zodiacul. Ecuatorul, cel mai important, se defineşte ca ,,cercul mai mare mobil pretutindenea echidistant de polii lumii, şi împărţind sfera lumii în două emisfere în mod exact''. Zodiacul este definit ca ,,cercul mai mare mobil ce împarte lumea în douăsprezece spaţii egale''.

Propoziţia XIV. ,,Cercuri mobile secundare sînt cele două coluri, care se taie în poli sub unghiuri drepte''.

Propoziţia XV. ,,Cercuri imobile sînt acelea, care-şi păstrează aceeaşi poziţie pe sferă, şi nici nu se mişcă ca celelalte, cum este meridianul, care este cercul mai mare imobil ce trece prin fiecare pol, prin punctul meridional şi vertical, la mijloc între răsărit şi apus. Apoi orizontul care este cercul cel mai mare imobil, ce separă partea vizibilă de cea invizibilă''.

Propoziţia XVI. ,,Cercurile mici sînt acelea care împart sfera lumii în două părţi neegale, ca tropicele şipa ralelele. Acelea sînt două cercuri mici, la distanţe egale de la ecuator, şi care trec prin cele două extermităţi ale zodiacului. Unul din ele se numeşte al cancerului, celălalt al căpriorului. Mai sînt două cercuri mai mici în jurul polilor lumii, dintre care cel superior în emisfera noastră, se numeşte polul arctic, cel inferior antarctic''.

Propoziiţile XVII—XIX se ocupă cu sferele artificiale. Propoziţia XVII spune că: ,,Sfera reprezentativă este aceea care reprezintă toată maşina lumii, împreună cu diversele ei părţi şi mişcări. Ea este mai puţin sau mai mult artificială''. Propoziţia XVIII: ,,Sfera reprezentativă mai puţin artificială este lobul lumii ce cuprinde globul ceresc şi terestru, mişcate cu mîna''. Propoziţia XIX: ,,Mai artificial este globul lumii, ce se vede mişcîndu-se prin propria sa maşinărie''.

Propoziţia XX ne spune că ,,pînă aici s-a vorbit despre cosmologia generală. Cea specială este astronomia, care explică sfera cerească, sau geografia, care explică sfera terestră''. Aici terminologia diferă de a lui Alsted, care foloseşte în loc de astronomie termenul de uranometrie, înţelegînd prin astronomie ,,prima parte a uranometriei despre mişcarea şi măsura corpurilor''.

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ БИСТЕРФЕЛЬДА (I)

(Резюме)

Являясь продолжением предыдущих работ относительно рукописных лекций, читанных И. Х. Бистерфельдом в Коллегии Бетлена в Алба-Юлия, в период 1632—1653 гг., настоящая статья исследует содержание астрономических и космологических рукописей. Четыре из 5 исследованных рукописей были переписаны Порчалми Андрашем, а одна — Чернатони Палем, позже ставшими оба профессорами Клужской реформатской коллегии.

По своей манере излагать задачи астрономии изученные рукописи делятся на две категории. В то время как в первой категории, подражая Альстеду, делаются некоторые уступки Аристотелю, во второй Аристотель подвергается яростным нападкам с помощью библейских доводов. Как и в лекциях Бистерфельда по физике, наталкиваемся и здесь на протестантскую схоластику, почти исключительно основанную на Библии и заменившую перипатетическую схоластику, опиравшуюся на Аристотеля.

Религиозный характер находит себе объяснение в том, что Бистерфельд являлся протестантским богословом, призванным в Алба-Юлия вместе с Альстедом для укрепления кальвинизма в Трансильвании.

LES MANUSCRITS DE L'ASTRONOMIE DE BISTERFELD (I)

(Résumé)

Comme suite à des travaux antérieurs relatifs aux manuscrits des cours tenus par I. H. Bisterfeld au Collegium Bethlenianum d'Alba-Iulia entre 1632 et 1655, le présent article s'occupe du contenu des manuscrits d'astronomie et de cosmologie. Quatre des cinq manuscrits étudiés ont été copiés par Porcsalmi András, le dernier par Csernátoni Pál; ces deux personnes ont été plus tard professeurs au Collège Réformé de Cluj.

Les manuscrits étudiés se groupent, quant à la façon de traiter les problèmes d'astronomie, en deux catégories. Alors que dans les premiers, qui suivent Alsted, il est fait quelques concessions à Aristote, dans les autres Aristote est attaqué avec véhémence à l'aide d'arguments tirés de la Bible. Comme dans les cours de physique de Bisterfeld, nous trouvons ici aussi la scolastique protestante, fondée presque exclusivement sur la Bible, qui a remplacé la scolastique péripatéticienne, laquelle s'appuyait sur Aristote.

Ce caractère religieux trouve son explication dans le fait que Bisterfeld était un théologien protestant appelé à Alba-Iulia avec Alsted pour renforcer le calvinisme en Transylvanie.

CRONICĂ

COMPORTAREA INTEGRALELOR UNOR SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE, CARE DEPIND DE UN PARAMETRU MIC

Rezumatul disertaţiei prezentată de M. FRENKEL-FERTIG pentru obţinerea titlului de candidat în ştiinţele fizico-matematice

Problema de bază este de a studia comportarea integralelor unor ecuaţii diferenţiale sau sisteme de ecuaţii diferenţiale, care depind de un parametru mic ε, cînd funcţiile care intervin în aceste sisteme nu sînt continue de ε, pentru $\varepsilon = 0$.

În primele patru capitole se studiază ecuaţia diferenţială:

$$\varepsilon y^{(n)} + Q_1(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, \varepsilon) + Q_2(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, \varepsilon) = 0, \text{ în cazul}$$
$$Q_1(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, 0) \equiv 0 \tag{1}$$

Condiţiile impuse funcţiilor Q_1 şi Q_2 sînt următoarele:

1. $Q_1(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \varepsilon)$ este o funcţie continuă în raport cu toate variabilele în domeniul

$$\Delta : x_0 \leqslant x \leqslant \overline{x}, \ -\infty < y^{(i)} < +\infty \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$

cu derivate parţiale de ordinul întîi continue în raport cu $x, y, \ldots, y^{(n-1)}$ şi expresiile acestor derivate parţiale sînt de forma:

$$\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{\partial Q_1}{\partial x} = A(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \varepsilon) y^{(n-1)} + B(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \varepsilon)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{\partial Q_1}{\partial y^{(i)}} = A_i(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \varepsilon)\, y^{(n-1)} + B_i(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \varepsilon),$$

$$\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-1)}} = B_{n-1}(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \varepsilon).$$

unde q este un număr real mai mare sau egal cu unu $(i = 0,1,..,n-2)$, iar A, B, A_i, B_i şi B_{n-1} sînt funcţii continue şi mărginite în domeniul Δ.

2. $$Q_1(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, 0) \equiv 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Q_1}{\varepsilon^q} = a(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}).$$

3.

$$\lim_{y^{(n-1)} \to +\infty} \frac{Q_1}{y^{(n-1)}} = \psi_1(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, \varepsilon),$$

$$\lim_{y^{(n-1)} \to -\infty} \frac{Q_1}{y^{(n-1)}} = \psi_2(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, \varepsilon)$$

oricare ar fi $\varepsilon \geqslant 0$, ψ_1 şi ψ_2 sînt funcţii continue în raport cu toate variabilele, cu derivate parţiale de ordinul întîi în raport cu x şi $y^{(i)}$, $(i = 0, \ldots, n-2)$, continue în domeniul:

$$x_0 \leqslant x \leqslant \overline{x}, \quad -\infty < y^{(i)} < +\infty \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2), \; 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

4. $Q_2(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, \varepsilon)$ este o funcţie continuă în raport cu toate variabilele, are derivate parţiale în raport cu x si $y^{(i)}$ de ordinul întîi si al doilea continue in domeniul D:

$$x_0 \leqslant x \leqslant \overline{x}, \quad -\infty < y^{(i)} < +\infty \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$

iar derivata parţială în raport cu x este de forma:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n-2} A_i(x, \varepsilon) y^{(i)} + \overline{B}(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, \varepsilon)$$

unde $\overline{B}(x, y, \ldots, y^{(n-2)}, \varepsilon)$ este o funcţie continuă şi mărginită în domeniul D.

Derivatele parţiale $\frac{\partial Q_2}{\partial y^{(i)}}, \frac{\partial \overline{B}}{\partial y^{(i)}}, \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y^{(i)} \partial y^{(j)}}$, sînt de asemenea funcţii continue şi mărginite în domeniul D, iar

$$\frac{\partial Q_2}{\partial y^{(n-2)}} > 0.$$

Se consideră ecuaţia diferenţială (1). Pentru $\varepsilon \neq 0$, condiţiile enumerate mai sus asigură existenţa şi unicitatea integralei ecuaţiei diferenţiale (1):

$$y = y(x, \varepsilon),$$

care satisface la condiţiile iniţiale

$$y^{(i)}(x_0, \varepsilon) = y_0^{(i)}(\varepsilon) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2}$$

Se presupune că există limitele:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y_0^{(i)}(\varepsilon) = y_0^{(i)} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$y_0^{(i)}$ fiind nişte constante, independente de ε.

Notăm cu $f_1(x, y, \ldots, y^{(n-3)}, 0)$, funcţia implicită definită de ecuaţia

$$Q_2(x, y, \ldots, y^{(n-3)}, f_1, 0) = 0.$$

Se demonstrează:

TEOREMA. Dacă $y_0^{(n-2)} = f_1(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-3)}, 0)$, atunci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{(i)}(x, \varepsilon) = \overline{y}^{(i)}(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-3).$$

$\overline{y}(x)$ fiind integrala ecuației $Q_2(x, \overline{y}, \ldots, \overline{y}^{(n-2)}, 0) = 0$, care verifică condițiile $\overline{y}(x_0) = y_0^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n-3)$.

TEOREMA. Există două funcții continue $F_1(x)$, $F_2(x)$ și funcțiile continue $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_{n-3}(x)$ în intervalul $[x_0, \overline{x}]$, care au proprietatea că pentru orice $\eta > 0$, corespunde un $\varepsilon_0 > 0$, astfel că

$$\left\{|F(x_n) - u_n| + |F(p_m) - v_m| + \sum_{i=0}^{n-3} |\varphi_i(x) - y_i(x, \varepsilon)|\right\} < \eta$$

pentru $\varepsilon < \varepsilon_0$ și orice x din intervalul $[x_0, \overline{x}]$; (x_n, u_n) și (p_m, v_m) sînt punctele de maxim și de minim pe curba $u = u(x, \varepsilon)$.

În capitolul al V-lea se studiază sistemul de ecuații diferențiale:

$$\varepsilon \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) + \varepsilon V_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{du_l}{dt} = U_l(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \varepsilon) \quad (l = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

și se presupune că au loc următoarele proprietăți ale funcțiilor X_i, V_i și U_l:

1. Funcțiile X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt continue și au derivate parțiale de ordinul întîi și al doilea continue în raport cu toate variabilele într-un domeniu D, care conține punctul $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u_1^0, \ldots, u_m^0)$.

2. Funcțiile V_i și U_l sînt continue și au derivate parțiale de ordinul întîi continue în raport cu toate variabilele, într-un domeniu Δ, care conține punctul $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u_1^0, \ldots, u_m^0, 0)$.

3. Funcțiile X_i nu se anulează toate pentru $x_i = x_i^0$, $u_l = u_l^0$.

Fie $x_i = x_i(t, \varepsilon)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $u_l = u_l(t, \varepsilon)$ $(l = 1, \ldots, m)$, sistemul de integrale al sistemului de ecuații diferențiale (2), care verifică condițiile inițiale:

$$x_i(0, \varepsilon) = x_i^0, \; u_l(0, \varepsilon) = u_l^0.$$

Sistemului de ecuații diferențiale (2) i se asociază sistemul

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = d\tau \tag{3}$$

în care $u_1, \ldots, u_m$ sînt considerați ca parametri.

Fie

$$H_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = h_i \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

un sistem de $n - 1$ integrale prime independente ale sistemului (3).

4. Ecuațiile: $x_i = \widetilde{x}_i(\tau, h_1, \ldots, h_{n-1}, u_1, \ldots, u_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ formează reprezentarea parametrică a familiei de curbe integrale, parametrul fiind τ pentru $0 \leqslant \tau < +\infty$ și $(h_1, \ldots, h_{n-1}, u_1, \ldots, u_m) \in \delta$. Domeniul δ din spațiul cu $n - 1 + m$ dimensiuni conține punctul $(h_1^0, \ldots, h_{n-1}^0, u_1^0, \ldots, u_m^0)$ unde $h_i^0 = H_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, u_1^0, \ldots, u_m^0)$.

Există funcțiile: $y_i = y_i(\tau, h_1, \ldots, h_{n-1}, u_1, \ldots, u_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$, care au următoarele proprietăți:

a) $y_i(\tau, h_1, \ldots, h_{n-1}, u_1, \ldots, u_m)$ sînt funcții continue și au derivate parțiale de ordinul întîi continue în raport cu toate variabilele, în domeniul

$$\delta' \begin{cases} 0 \leqslant \tau < +\infty \\ (h_1, \ldots, h_{n-1}, u_1, \ldots, u_m) \in \delta \end{cases}$$

b) Funcţiile y_i sînt periodice în raport cu τ, avînd aceeaşi perioadă pentru orice sistem de valori $(h_1, \ldots, h_{n-1}, u_1, \ldots, u_m) \in \delta$.

c) Pentru orice sistem de valori $(h_1, \ldots, h_{n-1}, u_1, \ldots, u_m)$ avem

$$\lim_{\tau \to +\infty} (\widetilde{x}_i - y_i) = 0$$

d) Pentru $0 \leqslant \tau < +\infty$ şi $(h_1, \ldots, h_{n-1}, u_1, \ldots, u_m) \in \delta$, avem $(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots u_m) \in D$, unde D este domeniul în care funcţiile H_i sînt continue.

TEOREMĂ. Dacă condiţiile 1, 2, 3 şi 4 sînt îndeplinite atunci există un interval $[0, t_0]$, astfel ca

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_i[x_1(t, \varepsilon), \ldots, x_n(t, \varepsilon), u_1(t, \varepsilon), \ldots, u_m(t, \varepsilon)] = \bar{h}_i(t) \quad (i=1, \ldots, n-1), \ (l=1, \ldots, m)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_l(t, \varepsilon) = u_l(t)$$

pentru $t \in [0, t_0]$, $\bar{h}_i(t)$ şi $\bar{u}_l(t)$ fiind sistemul de integrale al sistemului valorilor medii asociat sistemului (2), care verifică condiţiile iniţiale:

$$\bar{h}_i(0) = h_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

$$\bar{u}_l(0) = u_l^0 \quad (l = 1, \ldots, m)$$

INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE ORDINARE PRIN METODA REŢELELOR

Rezumatul disertaţiei prezentată de A. COŢIU pentru obţinerea titlului de candidat în ştiinţele fizico-matematice

Lucrarea aduce unele contribuţii la rezolvarea anumitor probleme din analiza numerică, care se referă la integrarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare, cum sînt: studiul comparativ al diverselor procedee de calcul, evaluarea şi delimitarea erorilor de calcul, determinarea procedeelor care — pentru probleme date — conduc la un număr cît mai mic de operaţii, justificarea teoretică a utilizării în practică a unor procedee de calcul, etc.

Rezultatele date în teza de disertaţie se referă la ecuaţiile diferenţiale de ordinul întîi. În alte lucrări, care vor urma, metoda reţelelor va fi aplicată la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior.

1. Cunoscuta metodă a liniilor poligonale a lui Euler, de integrare aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale ordinare, de ordinul întîi, cu condiţii iniţiale date, este forma în care metoda reţelelor a fost aplicată acestora. Eroarea, în metoda liniilor poligonale a lui Euler, cînd se trece de la nodul x_0 la nodul $x = x_0 + h$, unde h este pasul de integrare, este de ordinul lui h^2. Integrala exactă, $y(x)$, a ecuaţiei diferenţiale

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

şi integrala aproximativă, $\widetilde{y}(x)$, calculată prin metoda liniilor poligonale a lui Euler, dezvoltate după formula lui Taylor, în vecinătatea nodului x_0, au primii doi termeni identici; coeficienţii care figurează în membrul al doilea a celor două dezvoltări, sînt aceiaşi pînă la h inclusiv. Se spune, pentru acest motiv, că, metoda liniilor poligonale a lui Euler, este un procedeu de ordinul întîi de exactitate.

S-a pus problema măririi ordinului de exactitate a metodei liniilor poligonale a lui Euler. În acest sens în 1895 R u n g e a propus o metodă de lucru, care a fost completată apoi de K u t t a, N y s t r ö m, H u t a, ş. a.

Astfel, K u t t a în 1901 a stabilit procedee de ordinul patru de exactitate, a căror aplicare necesită patru substituții în ecuația diferențială. Formulele necesare pentru aplicarea acestor procedee conțin 10—13 constante. Tot Kutta, iar mai tîrziu N y s t r ö m (1925) au dat procedee de ordinul cinci de exactitate, a căror aplicare necesită șase substituții în ecuația diferențială. Formulele care se folosesc pentru aplicarea acestor procedee, conțin 23 constante. În 1956 și 1957, H u t a, urmînd aceeași metodă de lucru, a stabilit procedee de ordinul șase de exactitate, a căror aplicare necesită opt substituții în ecuația diferențială. Formulele care se folosesc pentru aplicarea procedeelor lui Huta conțin 42 constante.

Prin metoda de lucru expusă de R u n g e, care necesită calcule destul de greoaie, s-au construit procedee de ordinul șase de exactitate, cel mult.

Generalizînd proprietatea care intervine în metoda lui Runge-Kutta, prof. D. V. I o n e s c u a indicat în 1954 o metodă care permite construirea de procedee de orice ordin de exactitate, de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi, fără însă ca procedeele cunoscute pînă atunci, și cele ale lui Huta, stabilite mai tîrziu, să poată fi obținute în acest fel. Procedeele stabilite prin metoda indicată de prof. D. V. Ionescu, necesită multe substituții în ecuația diferențială, motiv pentru care se sugerează ideea să se construiască procedee de ordinele cinci, șase, ș.a.m.d., de exactitate, a căror aplicare să necesite însă calcularea funcției $f(x, y)$ pentru un număr mic de perechi de valori (x, y).

Lucrarea de disertație conține 3 capitole.

2. În capitolul I sînt date rezultate care se referă la studiul comparativ al delimitărilor erorilor în cele mai cunoscute procedee de tip Runge-Kutta, de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi. Din acest studiu rezultă că, în aplicații, unele procedee sînt preferabile altora, deși au același ordin de exactitate.

Metoda de lucru pe care am întrebuințat-o pentru a obține aceste delimitări, se datorește lui L. B i e b e r b a c h. Metoda constă în a dezvolta după puterile lui $x - x_0$, atît integrala exactă $y(x)$, cît și integrala aproximativă $\tilde{y}(x)$. Apoi, cu ajutorul unor majorări relative la funcția $f(x, y)$ și la derivatele sale parțiale, în raport cu x și y, se evaluează valoarea absolută a diferenței celor două integrale. Am urmat această metodă luînd pentru marginile superioare ale valorilor absolute ale funcției $f(x, y)$ și ale derivatelor sale parțiale, numere, pe cît posibil cele mai mici. În felul acesta, domeniul în care au loc delimitările date de noi, este mai mare decît domeniul în care sînt valabile delimitările de tipul celei dată de Bieberbach, în cazul procedeului lui Kutta, de ordinul patru de exactitate. Apoi, în domeniul în care sînt valabile delimitările date de noi, cît și acelea de tipul lui Bieberbach, cele date de noi sînt mai mici (mai bune). Forma delimitărilor erorilor date de noi, este mai complicată decît aceea a delimitărilor de tipul lui Bieberbach.

În paragraful 5 însă, din cauza calculelor foarte complicate, care sînt necesare pentru a da delimitări de tipul celor date în paragr. 1—4, s-au dat numai delimitări de tipul lui Bieberbach.

3. În capitolul II al lucrării se stabilesc două procedee de integrare numerică a ecuației diferențiale (1), care s-au obținut înlocuind derivatele $y^{(k)}(x)$, $(k \geqslant 2)$, în dezvoltarea în serie a integralei exacte $y(x)$ în vecinătatea nodului x_i:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\,y'''(x_i) + \ldots, \tag{2}$$

prin rapoartele de diferențe corespunzătoare. S-au folosit de asemenea, anumite relații între derivatele și diferențele unei funcții, exprimate prin formula lui M a r k o v.

Ținînd seamă de forma formulelor care se folosesc pentru aplicarea procedeelor obținute și de unele rezultate, obținute de noi cu altă ocazie, se dă și procedeul care le generalizează pe acestea, pentru aplicarea căruia se utilizează formule care depind de un parametru. Pentru valorile 0 și $\frac{1}{3}$ ale parametrului, din acest procedeu, se obțin procedeele de mai sus.

Prin extinderea unei metode de lucru datorită lui L. C o l l a t z, în procedeele stabilite se dau delimitări recurente și directe ale erorilor, pe baza cărora se pune în evidență faptul că al doilea procedeu este mai exact (mai bun) decît primul. Pentru aceasta s-au folosit formulele de cuadratură ale lui Simpson și Newton, precum și condiția lui Lipschitz.

4. Capitolul III al lucrării este consacrat obţinerii de procedee de ordin înalt de exactitate, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi, pe un număr minim de noduri. În acest sens s-au adîncit şi extins rezultatele obţinute de E. Fehlberg la sfîrşitul anului 1958.

E. Fehlberg reduce integrarea ecuaţiei diferenţiale

$$z' = \varphi(x, z), \tag{3}$$

cu condiţia iniţială

$$z(x_0) = z_0, \tag{4}$$

printr-o transformare, la integrarea ecuaţiei diferenţiale transformată

$$y' = f(x, y),$$

cu condiţia iniţială

$$y(x_0) = y_0 = z_0,$$

unde funcţia $f(x,y)$ se determină cu ajutorul valorilor funcţiei $\varphi(x,z)$ şi ale derivatelor acesteia, pe nodul x_0.

Integrala $y(x)$ şi funcţia $f(x, y)$ satisfac pe nodul x_0, la anumite condiţii speciale.

Folosind metoda de lucru expusă în cartea lui Runge şi König: „Vorlesungen über Numerisches Rechnen" şi ţinînd seamă de condiţiile speciale pe care $y(x)$ şi $f(x,y)$ le satisfac pe nodul x_0, pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale transformată, E. Fehlberg pune în evidenţă un procedeu de ordinul şase de exactitate, a cărui aplicare necesită trei substituţii în aceasta. Există o clasă de astfel de procedee. Formulele necesare pentru aplicarea procedeului, conţin 9 constante. Nodurile şi coeficienţii formulelor sînt numere raţionale.

Trecerea de la integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale transformată, calculată cu aceste formule, la integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale iniţiale, este foarte simplă şi se face cu ajutorul formulei de transformare.

Printr-o extindere pe care am dat-o transformării lui E. Fehlberg, pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale transformată, s-a pus în evidenţă un procedeu de ordinul şapte de exactitate, a cărui aplicare necesită trei substituţii în aceasta. Există o clasă de astfel de procedee. Formulele necesare pentru aplicarea procedeului conţin de asemenea 9 constante, iar nodurile şi coeficienţii sînt numere raţionale. Folosind această extindere, se dau, de asemenea, procedee de ordinele cinci şi şase de exactitate, pentru aplicarea cărora sînt necesare o substituţie, respectiv două substituţii în ecuaţia diferenţială transformată. Cu ajutorul formulei de transformare, care este destul de simplă, se trece apoi de la integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale transformată la integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale iniţiale.

În continuare se determină o altă transformare, diferită de transformarea lui Fehlberg. Se dau apoi acestei transformări două extinderi. Prin această nouă transformare şi cele două extinderi ale sale, se stabilesc procedee de ordinele şase, şapte şi opt de exactitate, a căror aplicare necesită doar două substituţii în ecuaţia diferenţială transformată. Nodurile şi coeficienţii formulelor care se folosesc pentru aplicarea acestor procedee, sînt numere iraţionale Formulele conţin numai 5 constante.

În lucrare sînt indicate condiţiile ce trebuiesc impuse integralei $y(x)$ şi funcţiei $f(x,y)$ pe nodul x_0, cu ajutorul cărora se pot determina transformările care vor permite să se stabilească procedee de ordinul $n + 4$ ($n > 2$) de exactitate, pe două, respectiv trei noduri, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale transformate, corespunzătoare.

În încheiere se dau delimitările erorilor în procedeul lui Fehlberg şi în procedeul de ordinul şapte de exactitate, pe două noduri, stabilit în acest capitol. Erorile sînt de ordinul lui h^7, respectiv h^8, unde h este pasul de integrare. Numărul minim de substituţii în ecuaţia diferenţială transformată, necesare pentru aplicarea acestor procedee, ca şi faptul că formulele care se folosesc pentru aplicarea lor conţin un număr mic de constante, au simplificat mult calculele necesare pentru delimitările erorilor. Ordinul de mărime al erorilor nu se schimbă cînd se trece de la integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale transformată la integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale iniţiale.

ȘEDINȚELE DE COMUNICĂRI ȘTIINȚIFICE ALE CADRELOR DIDACTICE ALE FACULTĂȚII DE MATEMATICĂ-FIZICĂ A UNIVERSITĂȚII „BABEȘ-BOLYAI"

23 februarie 1961

1. M. Balázs, D. Borşan, M. Schechter, Operatori în mulțimi de părți.
2. I. Maurer, E. Virág, Despre inelul de cît al unui inel comutativ.
3. P. Mocanu, Domeniul măturat de imaginile unui segment prin transformări univalente.

17 martie 1961

1. I. Maruşciac, Asupra diametrului transfinit al unsei mulțimi din plan.
2. M. Țarină, Noțiunea de orientare în geometrie abolută.
3. D. D. Stancu, Asupra reprezentării integrale a restului din formula lui Taylor pentru două variabile.

14 aprilie 1961

1. P. Enghiș, Asupra clasei unor spații riemaniene V_3.
2. B. Orbán, Despre curbele polare generalizate ale curbelor algebrice.
3. I. Rusu, Asupra unei ecuații funcționale cu aplicații în nomografie.

20 mai 1961

1. P. Szilágyi, Condițiile generale la limită pentru ecuațiile elasticității.

20 iunie 1961

H. O. Gherman, Studiul polarizării undelor electromagnetice la fenomene pe suprafața de separare a două medii.
2. P. Hamburg, Despre conectibilitatea mulțimilor.
3. M. Schechter, Unele relații de ordonare și echivalență în mulțimi de părți

20 octombrie 1961

1. I. Maurer, E. Virág, Generalizarea noțiunii de produs direct.
2. Fl. Constantinescu, Despre valorile proprii și distribuțiile proprii ale operatorilor Carlemen generalizați.
3. I. A. Rus, Proprietăți ale zerourilor integralelor ecuațiilor diferențiale.

8 decembrie 1961

1. B. Orbán, M. Țarină, O generalizare a curbelor polare și aplicațiile ei în geometria neeuclidiană.
2. V. Zelmer, Despre cvasigrup.
3. I. Maruşciac, Asupra unor infrapolinoame condiționate.

ERATĂ

Pag.	*Rîndul*	*În loc de:*	*Se va citi:*	*Greșeala s-a făcut din vina:*
13	10 de jos	*condiționată*	*conținută*	autorului
65	4 de sus	+ 0,06	± 0,06	„
	11 de sus	+ 0,05	± 0,05	„
70	27 de sus	,5922	,3845	„
	28 de sus	,3845	,5170	„
129	14 de jos	H. O. Gherman	I. O. Gherman	tipografiei

(Mathematica-Physica II/1962)