

491177

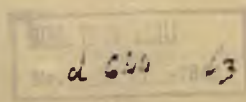
STUDIA

UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1962



C L U J

In cel de al VII-lea an de apariție (1962) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie—economie politică;
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На VII году издания (1962), *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия—политэкономия;
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur VII-me année de publication (1962) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie—économie politique;
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

491177

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-PHYSICA

FASCICULUS 1

1962

d 644 63

C L U J

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI
ANUL VII 1962

REDACTOR ŞEF:

Acad. prof. C. DAICOVICIU

REDACTOR ŞEF ADJUNCT:

Prof. ŞT. PÉTERFI, membru coresp. Acad. R.P.R.



COMITETUL DE REDACŢIE AL SERIEI MATEMATICĂ—FIZICĂ:

Prof. G. CALUGAREANU, membru coresp. Acad. R.P.R. (redactor responsabil),
Prof. GH. CHIŞ, Prof. D. V. IONESCU, Prof. V. MARIAN, Prof. GH. PIC, Prof. I. URSU

Redacţia:

CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1
Telefon 34-50

SUMAR — CONTENTS — INHALT

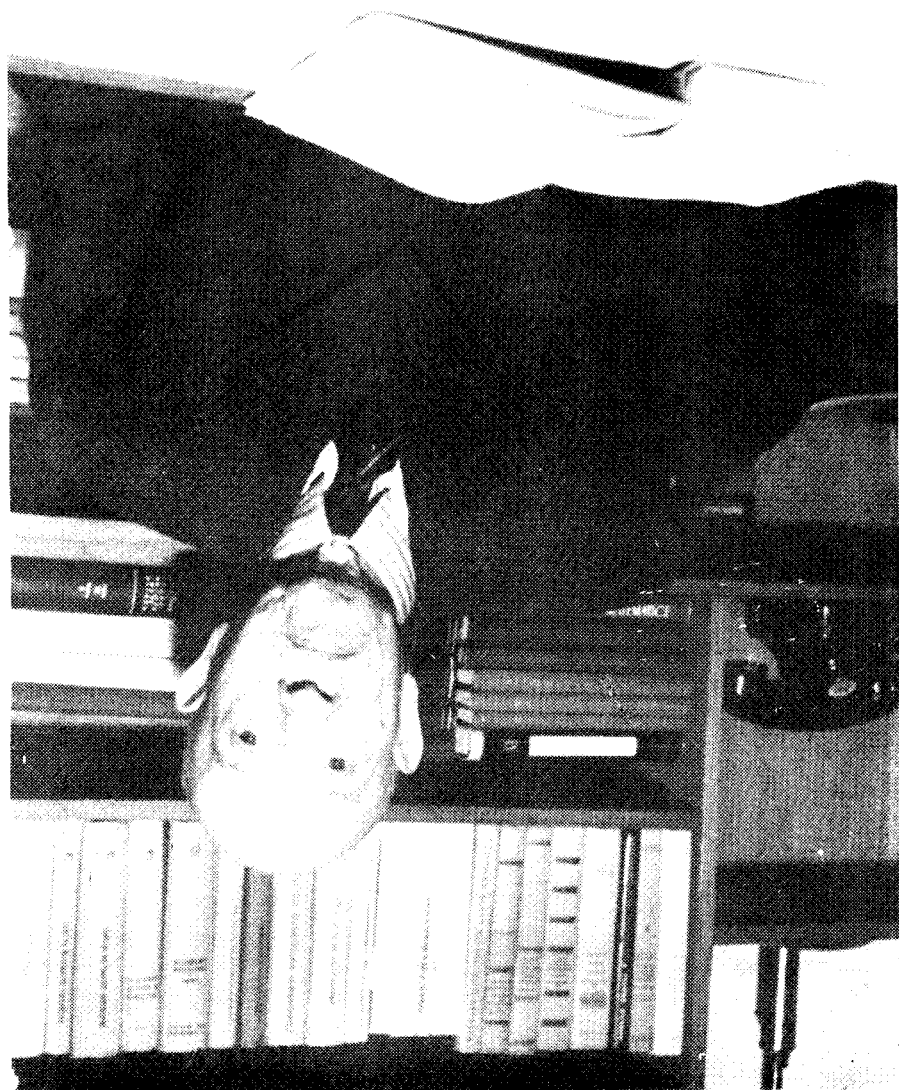
Profesorul Dr. Theodor Anghelută. La sărbătorirea celor 80 de ani (Acad. prof. C. DAICOVICIU)	7
E. MIHAILESCU, Proprietățile diferenței logicii față de reciprocitate și disjuncție	9
I. GY. MAURER, E. VIRAG, Observație asupra formei normale a elementelor unui grup	19
G.H. PIC, Despre o teoremă a lui L. Fejér	25
G. CALUGAREANU, O teoremă asupra traversărilor unui nod	39
G.H. TH. GHEORGHIU, Asupra varietăților neolonyme Țițeica	45
T. MIHAILESCU, Suprafețe riglate normale asociate unei suprafețe nedesfășurabile	61
N. MIHAILEANU, Aplicarea în Geometria neeuclidiană a noțiunii de normă a unei matrici	67
B. ORBAN, Despre curbele polare generalizate ale curbilor algebrice plane ..	71
A. NEY, Legătura între transformarea lui Abel și transformarea lui Kummer ..	79
A. HAIMOVICI, Sisteme de ecuații diferențiale complet integrabile care generalizează sistemele pfaffiene	81
C. IACOB, Asupra dezvoltării în serie a funcției lui Green în vecinătatea punctului de la infinit	95
M. HOSSZU, Remarks on the Pexider's Functional Equation (Observații asupra ecuației funcționale a lui Pexider)	99
E. VINCZE, Über eine Verallgemeinerung der Pexiderschen Funktionalgleichungen (Despre o generalizare a ecuației funcționale a lui Pexider)	103
G.H. CHIȘ, V. URECHE, Binară fotometrică V Trianguli	107
V. VALCOVICI, Asupra unei axiome de statică solidului rigid	117
ȘT. I. GHEORGHIȚA, O extindere a teoremei cercului	121
I. URSU, F. PUSKAS, V. CRISTEA, Proprietățile semiconductoare ale sistemului $ZnO-Al_2O_3$	127
V. MERCEA, E. FODOR, V. GRECU, Separarea într-o coloană cu antrenare cu vapori în funcție de concentrația medie a amestecului	137

СОДЕРЖАНИЕ

Профессор Др. Т. Ангелуцэ, По случаю празднования 80 летия (Акад. проф. К. ДАЙКОВИЧУ)	
Е. МИХЭЙЛЕСКУ, Свойства логической разности по отношению к взаимности и дизъюнктивности	9
И. ДЬ. МАУРЕР, и И. ВИРАГ, Относительно нормального вида элементов некоторой группы	19
Г. ПИК, О теореме Л. Фейера	25
Г. ҚЭЛУГЭРЯНУ, Теорема о пересечении узла	39
Г. Т. ГЕОРГИУ, Относительно неголономных разновидностей Цицейки	45
Т. МИХЭЙЛЕСКУ, Нормальные линейчатые поверхности, присоединенные к неразвертываемой поверхности	61
Н. МИХЭЙЛЯНУ, Применение в евклидовой геометрии понятия нормы матрицы ,	67
Б. ОРБАН, Обобщение полярных кривых по отношению к плоской алгебраической кривой	71
А. НЕЙ, Связь между преобразованием Абеля и преобразованием Куммера . .	79
А. ГАЙМОВИЧ, Система вполне интегрируемых дифференциальных уравнений, обобщающих системы Пфаффа	81
К. ЯКОБ, Относительно разложения в ряд функции Грина близ точки в бесконечности	95
М. ГОСУ, Замечания относительно функционального уравнения Пексидера . .	99
Е. ВИНЦЕ, Об обобщении функционального уравнения Пексидера	103
Г. КИШ и В. УРЕКЕ, Фотометрическая двойная <i>V Trianguli</i>	107
В. ВЫЛКОВИЧ, Относительно одной аксиомы статики твердого тела	117
И.Т. И. ГЕОРГИЦЭ, О распространении теоремы Круга	121
И. УРСУ, Ф. ПУШКАШ и В. КРИСТЯ, Свойства полупроводника системы $ZnO-Al_2O_3$	127
В. МЕРЧА, Е. ФОДОР, В. ГРЕКУ, Выделение в колонне с вовлечением паров в зависимости от средней концентрации смеси	137

SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

Le professeur Dr. Theodor Anoheliță. A l'occasion de sa 80-ème anniversaire (Acad. prof. C. DAICOVICIU)	7
E. MIHAILESCU, Les propriétés de la différence de la logique à l'égard de la réciprocité et de la disjonction	9
I. GY. MAURER, I. VIRAG, Observations sur la forme normale des éléments d'un groupe	
GH. PIC, Sur un théorème de L. Fejér	25
G. CAIUGĂREANU, Un théorème sur les traversées d'un noeud	39
GH. TH. GHEORGHIU, Sur les variétés nonholonomes Titeica	45
T. MIHAILESCU, Les surfaces réglées normales associées à une surface non-déve- loppable	61
N. MIHAILEANU, L'application en géométrie non-euclidienne de la notion de norme d'une matrice	67
B. ORBĂN, Sur les courbes polaires généralisées des courbes algébriques planes	71
A. NEY, La relation entre la transformation d'Abel et la transformation de Kummer	79
A. HAIMOVICI, Systèmes d'équations différentielles complètement intégrables qui généralisent les systèmes de Pfaff	81
C. IACOB, Sur le développement en série de la fonction de Green au voisinage du point à l'infini	95
M. HOSSZU, Remarks on the Pexider's Functional Equation	99
E. VINCZE, Über eine Verallgemeinerung der Pexiderschen Funktionalgleichungen	103
GH. CHIS. V. URECHE, La binaire photométrique V. Trianguli	107
V. VĂLCOVICI, Sur un axiome de statique du solide rigide	117
ST. I. GHEORGHIȚĂ, Une extension du théorème du cercle	121
I. URSU, F. PUSKAS, V. CRISTEA, Les propriétés semiconductrices du système $ZnO-Al_2O_3$	127
V. MERCEA, E. FODOR, V. GRECU, La séparation dans une colonne d'entraînement par vapeurs en fonction de la concentration moyenne du mélange	137



PROFESORUL DOCTOR THEODOR ANGHELUȚĂ

— La sărbătorirea celor 80 de ani —

La 17 aprilie 1962 profesorul Dr. Theodor Angheluță a împlinit 80 de ani. În decursul a peste 50 ani de activitate didactică și științifică profesorul Theodor Angheluță s-a făcut cunoscut în întreaga lume prin importante sale lucrări în domeniul Algebrei, Analizei și Teoriei funcțiilor de variabilă complexă, lucrări care au fost puncte de pornire pentru mulți cercetători din țară și străinătate.

În tot acest timp a exercitat — și mai continuă să exercite și azi — o puternică influență asupra formării a zeci de generații de matematicieni.

Colegi și elevi îi închină acest volum ca semn de omagiu și recunoștință maestrului lor iubit.

Universitatea Clujeană, care a avut deosebita cinste de a-l număra printre profesorii săi se asociază binemeritatului omagiu adus de autorii lucrărilor din acest volum.

Acad. prof. CONSTANTIN DAICOVICIU
Rectorul Universității „Babeș-Bolyai” Cluj

PROPRIETĂȚILE DIFERENȚEI LOGICII FAȚĂ DE RECIPROCITATE ȘI DISJUNCȚIE

de

EUGEN MIHĂILESCU (București)

INTRODUCERE

Considerăm axiomele:

A1. $EEpqEqp$.

A2. $EEEpqrEpEqr$.

A3. $EKKpqrKKqpr$.

A4. $EKKpqKpq$.

A5. $EEEkprKqrrKrEpq$.

A6. $EKRpqrRKprKqr$.

În lucrarea [1] am demonstrat că deși acest sistem este incomplet, totuși toate teoremele adevărate ale logicii clasice sînt deductibile din axiomele sistemului.

La axiomele *A1*—*A6* alăturăm axiomele

A7. $EApqEEpqKpq$

A8. $EDpqKKpq$

în care $Dpq = p$ fără q .

Se obține astfel un nou sistem $\mathbf{L}(E, K, R, A, D)$ care la fel este incomplet, dar conține toate teoremele adevărate ale logicii clasice.

Demonstrarea acestui lucru se face în mod analog ca pentru $\mathbf{L}(E, K, R)$, arătînd că orice formă $\alpha \in \mathbf{S}(E, K, R, A, D)$ este echipolentă cu o formă normală de tipul:

$$E^k R^k \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{h+k+1} \text{ unde } \alpha_i \in \mathbf{S}(K)$$

În baza acestei forme, normale, toate formele din mulțimea $\mathbf{S}(E, K, R, A, D)$ se clasifică în 3 grupe.

I. Teoremele adevărate ale logicii clasice, care sînt deductibile din axiome.

II. O infinitate de forme libere, toate echipolente între ele și cele mai scurte fiind:

$$Rpp \text{ și } Dpp$$

III. O infinitate de forme care nu sînt deductibile din axiome și alăturate lor fac sistemul contradictoriu.

Scopul acestui studiu este de a demonstra proprietățile functorului „D” față de reciprocitate și disjuncție.

§ 1. TEOREMA 1. Orice formă $\alpha \in S(K)$ conținînd p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) variabile este echipolentă cu forma¹

$$N(E, A) = E^M p_1 p_2 \dots p_n \prod_{P_n^2} A(p_1, p_2, \dots, p_n)_2 \prod_{P_n^3} A^2(p_1, p_2, \dots, p_n)_3 \dots \prod_{P_n^n} A^{n-1}(p_1, \dots, p_n)_n$$

unde

$$M_1 = \sum_{j=1}^n C_n^j + n \cdot 1,$$

Demonstrarea se face prin recurență.

Într-adevăr pentru $n = 2$ avem în baza axiomei A7, următoarea formulă:

$$Kp_1 p_2 \sim EE p_1 p_2 A p_1 p_2 \quad (I)$$

În formula (I) facem substituția $p_1 / Kp_1 p_2$, p_2 / p_3 și obținem

$$KKp_1 p_2 p_3 \sim EEKp_1 p_2 p_3 AKp_1 p_2 p_3 \sim EEEE p_1 p_2 p_3 A p_1 p_2 AKp_1 p_2 p_3 \quad (II)$$

$$\text{Dar} \quad AKp_1 p_2 p_3 \sim KA p_1 p_3 A p_2 p_3 \quad (III)$$

deoarece functorul „A” este distributiv față de functorul „K” și deci

$$AKp_1 p_2 p_3 \sim EEA p_1 p_3 A A p_1 p_2 p_3 \quad (IV)$$

În baza formulelor (II)–(IV) obținem formula

$$KKp_1 p_2 p_3 \sim E^6 p_1 p_2 p_3 A p_1 p_2 A p_1 p_3 A p_2 p_3 A^2 p_1 p_2 p_3 \quad (V)$$

adică

$$KKp_1 p_2 p_3 \sim E^{M_1} \prod_{i=1}^3 p_i \prod_{P_3^2} A(p_1, p_2, p_3)_2 \prod_{P_3^3} A^2(p_1, p_2, p_3)_3 \quad (VI)$$

adică forma normală $N(E, A)$ și unde

$$M_2 = \sum_{i=2}^3 C_3^i + 2$$

Presupunem formula adevărată pentru $n = h$

$$K^{h-1} p_1 p_2 \dots p_h \sim E^{M_2} p_1 p_2 \dots p_h \prod_{P_h^2} A(p_1, p_2, \dots, p_h)_1 \quad (VII)$$

$$\prod_{P_h^3} A^2(p_1, p_2, \dots, p_h)_3 \dots \prod_{P_h^h} A^{h-1}(p_1, p_2, \dots, p_h)_h = \omega$$

¹ Notațiile sînt cele întrebuințate în lucrarea [2].

unde

$$M_3 = \sum_{i=2}^k C_i^i + h = 1$$

Dar

$$\begin{aligned} \omega = E^{M_3} p_1 p_2 \dots p_k & \left[\prod_{P_{h-1}^1} A p_1(p_2, \dots, p_k)_1 \prod_{P_{h-2}^1} A p_2(p_3, \dots, p_k)_1 \prod_{P_{h-3}^1} A p_3(p_4, \dots, \dots, p_k) \dots \prod_{P_1^1} A p_{h-1}(p_k) \right] \\ & \left[\prod_{P_{h-1}^2} A^2 p_1(p_2, \dots, p_k)_2 \prod_{P_{h-3}^1} A^2 p_2(p_3, \dots, p_k)_2 \dots \prod_{P_2^2} A^2 p_{h-2}(p_{h-1}, p_k)_2 \right] \\ & \left[\prod_{P_{h-1}^3} A^3 p_1(p_2, \dots, p_k)_3 \prod_{P_{h-2}^3} A^3 p_2(p_3, \dots, p_k)_3 \dots \prod_{P_3^3} A^3 p_{h-3}(p_{h-2}, p_{h-1}, p_k)_3 \right] \\ & \left[\prod_{P_{h-1}^{h-2}} A^{h-2} p_1(p_2, \dots, p_k)_{h-2} \prod_{P_{h-2}^{h-2}} A^{h-2} p_2(p_3, \dots, \dots, p_k)_{h-2} \right] \\ & \left[\prod_{P_{h-3}^{h-1}} A^{h-1} p_1(p_2, \dots, p_k)_{h-1} \right] \end{aligned}$$

și deci

$$K^{h-1} p_1 p_2 \dots p_k \sim \omega \quad (\text{VIII})$$

În formula (VIII) facem substituția $p_1/Kp_1 p_2, p_2/p_3, \dots, p_k/p_{h+1}$ și obținem

$$\begin{aligned} K^h p_1 p_2 \dots p_{h+1} & \sim E^{M_3} K p_1 p_2 p_3 \dots p_{h+1} \left[\prod_{P_{h-1}^1} A K p_1 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_1 \right] \quad (\text{IX}) \\ & \left[\prod_{P_{h-2}^1} A p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_1 \dots \prod_{P_1^1} A p_h(p_{h+1})_1 \right] \left[\prod_{P_{h-2}^2} A^2 K p_1 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_2 \dots \right. \\ & \left. \dots \prod_{P_{h-2}^2} A^2 p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_2 \dots \prod_{P_2^2} A^2 p_{h-1}(p_h, p_{h+1})_2 \right] \dots \left[\prod_{P_{h-1}^{h-2}} A^{h-2} K p_1 p_2(p_3, \dots, \dots, p_{h+1})_{h-2} \right. \\ & \left. \prod_{P_{h-2}^{h-2}} A^{h-2} p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_{h-2} \right] \left[\prod_{P_{h-1}^{h-1}} A^{h-1} K p_1 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_{h-1} \right] \sim \\ & \sim E^{M_3} E E p_1 p_2 A p_1 p_2 p_3 \dots p_4, \dots, p_{h+1} \left\{ \prod_{P_{h-1}^2} K A p_1(p_3, \dots, p_{h+1})_1 K A p_2(p, \dots, \dots, p_{h-1}) \right. \\ & \left. \left[\prod_{P_{h-2}^1} A p_3(p_4, \dots, p_{h-1})_1 \prod_{P_1^1} A p_h(p_{h+1})_1 \right] \right\} \left\{ \prod_{P_{h-1}^2} \left[K A^2 p_1(p_3, \dots, \dots, p_{h+1})_2 A^2 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_2 \right] \right. \\ & \left. \left[\prod_{P_{h-3}^2} A^2 p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_2 \right] \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \left[\prod_{\mathbf{p}_2^2} A^2 p_{h+1}(p_h, p_{h+3})_2 \right] \left\{ \dots \left\{ \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^{h-2}} \left[K A^{h-2} p_1(p_3, \dots, p_{h+1}) A^{h-2}(p_3, \dots, \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \dots, p_{h+1})_2 \right] \left[\prod_{\mathbf{p}_{h-3}^{h-2}} A^{h-2} p_3 p_4, \dots, p_{h-1})_{h-2} \right] \right\} \left\{ \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^{h-1}} \left[K A^{h-2} p_1(p_3, \dots, p_{h+1})_{h-1} \sim \right. \right. \right. \\
& \sim A^{h-1} p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_1 E^{M_4} E E p_1 p_2 p_3 \dots p_{h+1} \left\{ A p_1 p_2 \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^1} \left[E^2 A p_1(p_3, \dots, \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \dots, p_{h+1})_1 A p_3 A^2 p_1 p_2(p_3, \dots, p_{h+1}) \right] \left[\prod_{\mathbf{p}_{h-1}^1} A p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_1 \right] \dots \right. \\
& \left. \dots \left[\prod_{\mathbf{p}_1^1} A p_h(p_{h+1})_1 \right] \right\} \left\{ \left[\prod_{\mathbf{p}_{h-1}^2} E^2 A^2 p_1(p_3, \dots, p_{h+1})_2 A^2 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_2 \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^1} A^2 \right. \right. \\
& \left. \left. p_1 p_2(p_3, \dots, p_{h+1}) \right] \left[\prod_{\mathbf{p}_{h-2}^2} A^2 p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_2 \right] \dots \left[\prod_{\mathbf{p}_2^2} A^2 p_{h-1}(p, p_{h+1})_2 \right] \right\} \dots \\
& \dots \left\{ \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^{h-2}} E E A^{h-1} p_1(p_3, \dots, p_{h-1}) A^{h-2} p_2(p_3, \dots, p_{h+1}) \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^{h-1}} A^{h-2} p_1 p_2(p_3, \dots, \right. \\
& \left. \dots, p_h)_{h-3} \prod_{\mathbf{p}_{h-2}^{h-2}} A^{h-2} p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_{h-2} \right\} \left\{ \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^{h-1}} \left[E E A^{h-1} p_1(p, \dots, p_{h+1})_{h-1} A^{h-1} \right. \right. \\
& \left. \left. p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_1 \prod_{\mathbf{p}_{h-2}^{h-1}} A^{h-1} p_1 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_{h-1} \right] \right\} \sim E^{M_4} p_1 p_2 \dots p_4 p_{h+1} \\
& \left[A p_1 p_2 \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^1} A p_1(p_3, \dots, p_{h+1})_1 \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^1} A p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_1 \prod_{\mathbf{p}_{h-2}^1} A p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_2 \dots \right. \\
& \left. \dots \prod_{\mathbf{p}_h^1} A p_{h+1}(p_{h+1})_1 \right] \left[\prod_{\mathbf{p}_{h-1}^1} A^2 p_1 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_1 \prod_{\mathbf{p}_{h-2}^2} A^2 p_1(p_3, \dots, p_{h+1})_2 \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^2} A^2 \right. \\
& \left. p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_2 \dots \prod_{\mathbf{p}_2^2} A^2 p_{h-1}(p_h, p_{h+1})_2 \right] \dots \left[\prod_{\mathbf{p}_{h-1}^{h-2}} A^{h-1} p_1 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_{h-1} \right. \\
& \left. \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^{h-1}} A^{h-1} p_1(p_3, \dots, p_{h-1})_{h-1} \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^{h-1}} A^{h-1} p_2(p_2, \dots, p_{h+1})_{h+1} = \bar{E}^{M_4} p_1 p_2 \dots p_{h+1} \right. \\
& \left[\prod_{\mathbf{p}_h^1} A p_1(p_2, \dots, p_{h+1})_1 \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^1} A p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_1 \prod_{\mathbf{p}_{h-2}^1} A p_3(p_4, \dots, p_{h+1})_1 \dots \right. \\
& \left. \dots \left[\prod_{\mathbf{p}_1^1} A p_h(p_{h+1})_1 \right] \left[\prod_{\mathbf{p}_h^2} A^2(p_3, \dots, p_{h+1})_2 \prod_{\mathbf{p}_{h-1}^2} A^2 p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_2 \dots \prod_{\mathbf{p}_2^2} A \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & p_{h+1} (p_h, p_{h+1})_2 \Big] \cdots \left[\prod_{p_{h-1}^{h-1}} A^{h-1} p_1(p_3, \dots, p_{h+1})_{h-1} \prod_{p_{h-1}^{h-1}} A^{h-1} p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_{h-1} \right] \\
 & \prod A^h p_1(p_3, \dots, p_{h+1})_h \prod_{p_h^h} A^h p_2(p_3, \dots, p_{h+1})_h \Big] \sim E^{M_4} p_1 p_2 \cdots p_{h+1} \prod_{p_{h-1}^{h-1}} A(p_1, \dots \\
 & \dots, p_{h+1})_2 \prod_{p_{h+1}^3} A^2(p_1, \dots, p_{h+1}) \cdots \prod_{p_{h+1}^{h+1}} A^h(p_1, \dots, p_{h+1})_{h+1}
 \end{aligned}$$

unde

$$M_4 = \sum_{i=2}^{h+1} C_{h+1}^i + h$$

și deci teorema este demonstrată.

TEOREMA 2. Orice formă $\alpha \in S(D)$ de tipul:

$$\alpha = D^{n-1} p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$$

admite forma normală:

$$N_1(D) = R A^{n-1} p_1 p_2 \cdots p_n A^{n-2} p_2 p_3 \cdots p_n$$

Demonstrăm teorema prin recurență.

În demonstrarea teoremei ne bazăm pe următoarele formule:

$$R^{2k}(p)^{2k} q \sim q \quad (I)$$

$$R^{2k+1}(p)^{2k+1} q \sim R p q \quad (II)$$

Într-adevăr $R^{2k}(p)^{2k} q \sim E^{2k}(p)^{3k} q \sim q$ conform teoremelor din sistemul $L(E, R)$. La fel:

$$E R^{2k+1}(p)^{2k+1} R p q \sim E E^{2k+1}(p)^{2k+1} q E p q$$

și deci

$$E^{2k+1}(p)^{2k+1} q \sim E p q$$

echivalează cu:

$$R^{2k+1}(p)^{6f+1} q \sim R p q$$

Demonstrăm acum teorema. Pentru $n = 2$ avem:

$$\begin{aligned}
 D p_1 p_2 & \sim R p_1 K p_1 p_2 \sim R p_1 E E p_1 p_2 A p_1 p_2 \sim \\
 & \sim R R R p_1 p_1 p_2 A p_1 p_2 \sim R_2 A p_1 p_2
 \end{aligned} \quad (1)$$

Am aplicat axioma A8 precum și teorema din $L(E, R)$

După formula (III) avem:

$$R R R p_1 p_1 p_2 A p_1 p_2 \sim R A p_1 p_2 p_2 \quad (2)$$

adică

$$D p_1 p_2 \sim R A_1 p_1 p_2 p_2 \quad (3)$$

deci pentru $n = 2$ se verifică. Pentru $n = 3$. În (3) facem substituția $p_1/Dp_1, p_2/p_3$, obținem

$$DDp_1p_2p_3 \sim RADp_1p_2p_3p_3 \quad (4)$$

După formula (3) avem:

$$\begin{aligned} RADp_1p_2p_3p_3 &\sim RARAp_1p_2p_3p_3 \sim RRAA^2p_1p_2p_3A^2p_2p_3p_3p_3 \sim \\ &\sim RRRp_3p_3A^2p_1p_2p_3A^2p_2p_3 \\ &\sim RA^2p_1p_2p_3Ap_1p_2 \end{aligned} \quad (5)$$

și deci

$$DDp_1p_2p_3 \sim RA^2p_1p_2p_3Ap_2p_3 \quad (6)$$

adică și pentru $n = 3$ teorema se verifică.

Presupunem teorema adevărată pentru $n = h$ adică

$$D^{h-1}p_1p_2 \dots p_h \sim RA^{h-1}p_1p_2 \dots p_hA^{h-2}p_2p_3 \dots p_h \quad (7)$$

În (7) facem substituția $p_1/Dp_1, p_2/p_3, \dots, p_h/p_{h-1}$ și obținem:

$$\begin{aligned} D^h p_1p_2 \dots p_h p_{h+1} &\sim RA^{h-1} Dp_1p_2p_3 \dots p_h p_{h+1} A^{h-2} p_2p_3 \dots \\ p_{h+1} &\sim RADp_1p_2A^{h-3}p_3p_4 \dots p_h p_{h+1} A^{h-2} p_2p_3 \dots p_{h+1} \end{aligned} \quad (8)$$

Dar după formula (3), axioma A6 precum și conform teoremelor din $L(E, R)$ avem:

$$\begin{aligned} RADp_1p_2A^{h-3}p_3 \dots p_{h+1}A^{h-2}p_3p_4 \dots p_h p_{h+1} &\sim RARAp_1p_2p_2 \\ A^{h-3}p_3p_4 \dots p_{h+1}A^{h-2}p_3p_4 \dots p_h p_{h+1} &\sim RRAA^h p_1p_2 \dots p_h p_{h+1} A^{h-1} \\ p_2p_3 \dots p_{h+1}A^{h-2}p_3p_4 \dots p_{h+1}A^{h-2}p_3p_4 \dots p_{h+1} &\sim RRA^{h-2}p_3p_4 \dots \\ \dots p_{h+1}A^{h-1}p_3p_4 \dots p_{h+1}RA^h p_1p_2 \dots p_{h+1}A^{h-1}p_2p_3 \dots p_{h+1} \end{aligned} \quad (9)$$

și după formula (5) avem:

$$\begin{aligned} RRA^{h-2}p_3p_4 \dots p_{h+1}A^{h-2}p_3p_4 \dots p_{h+1}RA^h p_1p_2 \dots p_{h+1}A^{h-1}p_2p_3 \dots p_{h+1} &\sim \\ \sim RA^h p_1p_2 \dots p_h p_{h+1}A^{h-1}p_2p_3 \dots p_{h+1} \end{aligned} \quad (10)$$

și deci:

$$D^h p_1p_2 \dots p_h p_{h+1} \sim RA^h p_1p_2 \dots p_h p_{h+1}, A^{h-1}p_2p_3 \dots p_h p_{h+1} \quad (11)$$

adică forma „ α ” admite și pentru $n = h + 1$, forma normală și astfel teorema este demonstrată.

TEOREMA 3. Orice formă $\alpha \in S(D)$ de tipul

$$\alpha = Dp_1Dp_2Dp_3 \dots Dp_{2h-1}Dp_{2h}p_{2h+1}$$

admite forma normală:

$$N_2(D) = R^M p_1p_3p_5 \dots p_{2h-1}p_{2h+1} \left[\prod_{p_2^1} A p_3(p_1, p_2)_1 \prod A^2 p_3(p_1, p_2)_2 \right]$$

$$\left[\prod_{\mathbf{p}_4^1} A p_5(p_1, p_2, p_3, p_4)_1 \prod_{\mathbf{p}_4^2} A^2 p_5(p_1, p_2, p_3, p_4)_2 \prod_{\mathbf{p}_4^3} A^3 p_5(p_1, p_2, p_3, p_4) \right. \\ \left. \prod_{\mathbf{p}_4^4} A^4 p_5(p_1, p_2, p_3, p_4) \right] \left[\prod_{\mathbf{p}_6^1} A p_7(p_1, \dots, p_6)_1 \prod_{\mathbf{p}_6^2} A^2 p_7(p_1, \dots, p_6)_2 \prod_{\mathbf{p}_6^3} A^3 p_7(p_1, \dots, p_6)_3 \right. \\ \dots, p_6)_3 \prod_{\mathbf{p}_6^4} A^4 p_7(p_1, \dots, p_6)_4 \prod_{\mathbf{p}_6^5} A^5 p_7(p_1, \dots, p_6)_5 \prod_{\mathbf{p}_6^6} A^6 p_7(p_1, \dots, p_6)_6 \left. \right] \dots \\ \dots \left[\prod_{\mathbf{p}_{2k}^1} A p_{2k+1}(p_1, p_2, \dots, p_{2k})_1 \prod_{\mathbf{p}_{2k}^2} A^2 p_{2k+1}(p_1, \dots, p_{2k})_2 \dots \prod_{\mathbf{p}_{2k}^{2k}} A^{2k} p_{2k+1}(p_1, p_2, \dots, p_{2k})_{2k} \right] \dots$$

unde $M = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{2j} C_{2j}^i + k$

Într-adevăr, din lucrarea (2) rezultă că forma „ α'' ” admite forma normală:

$$*N(D) = R p_1 K p_1 p_2 K^2 p_1 p_2 p_3 \dots K^{2n} p_1 p_2 p_3 \dots p_{2n+1}$$

Dar aplicînd relația din teorema (1) avem

$$*N(D) = R^{2n} p_1 (E^{\sum_1^2 c_2^i + 1} p_1 p_2 A p_1 p_2) \left[E^{\sum_2^3 c_3^i + 2} p_1 p_2 p_3 \prod_{\mathbf{p}_3^2} A(p_1 p_2 p_3)_2 \prod_{\mathbf{p}_3^3} A^2 \right. \\ \left. (p_1, p_2, p_3)_3 \right] \left[E^{\sum_1^2 c_2^i + 1} p_1 p_2 p_3 p_4 \prod_{\mathbf{p}_4^2} A(p_1, \dots, p_4)_2 \prod_{\mathbf{p}_4^3} A^2(p_1, p_2, p_3, p_4)_3 \prod_{\mathbf{p}_4^4} A^3 \right. \\ \left. (p_1, p_2, p_3, p_4)_4 \right] \dots \left[E^{\sum_{2k}^{2R} c_{2k}^i + k - 1} p_1 p_2 p_3 \dots p_{2k+1} \prod_{\mathbf{p}_{2k+1}^2} A(p_1, p_2, \dots, p_{2k+1})_2 \right. \\ \left. \prod_{\mathbf{p}_{2k+2}^3} A^2(p_1, p_2, \dots, p_{2k+1})_3 \dots \prod_{\mathbf{p}_{2k+1}^{2k+1}} A^{2k}(p_1, p_2, \dots, p_{2k+1})_{2k+3} \right].$$

Dar grupele de forma:

$$\prod_{\mathbf{p}_{2k+1}^i} A^{i-1}(p_1, p_2, \dots, p_{2k+1})_i$$

sînd conținute de un număr par de ori, iar grupele de forma

$$\prod_{\mathbf{p}_{2k}^i} A^{i-1}(p_1, p_2, \dots, p_{2k})_{i+1}$$

sînd conținute de un număr impar de ori, avem după formulele (I) și (II) din teorema II:

$$\alpha \sim N_z(D) = R^M (R p_1 p_3 p_5 \dots p_{2k+1} \left[\prod_{\mathbf{p}_2^1} A p_3(p_1, p_2)_1 \prod_{\mathbf{p}_1^2} A^2 p_3(p_1, p_2)_2 \right])$$

$$\begin{aligned}
& \left[\prod_{\mathbf{r}_4^1} A p_5(p_1, p_2, p_3, p_4)_1 \right] \left[\prod_{\mathbf{r}_4^2} A^2 p_5(p_2, p_3, p_4)_2 \prod_{\mathbf{r}_4^3} A^3 p_5(p_1, p_2, p_3, p_4)_3 \prod_{\mathbf{r}_4^4} A^4 p_5(p_1, p_2, p_3, p_4)_4 \right] \left[\prod_{\mathbf{r}_6^1} A p_7(p_1, \dots, p_6)_1 \prod_{\mathbf{r}_6^2} A^2 p_7(p_1, \dots, p_6)_2 \prod_{\mathbf{r}_6^3} A^3 p_7(p_1, \dots, p_6)_3 \right. \\
& \left. \prod_{\mathbf{r}_6^4} A^4 p_7(p_1, \dots, p_6)_4 \prod_{\mathbf{r}_6^5} A^5 p_7(p_1, \dots, p_6)_5 \prod_{\mathbf{r}_6^6} A^6 p_7(p_1, \dots, p_6)_6 \right] \dots \\
& \dots \left[\prod_{\mathbf{r}_{2k}^1} A p_{2k+1}(p_1, p_2, \dots, p_{2k})_1 \prod_{\mathbf{r}_{2k}^2} A^2 p_{2k+1}(p_1, \dots, p_{2k})_2 \dots \prod_{\mathbf{r}_{2k}^{2k}} A^{2k} p_{2k+1}(p_1, p_2, \dots, p_{2k})_{2k} \right]
\end{aligned}$$

adică teorema este demonstrată.

TEOREMA 4. Orice formă $\alpha \in S(D)$ conținând $2k$ variabile și fiind de tipul:

$$\alpha = Dp_1 Dp_2 Dp_3 \dots Dp_{2k-2} Dp_{2k-1} p_{2k}$$

admite forma normală:

$$\begin{aligned}
N_3(D) = R^{M'} p_2 p_4 p_6 \dots p_{2k} & \left[\prod_{\mathbf{r}_1^1} A p_2(p_1) \right] \left[\prod_{\mathbf{r}_3^1} A p_4(p_1, p_2, p_3)_2 \prod_{\mathbf{r}_3^2} A^2 p_4(p_1, p_2, p_3)_2 \prod_{\mathbf{r}_3^3} A^3 p_4(p_1, p_2, p_3)_3 \right] \left[\prod_{\mathbf{r}_5^1} A p_6(p_2, p_2, p_3, p_4, p_5)_1 \prod_{\mathbf{r}_5^2} A^2 p_6(p_1, \dots, p_5)_2 \prod_{\mathbf{r}_5^3} A^3 p_6(p_1, \dots, p_5)_3 \right. \\
& \left. \prod_{\mathbf{r}_5^4} A^4 p_6(p_3, \dots, p_5)_4 \prod_{\mathbf{r}_5^5} A^5 p_6(p_1, \dots, p_5)_5 \right] \dots \left[\prod_{\mathbf{r}_{2k-1}^1} A p_{2k}(p_1, p_2, \dots, p_{2k+1})_1 \prod_{\mathbf{r}_{2k-1}^2} A^2 p_{2k}(p_1, p_2, \dots, p_{2k+1})_2 \prod_{\mathbf{r}_{2k-1}^3} A^3 p_{2k}(p_1, p_2, \dots, p_{2k+1})_3 \dots \right. \\
& \left. \dots \prod_{\mathbf{r}_{2k-1}^{2k-1}} A^{2k-1} p_{2k}(p_1, \dots, p_{2k+1})_{2k-1} \right]
\end{aligned}$$

unde:

$$M' = \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^{2j+1} C_{2j+1}^i$$

Teorema se demonstrează utilizând aceeași cale ca în teorema precedentă.

Forma α admite forma normală²:

$$\alpha \sim R^{2k-1} p_1 K p_1 p_2 K^2 p_1 p_2 p_3 \dots K^{2k-1} p_1 p_2 \dots p_{2k} = \omega$$

² Lucrarea [2], p. 7.

Conform teoremei 1, avem:

$$\omega \sim R^{M''} p_1 E^2 (p_1 p_2 A p_1 p_2) \left[E^{\sum_{i=2}^3 C_3^i + 2} p_1 p_2 p_3 \prod_{P_3^2} A(p_1, p_2, p_3)_2 \prod_{P_3^3} A^2(p_1, p_2, p_3)_3 \right] \\ \left[E^{\sum_{i=2}^3 C_4^i + 3} p_1 p_2 p_3 p_4 \prod_{P_4^2} A(p_1, p_2, p_3, p_4)_2 \prod_{P_4^3} A^2(p_1, p_2, p_3, p_4)_3 \prod_{P_4^4} A^3(p_1, p_2, \right. \\ \left. p_3, p_4) \right] \dots E^{\sum_{j=1}^n C_{2k+2k-2}^j} p_1 p_2 p_3 \dots p_{2k-1} p_{2k} \left[\prod_{P_{2k}^2} A(p_1, p_2, \dots, p_{2k}) \prod_{P_{2k}^3} A^2 \right. \\ \left. (p_1, p_2, \dots, p_{2k})_2 \dots \prod_{P_{2k}^{2k}} A^{2k-1}(p_1, p_2, \dots, p_{2k})_{2k} \right]$$

unde

$$M'' = \sum_{j=1}^n (C_{2k}^j + 2k - 1)$$

Grupele de forma

$$\prod_{P_{2k+1}^{2k+1}} A^{i-1}(p_1, p_2, \dots, p_{2k+1})_{2k+1}$$

sînt conținute în număr impar, iar grupele:

$$\prod_{P_{2k}^{2k}} A(p_1, p_2, \dots, p_{2k})_{2k}$$

sînt conținute în număr par. După formulele (I) și (II) și teoremele din $L(E, R)$ rezultă:

$$\omega \sim N_3(D) \quad \text{și deci} \quad \alpha \sim N_3(D)$$

adică teorema 3 este demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

1. Mihăilescu, Eugen, *Sistemul de echivalență, conjuncție și reciprocitate*, „Studii și Cercet. Mat.” 1962.
2. Mihăilescu, Eugen, *Les formes normales dans le calcul bivalent des propositions*, „Acta Logica” nr. 1/1959.

СВОЙСТВА РАЗНОСТИ ЛОГИКИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ВЗАИМНОСТИ И ДИЗЬЮНКТИВНОСТИ

(Резюме)

Система, обоснованная аксиомами $A_1 - A_8$, изучена в работе [1], все теоремы классической логики могут быть выведены из аксиом, хотя система не является полной, допуская множество свободных форм, всех эквивалентных между ними, а наиболее краткими формами являются:

Rpp и Dpp

В этой системе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Если $\alpha = k^{n-1} p_1 p_2 \dots p_n$, то она допускает нормальную форму:

$$N(E, A) = E^{\sum_{i=2}^n C_n^i - 1} p_1 p_2 \dots p_n \prod_{P_n^2} A(p_1, p_2, \dots, p_n)_2 \prod_{P_n^3} A^3(p_1, p_2, \dots, p_n)_3 \dots \prod_{P_n^3} A^{n-1}(p_1, p_2, \dots, p_n)_n.$$

Теорема 2. Если $\alpha = D^{n-1} p_1 p_2 \dots p_n$, то она допускает нормальную форму:

$$N_1(D) = R A^{n-1} p_1 p_2 \dots p_n A^{n-2} p_2 p_3 \dots p_n$$

Теорема 3. Если $\alpha = D_1 D p_2 \dots D p_{2k-1} D p_{2k} p_{2k+1}$, то она является эквивалентной нормальной формы $N_2(D)$ стр 14.

Теорема 4. Если $\alpha = D p_1 D p_2 \dots D p_{2k-2} D p_{2k-1} p_{2k}$, то она допускает нормальную форму $N_3(D)$ стр 16.

LES PROPRIÉTÉS DE LA DIFFÉRENCE DE LA LOGIQUE À L'ÉGARD DE LA RÉCIPROCIÉTÉ ET DE LA DISJONCTION

(R é s u m é)

Dans le système axiomatisé des axiomes A1—A8, étudié dans l'article [2], tous les théorèmes vrais de la logique classique sont déductibles à partir d'axiomes, quoique ce système soit incomplet, admettant une infinité de formes libres, équipollentes entre elles, les formes libres les plus courtes étant:

Reop et *Dpp*

Dans ce système l'auteur a démontré les théorèmes suivants:

Théorème 1. Si $\alpha = K^{n-1} p_1 p_2 \dots p_n$ admet la forme normale:

$$N(E, A) = E^{\sum_{i=1}^n C_n^i - 1} p_1 p_2 \dots p_n A(p_1, p_2, \dots, p_n)_2 A^3(p_1, p_2, \dots, p_n)_3 \dots A^{n-1}(p_1, p_2, \dots, p_n)_n.$$

Théorème 2. Si $\alpha = D^{n-1} p_1 p_2 \dots p_n$, alors α est équipollente à la forme normale:

$$N_1(D) = R A^{n-1} p_1 p_2 \dots p_n A^{n-2} p_2 p_3 \dots p_n.$$

Théorème 3. Si $\alpha = D p_1 D p_2 \dots D p_{2k-1} D p_{2k} p_{2k+1}$, alors α admet la forme normale $N_2(D)$ pag. 14.

Théorème 4. Si $\alpha = D p_1 D p_2 \dots D p_{2k-2} D p_{2k-1} p_{2k}$, alors α admet la forme normale $N_3(D)$ pag. 16

OBSERVAȚIE ASUPRA FORMEI NORMALE A ELEMENTELOR UNUI GRUP

de

I. GY. MAURER și I. VIRĂG

Fie G un grup arbitrar, despre care se presupune, că este generat de o mulțime a subgrupurilor sale proprii $\{G_i; i \in I\}$:

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i, \quad (1)$$

unde I este o mulțime nevidă de indici. (Elementul unitate al lui G se va nota cu e). Numim *nucleul* acestei descompuneri a lui G , divizorul normal

$$N = \bigcap_{i \in I} \overline{G_i^*} \quad (2)$$

al lui G , unde $G_i^* = \bigcup_{i \in I - \{i\}} G_i$ ($i \in I$) și $\overline{G_i^*}$ reprezintă închiderea normală a lui G_i^* în G , deci divizorul normal minimal al lui G , care conține subgrupul G_i^* . Se construiesc grupurile cît G_i/N_i , unde

$$N_i = N \cap G_i \quad (i \in I) \quad (3)$$

și se aleg din clasele, care formează elementele acestor grupuri G_i/N_i ($i \in I$) cîte un reprezentant arbitrar. Se notează cu S_i ($i \in I$) sistemele de reprezentanți astfel alese. Atunci elementele g ale grupului G admit o reprezentare în formă de produs, numită *formă normală* a lui g , care e unică în sensul următoarei teoreme:

Dacă $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ și mulțimea de indici I se poate ordona, atunci orice element $g \in G$ se poate reprezenta în formă normală

$$g = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_n} \cdot u, \quad (4)$$

unde $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, elementele $e \neq s_{i_k} \in S_{i_k}$ ($1 \leq k \leq n$) și $u \in N$. Această reprezentare normală este unică pentru o alegere prealabilă a sistemelor de reprezentanți S_i ($i \in I$) și pentru o ordonare prealabilă a mulțimii I .

Din această teoremă se deduc reprezentările univoce în formă de produs — cunoscute în literatură — ale elementului grupului în caz dacă

G este produsul direct respectiv produsul regulat [1] al subgrupurilor sale G_i ($i \in I$).

Teorema de mai sus constituie o formă mai simplă a unei teoreme enunțate și demonstrate de noi în [2]. Într-adevăr, în locul grupurilor $N_i = N \cap G_i$ respectiv G_i/N_i ($i \in I$) s-au considerat în [2] grupurile $N \cap \bar{G}_i$ respectiv $G_i/N \cap \bar{G}_i$ ($i \in I$). Deoarece $\bar{G}_i \circ \bar{G}_i^{*1} \subseteq \bar{G}_i \cap \bar{G}_i^*$, $\bar{G}_i \cap \bar{G}_i^* \subseteq N$ ($i \in I$) rezultă că

$$G_i = G_i \cup (G_i \circ \bar{G}_i^*) \subseteq G_i \cup (G_i \cap G_i^*) \subseteq G_i \cup N \quad (i \in I)$$

și dec

$$\bar{G}_i \cup N = G_i \cup N \quad (i \in I)$$

Rezultă:

$$\bar{G}_i/N \cap \bar{G}_i \cong \bar{G}_i \cup N/N = G_i \cup N/N \cong G_i/N \cap G_i = G_i/N_i \quad (i \in I)$$

Acest izomorfism ne arată că cele două teoreme au în fond același conținut. Însă construcția formei normale a unui element $g \in G$ este mai simplă după forma prezentă a teoremei.

În cele ce urmează vom da o demonstrație scurtă pentru teorema de mai sus. În cadrul acestei demonstrații ne vom folosi de posibilitatea reprezentării unice în formă de produs a elementelor unui grup, dacă acest grup este direct decompozabil. Observăm că acest raționament diferă complet de raționamentul folosit în [2].

Vom înșira prealabil câteva propoziții, de care ne vom folosi des în cursul demonstrării teoremei. Primele trei se referă la o aplicație omorfă arbitrară φ a lui G pe un grup G' (φ se va folosi ca operator la dreapta).

1°. Dacă A este un subgrup arbitrar al lui G , atunci $\overline{A\varphi} = \overline{A}\varphi$, unde $\overline{A}$ respectiv $\overline{A\varphi}$ înseamnă închiderea normală a lui A în G , respectiv a lui $A\varphi$ în G' .

2°. Dacă A și B sînt două subgrupuri arbitrare ale lui G , atunci $(A \cup B)\varphi = A\varphi \cup B\varphi$. Această proprietate se generalizează ușor pentru o mulțime arbitrară de subgrupuri ale lui G .

3°. Dacă A și B sînt subgrupuri ale lui G și A conține nucleul omomorfismului φ , atunci $(A \cap B)\varphi = A\varphi \cap B\varphi$.

4°. Dacă $G = A \cup B$, unde A și B sînt subgrupuri ale lui G , atunci pentru închiderea normală $\overline{A}$ a lui A avem egalitatea: $\overline{A} = A \cup (\overline{A} \circ B)$. Aici $\overline{A} \circ B$ reprezintă subgrupul lui G , generat de toți comutatorii de forma $a \circ b = a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b$, unde $a \in \overline{A}$, $b \in B$.

Demonstrația propozițiilor de mai sus nu reprezintă dificultate. Pentru a demonstra teorema, ne folosim de următoarea

LEMĂ. Dacă $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ și nucleul unui omomorfism φ al grupului G pe un grup G' este egal cu nucleul N al descompunerii lui G , atunci grupul

¹ Vezi notația la propoziția 4°.

$G' = G\varphi$ este produsul direct al imaginilor omomorfe $G'_i = G_i\varphi$ ale subgrupurilor G_i ($i \in I$):

$$G\varphi = \left(\times_{i \in I} G_i\varphi\right). \quad (5)$$

Demonstrație. În primul rînd trebuie să arătăm, că subgrupurile $G_i\varphi$ ($i \in I$) ale lui $G\varphi$ sînt divizori normali ai lui $G\varphi$. Fie $\overline{G_i\varphi}$ închiderile normale ale lui $G_i\varphi$ ($i \in I$) în $G\varphi$. Ținînd seamă de proprietățile de mai sus, precum și de relațiile $\overline{G_i} \cdot \overline{G_i^*} \subseteq \overline{G_i} \cap \overline{G_i^*} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{G_i^*} = N$ ($i \in I$), deducem pentru orice $i \in I$:

$$\overline{G_i\varphi} = \overline{G_i\varphi} = [G_i \cup (\overline{G_i} \cdot \overline{G_i^*})] \varphi = G_i\varphi \cup (\overline{G_i} \cdot \overline{G_i^*}) \varphi = G_i\varphi \cup \{e'\} = G\varphi^*,$$

ceea ce arată valabilitatea afirmației noastre. (S-a notat cu e' elementul unitate al lui $G\varphi$).

În al doilea rînd arătăm că intersecția oricărui subgrup $G_i\varphi$ cu subgrupul $(G_i\varphi)^* = \bigcup_{i \in I - \{i\}} G_i\varphi$ ($i \in I$) este egal cu e' . Într-adevăr:

$$G_i\varphi \cap (G_i\varphi)^* = \overline{G_i\varphi} \cap (\overline{G_i\varphi})^* = \overline{G_i\varphi} \cap \overline{G_i^*}\varphi = \overline{G_i\varphi} \cap \overline{G_i^*} = (\overline{G_i} \cap \overline{G_i^*}) \varphi = \{e'\}.$$

Deoarece din $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ rezultă evident $G\varphi = \bigcup_{i \in I} G_i\varphi$, lema este demonstrată.

Observăm, că relația (5) se poate scrie și în următoarea formă:

$$G/N = \left(\times_{i \in I} G_i\right)U^N/N \cong \left(\times_{i \in I} G_i\right)U^N \cap G_i = \left(\times_{i \in I} G_i\right)U^N/N_i \quad (5')$$

DEMONSTRAȚIA TEOREMEI. Fie g un element arbitrar al lui G și să notăm cu gN clasa (elementul lui G/N) reprezentată de g . Atunci gN se poate scrie pe baza relațiilor (5') ca un produs finit de elemente din anumite grupuri G_{i_k}/N_{i_k} ($1 \leq k \leq n$) și această reprezentare a lui gN este unică, abstracție făcînd de ordinea factorilor. Dacă deci aceste clase (elemente ale grupurilor $G_{i_k}/N_{i_k} \cong G_{i_k}U^N/N$) se reprezintă prin elementele dinainte alese $s_{i_k} \in S_{i_k}$ ($1 \leq k \leq n$) și factorii produsului se scriu în ordinea dinainte aleasă $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, atunci obținem pentru gN următoarea descompunere univocă:

$$gN = s_{i_1} N \cdot s_{i_2} N \cdot \dots \cdot s_{i_n} N = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_n} N.$$

Rezultă că în acest caz există un element $u \in N$ binedeterminat, astfel ca să avem $g = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_n} \cdot u$, ceea ce era de demonstrat.

BIBLIOGRAFIE

1. O. N. Golovin, Nilpotentnîc proizvedenia grup, Mat. Sbornik, **7** (69), nr. 3, 1950, 427—454.
2. I. G. y. Maurer — I. Virág, Despre o formă normală a elementelor unui grup „Studia Universitatis Babeș-Bolyai”, Mathematica-Physica, 1961.

ОТНОСИТЕЛЬНО НОРМАЛЬНОГО ВИДА ЭЛЕМЕНТОВ НЕКОТОРОЙ ГРУППЫ (Резюме)

Пусть G является произвольной группой, о которой предполагается, что она образована из множества своих собственных подгрупп: $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, где I является непустым множеством показателей. (Элемент единицы G обозначается череч e). Назовём *ядром* этого разложения G нормальный делитель $(2) \ G$, где $G_i^* = \bigcup_{i \in I - \{i\}} G_i$ и G_i^* представляет нормальное включение G_i^* в G . Производится построение групп — частное G_i/N_i , где $N_i = N \cap G_i$ ($i \in I$), и из классов, образующих элементы этих групп, выделяют по одному произвольному представителю.

Через S_i ($i \in I$) обозначаются системы представителей, выделенных таким образом. Тогда элементы $g \in G$ допускают выражение в виде произведения, названное *нормальным видом* g , являющимся единственным в смысле теоремы:

Если $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ и множество показателей I можно расположить, тогда каждый элемент $g \in G$ можно представить в нормальном виде (4), где $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Элементы $e \neq s_{i_k} \in S_{i_k}$ ($1 \leq k \leq n$) и $\bigcup \in N$. Это нормальное выражение является единственным для предварительного выбора систем представителей S_i ($i \in I$) и для предварительного расположения множества I .

Эта теорема, обобщающая важное свойство, известное для разных произведений (прямых, регулярных, и т. п.) представляет более простой вид теоремы, доказанной авторами в [2].

Настоящая работа содержит краткое доказательство теоремы, вывод доказательства полностью отличается от вывода, примененного в [2]. Доказательство основано на следующей лемме:

Если $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ и ядро некоторого гомоморфизма φ группы G на одной группе G' равно ядру N разложения G , то группа $G\varphi = G'$ является прямым произведением гомоморфных изображений $G_i\varphi = G_i\varphi$ подгрупп G_i ($i \in I$): $G\varphi = \left(\prod_{i \in I} G_i\varphi\right)$.

OBSERVATIONS SUR LA FORME NORMALE DES ÉLÉMENTS D'UN GROUPE

(Résumé)

Soit G un groupe arbitraire, que l'on suppose engendré par un ensemble de ses propres sous-groupes G_i ($i \in I$): $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, où I est un ensemble non-vidé d'indices. (L'élément unité de G est noté par e). Nous nommons noyau de cette décomposition de G le diviseur normal (2) de G , où $G_i^* = \bigcup_{i \in I - \{i\}} G_i$ et où G_i^* représente la fermeture normale de G_i^* en G . On construit les groupes tels que G_i/N_i , où $N_i = N \cap G_i$ ($i \in I$) et l'on choisit dans chacune des classes qui forment les éléments de ces groupes, un représentant arbitraire. On note par S_i ($i \in I$) les systèmes de représentation ainsi choisis. Alors les éléments $g \in G$ admettent une représentation en forme de produit, nommée *forme normale* de g , qui est unique dans le sens du théorème:

Si $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ et si l'ensemble d'indices I peut être ordonné, alors tout élément $g \in G$ peut être représenté en forme normale (1), où $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, les éléments $e \neq s_{i_k} \in S_{i_k}$ ($1 \leq k \leq n$) et $\bigcup \in N$. Cette représentation normale est unique pour le cas d'un choix préalable des systèmes de représentants S_i ($i \in I$) et pour ordonner préalablement l'ensemble I .

Ce théorème, qui généralise une propriété importante, connue dans le cas des différents produits (directs, réguliers etc.), constitue une forme plus simple d'un théorème démontré par les auteurs [2].

La présente note contient une brève démonstration du théorème, le raisonnement mis en oeuvre dans la démonstration étant complètement différent du raisonnement employé en [2]. La démonstration est basée sur le *lemme* suivant:

Si $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ et si le noyau d'un homomorphisme φ du groupe G sur un groupe G' est égal au noyau N de la décomposition de G , alors le groupe $G \varphi = G'$ est le produit direct des images homomorphes $G'_i = G_i \varphi$ des sous-groupes G_i ($i \in I$) : $G \varphi = (\times) G_i \varphi$.

DESPRE O TEOREMĂ A LUI L. FEJÉR

de
GH. PIC

1. Într-o lucrare [1] apărută în 1926 L. F e j é r a arătat că, dacă șirul de numere reale $a_0, a_1, \dots, a_n$ este monoton descrescător, adică

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$$

atunci

$$S_n = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) \quad (1)$$

este negativ pentru $-1 \leq x \leq 1$, unde $P_i(x)$ este al i -lea polinom Legendre.

L. F e j é r demonstrează acest rezultat folosindu-se de unul precedent și demonstrat din nou în lucrarea citată și anume că:

$$P_0(x) + P_1(x) + \dots + P_n(x) \geq 0 \quad (2)$$

pentru $-1 \leq x \leq 1$.

Demonstrația utilizează o transformare folosită de A b e l și anume, dacă notăm membrul întâi al inegalității (2) cu s_n și cu σ_n suma

$$s_0 + s_1 + \dots + s_n = \sigma_n$$

atunci

$$P_n(x) = s_n - s_{n-1} = \sigma_n - 2\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}.$$

Înlocuind în (1) deducem că

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-2} (a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2}) \sigma_i + (a_{n-1} - 2a_n) \sigma_{n-1} + a_n \sigma_n.$$

De aici F e j é r ajunge, folosind un raționament identic cu cel folosit pentru polinoamele cosinus, la rezultatul enunțat.

În prezenta lucrare ne propunem să dăm o generalizare a acestui rezultat înlocuind condițiile lui F e j é r cu altele mai slabe și să demonstrăm o propoziție analogă pentru o clasă de polinoame care cuprinde polinoamele Legendre ca un caz particular.

Credem că rezultatul obținut este interesant nu numai datorită generalizărilor obținute ci și prin faptul că constituie și o indicație într-o problemă pusă de P. T u r a n ¹.

2. Să considerăm polinomul $Q_n^{(\alpha)}$ definit precum urmează:

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{2^n(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+1)} \cdot \frac{d^n(1-x^2)^{n+\alpha+1}}{dx^n}$$

unde α este un număr real considerat, deocamdată, ca fiind mai mare decât -1 . În cazul particular că $\alpha = 0$ se obține polinomul lui Legendre. Polinomul $Q_n^{(\alpha)}(x)$ se deosebește de cunoscutul polinom al lui Jacobi $P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$ ² numai printr-un factor numeric și anume

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{n!}{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+1)} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$$

Iată câteva proprietăți ale polinomului $Q_n^{(\alpha)}(x)$:

1. $Q_n^{(\alpha)}(x)$ satisface următoarea relație de recurență:

$$xQ_n^{(\alpha)}(x) = \frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1} Q_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \frac{n}{2n+2\alpha+1} Q_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

2. Prin adaptarea ecuației diferențiale a polinoamelor lui Jacobi³ ajungem la concluzia că $Q_n^{(\alpha)}(x)$ este integrală a ecuației diferențiale:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{\alpha+1} y' \right] + n(n+2\alpha+1)(1-x^2)^{\alpha} y = 0 \quad (4)$$

3. $|Q_n^{(\alpha)}(x)| \leq 1$ pentru $-1 \leq x \leq 1$ și $2\alpha+1 > 0$. Observăm calculînd după regula lui Leibniz $\frac{d^n(1-x^2)^{n+\alpha}}{dx^n}(1+x^{n+\alpha})$ și punînd $x = 1$ resp. $x = -1$

$$Q_n^{(\alpha)}(1) = (-1)^n \quad Q_n^{(\alpha)}(-1) = 1.$$

Să considerăm polinomul $f(x)$ definit în felul următor:

$$n(n+2\alpha+1)f(x) = n(n+2\alpha+1)Q_n^2(x) + (1-x^2)Q_n^{\prime 2}(x).$$

De aici rezultă că $f(x)$ este pozitiv în intervalul $[-1, +1]$.

Prin derivare se deduce că:

$$\begin{aligned} n(n+2\alpha+1)f'(x) &= 2n(n+2\alpha+1)Q_n Q_n' + 2(1-x^2)Q_n' Q_n'' - 2x Q_n^{\prime 2} = \\ &= 2Q_n' [(1-x^2)Q_n'' - 2xQ_n' + n(n+2\alpha+1)Q_n] \end{aligned}$$

¹ Vezi și W. S p e c h t [3] p. 75.

² vezi [4] formula

³ Vezi [4] formula (4,2,1).

și ținând seamă că Q_n este integrală a ecuației (4) obținem:

$$n(n + 2\alpha + 1)f'(x) = 2(2\alpha + 1)x Q_n'^2$$

și deci

$$f'(x) = \frac{2(2\alpha + 1)x}{n(n + 2\alpha + 1)} Q_n'^2(x)$$

Prin urmare dacă $2\alpha + 1 > 0$ atunci $f'(x)$ descrește în intervalul $[-1, 0)$ și crește în intervalul $(0, +1]$. În consecință $f(x)$ va avea cele mai mari valori pentru $x = \pm 1$. Însă prin înlocuire se stabilește că $f(1) = f(-1) = 1$, deci

$$|f(x)| \leq 1 \quad \text{pentru} \quad -1 \leq x \leq 1$$

și de aici afirmația făcută.

3. Să considerăm polinomul $f(x)$ pus sub forma

$$f(x) = a_0 + a_1 Q_1^{(\alpha)}(x) + a_2 Q_2^{(\alpha)}(x) + \dots + a_n Q_n^{(\alpha)}(x) \quad (5)$$

Înmulțind cu $1 - x$ obținem utilizând relația

$$\begin{aligned} (1 - x)f(x) &= a_0 - \frac{1}{3 + 2\alpha} a_1 - \left(\frac{2}{5 + 2\alpha} a_2 - a_1 + a_0 \right) Q_1^{(\alpha)}(x) - \\ &- \left(\frac{3}{7 + 2\alpha} a_3 - a_2 + \frac{2 + 2\alpha}{3 + 2\alpha} a_1 \right) Q_2^{(\alpha)}(x) - \dots - \left(\frac{k + 1}{2k + 2\alpha + 3} a_{k+1} - \right. \\ &- \left. a_k + \frac{k + 2\alpha}{2k + 2\alpha + 1} a_{k-1} \right) Q_k^{(\alpha)}(x) - \\ &- \left(-a_n + \frac{n + 2\alpha}{2n + 2\alpha + 1} a_{n-1} \right) Q_n^{(\alpha)}(x) - \\ &- \frac{n + 2\alpha + 1}{2n + 2\alpha + 1} Q_{n+1}^{(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

În consecință:

$$\begin{aligned} |(1 - x)f(x)| &\geq \left| a_0 - \frac{1}{3 + 2\alpha} a_1 \right| - \left| \left(\frac{2}{5 + 2\alpha} a_2 - a_1 + a_0 \right) Q_1^{(\alpha)}(x) \right| - \\ &- \left| \left(\frac{k + 1}{2k + 2\alpha + 3} a_{k+1} - a_k + \frac{k + 2\alpha}{2k + 2\alpha + 1} a_{k-1} \right) Q_k^{(\alpha)}(x) \right| - \\ &- \dots - \left| \frac{n + 2\alpha + 1}{2n + 2\alpha + 1} Q_{n+1}^{(\alpha)}(x) \right|. \end{aligned}$$

Ținând seamă că pentru $-1 \leq x \leq 1$ $|Q_k^{(\alpha)}(x)| \leq 1$ urmează că, dacă

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 - \frac{1}{3+2\alpha} a_1 \geq 0 \\ \frac{2}{5+2\alpha} a_2 - a_1 + a_0 \geq 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{k+1}{2k+2\alpha+3} a_{k+1} - a_k + \frac{k+2\alpha}{2k+2\alpha-1} a_{k-1} \geq 0 \\ \dots \dots \dots \\ -a_n + \frac{n+2\alpha}{2n+2\alpha-1} a_{n-1} \geq 0 \\ a_n \geq 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

atunci:

$$\begin{aligned} |(1-x)f(x)| &\geq a_0 - \frac{1}{3} a_1 - \left(\frac{2}{5} a_2 - a_1 + a_0 \right) - \dots - \left(\frac{k+1}{2k+3} a_{k+1} - \right. \\ &\quad \left. - a_k + \frac{k}{2k-1} a_{k-1} \right) - \dots - \left(-a_n + \frac{n}{2n-1} a_{n-1} \right) - \frac{n+1}{2n+1} a_n = 0. \end{aligned}$$

Deoarece $1-x$ este pozitiv dacă $-1 \leq x \leq 1$ urmează de aici următorul rezultat:

TEOREMĂ. Dacă numerele $a_0, a_1, \dots, a_n$ satisfac inegalitățile (6) și $2\alpha+1 \geq 0$ atunci polinomul (5) este nenegativ pentru $-1 \leq x \leq 1$.

Să scriem inegalitățile (6) pentru $\alpha=0$, adică în cazul polinoamelor lui Legendre. Obținem:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 - \frac{1}{3} a_1 \geq 0 \\ \frac{2}{5} a_2 - a_1 + a_0 \geq 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{k+1}{2k+3} a_{k+1} - a_k + \frac{k}{2k-1} a_{k-1} \geq 0 \\ \dots \dots \dots \\ -a_n + \frac{n}{2n-1} a_{n-1} \geq 0 \\ a_n \geq 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Înmulțind ultima inegalitate cu $\frac{n+1}{2n+1}$ și adunând la penultima deducem:

$$\frac{1}{2n-1} a_{n-1} \geq \frac{1}{2n+1} a_n$$

Înmulțind ultima cu $\frac{n+1}{2n+1}$ și adunând ultimele trei inegalități (7) deducem:

$$\frac{1}{2n-3} a_{n-2} \geq \frac{1}{2n-1} a_{n-1}$$

Procedînd analog se obține în general

$$a_0 \geq \frac{1}{3} a_1 \geq \frac{1}{5} a_2 \geq \dots \geq \frac{1}{2n-1} a_{n-1} \geq \frac{1}{2n+1} a_n \quad (8)$$

care sînt mai slabe decît inegalitățile din teorema lui Fejér. Mai observăm că inegalitățile (7) sînt mai puțin restrictive decît (8) căci pe cînd din (7) urmează (8) nu rezultă invers că din (8) urmează (7).

În sfîrșit constatăm că prima inegalitate (6) este o consecință a celorlalte căci adunîndu-le obținem prima.

4. Să considerăm acum polinomul $f(x)$ pus sub forma

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n \quad (9)$$

și să încercăm să-l punem sub forma (5). În acest scop ne vom folosi de faptul că polinoamele $Q_n^{(\alpha)}(x)$ formează un șir de polinoame ortogonale deoarece și polinoamele lui Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ se bucură de această proprietate.

Să notăm cu $I_{n,m}$ integrala:

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha x^n Q_m^{(\alpha)}(x) dx$$

Vom avea:

$$a_k \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha [Q_k^{(\alpha)}(x)]^2 dx = I_{k,k} b_k + I_{k+2,k} b_{k+2} + I_{k+4,k} b_{k+4} + \dots \quad (10)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2\left[\frac{n}{2}\right]$$

Pentru a calcula efectiv pe $I_{n,m}$ vom proceda precum urmează: Ținînd seamă că $Q_m^{(\alpha)}(x)$ este integrală a ecuației (4), deducem:

$$\begin{aligned} m(m+2\alpha+1)I_{n,m} &= - \int_{-1}^{+1} x^n \frac{d}{dx} [(1-x^2)^{\alpha+1} Q_m'(x)] dx = \\ &= - x^n (1-x^2)^{\alpha+1} \Big|_{-1}^{+1} + n \int_{-1}^{+1} x^{n-1} (1-x^2)^{\alpha+1} Q_m'(x) dx = \\ &= nx^{n-1} (1-x^2)^{\alpha+1} Q_m'(x) \Big|_{-1}^{+1} - n \int_{-1}^{+1} [x^{n-1} (1-x^2)^{\alpha+1}]' Q_m(x) dx = \\ &= - n \int_{-1}^{+1} [(n-1)x^{n-2} (1-x^2)^{\alpha+1} - 2(\alpha+1)x^n (1-x^2)^\alpha] Q_m(x) dx = \\ &= -n(n-1)I_{n-2,m} + n(n+2\alpha+1)I_{n,m} \end{aligned}$$

De aici:

$$I_{n,m} = \frac{n(n-1)}{(n-m)(n+m+2\alpha+1)} I_{n-2,m}$$

și prin aplicarea repetată a acestei formule:

$$I_{n,m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(m+1)}{(n-m)(n-m-2)\dots 2(n+m+2\alpha+1)(n+m+2\alpha-1)\dots (2m+2\alpha+3)} I_{m,m}$$

dacă $n-m > 0$ este un număr par. Dacă $n-m > 0$ este un număr impar atunci $I_{m,m} = 0$.

Pentru a calcula $I_{m,m}$ folosim o formulă cunoscută și anume⁴:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2) [P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)]^2 dx = \frac{2^{2\alpha+1}}{2n+2\alpha+1} \cdot \frac{\Gamma^2(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}$$

Ținând seamă de factorul numeric care deosebește pe $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ de $Q_n^{(\alpha)}(x)$ obținem:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2) [Q_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx = \frac{2^{2\alpha+1}}{2n+2\alpha+1} \cdot \frac{\Gamma^2(\alpha+1)n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)} \quad (11)$$

Deci, notînd cu A_n coeficientul lui x^n în expresia lui $Q_n^{(\alpha)}(x)$ vom avea:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^x x^n Q_n^{(\alpha)}(x) dx = \frac{2^{2\alpha+1}}{2n+2\alpha+1} \cdot \frac{\Gamma^2(\alpha+1)n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)} \frac{1}{A_n}.$$

Să calculăm efectiv pe A_n . Se știe⁵ că $P_n^{(\alpha,\alpha)}$ poate fi exprimat ca și funcție ipergeometrică. Avem:

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} F\left(-n, n+2\alpha+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right)$$

Deci coeficientul lui x^n în expresia lui $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ este egal cu:

$$\frac{1}{2^n n!} (n+2\alpha+1)(n+2\alpha+2) \dots (n+2\alpha)$$

⁴ Vezi [4] formula (4, 3, 3).

⁵ Vezi [4] formula (4, 21, 2).

și prin urmare:

$$A_n = \frac{1}{2^n} \frac{(n+2\alpha+1)(n+2\alpha+2) \dots (2n-2\alpha)}{(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+n)}$$

și deci

$$I_{n,n} = 2^{n+2\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+n+1)n!}{\Gamma(2n+2\alpha+2)}$$

și

$$I_{n,m} = 2^{m+2\alpha+1} \frac{n! \Gamma(\alpha+1) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{m}{2} + \alpha + 1\right)}{\left(\frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right)! \Gamma(n+m+2\alpha+2)}.$$

Aceste rezultate ne permit să scriem egalitățile (10) precum urmează:

$$\begin{aligned} \frac{2^{2\alpha+1}}{2k+2\alpha+1} \frac{k!}{\Gamma(k+2\alpha+1)} \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{a_k} &= 2^{k+2\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(k+k+1)k!}{\Gamma(2k+2\alpha+2)} b_k + \\ &+ 2^{k+2\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+k+2)(k+2)!}{1! \Gamma(2k+2\alpha+4)} b_{k+2k} + \dots \\ &+ 2^{k+2\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+k+k+1)(k+2h)!}{h! \Gamma(2\alpha+2k+2h+2)} b_{k+2k} + \dots \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+2\alpha+1} a_k &= 2^k \left[\frac{(\alpha+k)(\alpha+k-1) \dots (\alpha+1)}{(2\alpha+2k+1)(2\alpha+2k) \dots (2\alpha+k+1)} b_k + \dots \right. \\ &+ \frac{(\alpha+k+1)(\alpha+k) \dots (\alpha+1)(k+2)!}{(2\alpha+2k+3)(2\alpha+2k+2) \dots (2k+k+1)k!} b_{k+2} + \dots + \\ &\left. + \frac{(\alpha+k+1)(\alpha+k) \dots (\alpha+1)(k+2)!}{(2\alpha+2k+3)(2\alpha+2k+2) \dots (2\alpha+k+1)k!} b_{k+2k} + \dots \right] \end{aligned}$$

și inegalitățile (6) devin:

$$\left\{ \begin{aligned} &k!(b_{k-1} - b_k) + \frac{\alpha+k+1}{(2\alpha+2k+2)(2\alpha+2k+3)} \cdot \frac{(k+2)!}{1!} (b_{k+1} - b_{k+2}) + \dots + \\ &+ \frac{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2) \dots (\alpha+k+h)(k+2h)!}{(2\alpha+2k+2)(2\alpha+2k+3) \dots (2\alpha+2k+2h+1)h!} (b_{k+2h-1} - b_{k+2h}) + \dots \geq 0 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

($k = 1, 2, \dots, n$).

Rezultatul obținut ne arată că inegalitățile (6) constituie o generalizare a celor date de K a k e y a [2] pentru ca un polinom să nu aibă rădăcini reale între -1 și $+1$. După cum ne arată (12) inegalitățile lui K a k e y a se obțin în cazul limită $\alpha = \infty$.

Inegalitățile (12) se mai pot scrie:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{k!}{\Gamma\left(x + k + \frac{3}{2}\right)} (b_{k-1} - b_k) + \frac{1}{2^2 \Gamma\left(x + k + \frac{5}{2}\right)} \cdot \frac{(k-2)!}{1!} (b_{k-1} - b_{k-2}) + \dots + \\ & + \frac{1}{2^{2k} \Gamma\left(x + k + k + \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{(k-2k)!}{k!} (b_{k-2k-1} - b_{k-2k}) + \dots > 0 \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$(k = 1, 2, \dots, n+1).$

5. Rezolvînd inegalitățile (12) sau (13) vom obține forma generală a unor polinoame care nu au rădăcini cuprinse între -1 și $+1$. În acest scop ne vom folosi de procedeul indicat de H a a r [5] pentru a reprezenta sub formă parametrică soluțiile unui sistem de inegalități atunci cînd acesta este omogen. Aplicarea acestuia este simplă pentru că o soluție a sistemului (12) de inegalități luate în sens strict este imediată și anume:

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 1 \quad \text{și} \quad b_n = 1 - \varepsilon \quad \text{unde} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Rezolvarea este ușoară și de faptul că avem $n+1$ inegalități care fiecare determină conform teoriei lui H a a r un punct $P_k (k = 1, 2, \dots, n+1)$ și că aceste puncte sînt firește situate într-un iperplan al spațiului euclidian $(n+1)$ -dimensional în care formează un corp convex C_{n+1} . Va trebui să scriem ecuațiile fețelor conului definit de vîrfurile 0 și de C_{n+1} . Ecuațiile fețelor trebuie astfel scrise ca rezultatul înlocuirii coordonatelor punctului $Q(1, 1, \dots, 1, 1 - \varepsilon)$ să ne conducă la un număr pozitiv. Ecuațiile acestor plane se obțin egalînd cu zero determinantul care se construiește cu elementele matricei avînd $n+1$ linii și $n+1$ coloane

$$\begin{pmatrix} \frac{1!}{\Gamma\left(x + \frac{5}{2}\right)} & -\frac{1!}{\Gamma\left(x + \frac{5}{2}\right)} & \frac{1}{2^2 \Gamma\left(x + \frac{7}{2}\right)} \frac{3!}{1!} & -\frac{1}{2^2 \Gamma\left(x + \frac{7}{2}\right)} \frac{3!}{1!} & \dots & 1 \\ 0 & \frac{2!}{\Gamma\left(x + \frac{7}{2}\right)} & -\frac{2!}{\Gamma\left(x + \frac{7}{2}\right)} & \frac{1}{2^2 \Gamma\left(x + \frac{9}{2}\right)} \frac{4!}{1!} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3!}{\Gamma\left(x + \frac{9}{2}\right)} & -\frac{3!}{\Gamma\left(x + \frac{9}{2}\right)} & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

și în care rînd pe rînd am înlocuit o linie cu una formată numai din zero-uri afară de ultimul element care este egal cu 1. În felul acesta ajungem la ecuațiile:

$$x_1 = 0; \begin{vmatrix} \frac{1!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{5}{2}\right)} & -\frac{1!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{5}{2}\right)} \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} \frac{1!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{5}{2}\right)} & -\frac{1!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{5}{2}\right)} & \frac{1}{2^2\Gamma\left(\alpha + \frac{7}{2}\right)} \frac{3!}{1!} \\ 0 & \frac{2!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{7}{2}\right)} & -\frac{2!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{7}{2}\right)} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\Gamma\left(\alpha + \frac{5}{2}\right)} & -\frac{1}{\Gamma\left(\alpha + \frac{5}{2}\right)} & \frac{1}{2^2\Gamma\left(\alpha + \frac{7}{2}\right)} \frac{3!}{1!} & \dots & \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]}} \frac{\left(1 + 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)!}{\left[\frac{n-1}{2}\right]!} \\ 0 & \frac{2!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{7}{2}\right)} & -\frac{2!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{7}{2}\right)} & \dots & \frac{(-1)^{n-2}}{2^{2\left[\frac{n-2}{2}\right]}} \frac{\left(2 + 2\left[\frac{n-2}{2}\right]\right)!}{\left[\frac{n-2}{2}\right]!} \\ 0 & 0 & \frac{3!}{\Gamma\left(\alpha + \frac{9}{2}\right)} & \dots & \frac{(-1)^{n-3}}{2^{2\left[\frac{n-3}{2}\right]}} \frac{\left(3 + 2\left[\frac{n-3}{2}\right]\right)!}{\left[\frac{n-3}{2}\right]!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]}} \frac{\left(n + 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)!}{\left[\frac{n-1}{2}\right]!} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} = 0$$

Se verifică direct că rezultatul înlocuirii coordonatelor lui Q ne dă un număr pozitiv.

Pentru a scrie efectiv expresia coeficienților b_i vom considera matricea A_n formată din elementele primelor $n - 1$ linii ale ultimului determinant scris. Fie A_n^k determinantul care se formează cu elementele matricei A_n

BIBLIOGRAFIE

1. L. Fejér, *Über die Positivität von Summen die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten*. „Acta Szeged” II, pp. 75–86.
2. S. Kakeya, *On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients*. „Tokohu Math. J.” 2 pp. 140–142.
3. W. Specht, *Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten*. „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften”, vol 11, Heft 3, Teil II.
4. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*. „Amer. Math. Soc. Coll. Publ.” XXIII.
5. A. Haar, *Über lineare Ungleichungen*. „Acta Szeged” 2 pp. 1–14.

О ТЕОРЕМЕ Л. ФЕЙЕРА

(Резюме)

Доказывается, что вывод, полученный Л. Фейером [1] относительно того, что сумма

$$S_n = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x),$$

где $P_n(x)$ есть n -ый многочлен Лежандра, является ненегативной для $-1 \leq x \leq 1$, если:

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$$

можно обобщить.

Доказывается, что сумма

$$S_n = a_0 Q_0^{(\alpha)}(x) + a_1 Q_1^{(\alpha)}(x) + \dots + a_n Q_n^{(\alpha)}(x)$$

где $Q_n^{(\alpha)}$ является многочленом

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^\alpha} \cdot \frac{1}{2^n(n-1)(n+1)} \cdot \frac{d^n(1-x^2)^{n+1}}{dx^n}$$

отличающимся от многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \alpha)}$ только лишь числовым множителем, является ненегативной для $-1 \leq x \leq 1$ если удовлетворены неравенства:

$$a_0 - \frac{1}{3+2\alpha} a_1 \geq 0$$

$$\frac{2}{5+2\alpha} a_2 - a_1 + a_0 \geq 0$$

$$\frac{k+1}{2k+2\alpha+3} a_{k+1} - a_k + \frac{k+2\alpha}{2k+2\alpha-1} a_{k-1} \geq 0$$

$$-a_n + \frac{n+2\alpha}{2n-1} a_{n-1} \geq 0$$

В случае $\alpha=0$, многочлен $Q_n^{(\alpha)}$ становится многочленом Лежандра $P_n(x)$, а означенные выше неравенства имеют, как и следствие:

$$a_0 \geq \frac{1}{3} a_1 \geq \frac{1}{5} a_2 \geq \dots \geq \frac{1}{2n-1} a_{n-1} \geq a_n$$

что доказывает, что они являются более общими, чем неравенства теоремы Фейера.

Затем полученный результат применяется к многочлену

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

Выразив его с помощью многочленов $Q_n^{(x)}$ и применяя затем полученный раньше результат, выводят, что многочлен $f(x)$ не имеет действительных корней в пределах -1 и $+1$, если удовлетворяются неравенства:

$$k! (b_{k-1} - b_k) + \frac{\alpha + k + 1}{(2! + 2k + 2)} \frac{(k + 2)!}{(2! + 2k + 3)} \frac{(k + 2)!}{1} (b_{k+1} - b_{k+2}) + \dots +$$

$$+ \frac{(\alpha + k + 1)(\alpha + k + 2) \dots (\alpha + k + h)}{(2\alpha + 2k + 2)(2\alpha + 2k + 3) \dots (2\alpha + 2k + 2h + 1)} \frac{(k + 2h)!}{h} (b_{k+2h-1} - b_{k+2h}) + \dots \geq 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

Если $\alpha \rightarrow \infty$, то эти неравенства становятся известными неравенствами Какейя. Наконец, при помощи метода, данного Гааром, решаются вышеозначенные неравенства и, таким образом, выводится выражение для общего класса многочленов, имеющих действительных корней в пределах -1 и $+1$.

SUR UN THÉORÈME DE L. FEJÉR

(R é s u m é)

On donne une généralisation du résultat suivant de L. Fejér [1]: la somme

$$S_n = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x)$$

où $P_n(x)$ représente le n -me polynôme de Legendre, est non-négative pour $-1 \leq x \leq 1$ lorsque $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$. L'auteur montre que la somme

$$S_n = a_0 Q_0^{(\alpha)}(x) + a_1 Q_1^{(\alpha)}(x) + \dots + a_n Q_n^{(\alpha)}(x)$$

avec

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^\alpha} \cdot \frac{1}{2^n(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+1)} \cdot \frac{d^n(1-x^2)^{n+\alpha}}{dx^n}$$

polynôme qui diffère du polynôme $P_n^{(\alpha, \alpha)}$ de Jacobi par un facteur numérique, est non-négative pour $-1 \leq x \leq 1$ si

$$a_0 - \frac{1}{3+2\alpha} a_1 \geq 0$$

$$\frac{2}{5+2\alpha} a_2 - a_1 + a_0 \geq 0$$

$$\frac{k-1}{2k+2\alpha+3} a_{k+1} - a_k + \frac{k-2\alpha}{2k+2\alpha-1} a_{k+1} \geq 0$$

$$-a_n + \frac{n-2\alpha}{2n-2\alpha-1} a_{n-1} \geq 0$$

$$a_n \geq 0$$

Pour $\alpha=0$ le polynôme $Q_n^{(\alpha)}(x)$ se réduit au polynôme de Legendre $P_n(x)$ et les inégalités précédemment écrites impliquent

$$a_0 \geq \frac{1}{3} a_2 \geq \frac{1}{5} a_4 \geq \dots \geq \frac{1}{2n-2} a_{n-1} \geq a_n$$

qui sont plus larges que celles imposées par Fejér.

On applique ce résultat au polynôme $f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ que l'on exprime linéairement à l'aide des $Q_n^{(\alpha)}(x)$, et l'on en déduit que $(f(x))$ n'a pas de racine réelle dans $[-1, +1]$ lorsque les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$k!(b_{k-1} - b_k) + \frac{\alpha + k + 1}{(2\alpha + 2k + 2)(2\alpha + 2k + 3)} \cdot \frac{(k + 2)!}{1!} (b_{k+1} - b_{k+2}) + \dots +$$

$$+ \frac{(\alpha + k + 1)(\alpha + k + 2) \dots (\alpha + k + h)}{(2\alpha + 2k + 2)(2\alpha + 2k + 3) \dots (2\alpha + 2k + 2h + 1)} \cdot \frac{(k + 2h)!}{h!} (b_{k+2h-1} - b_{k+2h}) + \dots \geq 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

Pour $\alpha \rightarrow \infty$ ces inégalités coïncident avec celles, bien connues, de Kakeya. Les inégalités précédentes sont enfin résolues par une méthode de Haar, et l'on arrive à une expression donnant une classe générale de polynômes dépourvus de racines dans $[-1, +1]$.

O TEOREMĂ ASUPRA TRAVERSĂRILOR UNUI NOD

de

G. CĂLUGĂREANU

În cele ce urmează, înțelegem prin nod un contur poligonal închis K , simplu, orientat, cu un număr finit de laturi. Se definește echivalența (sau izotopia) a două noduri cu ajutorul operațiilor Δ și Δ' ([1], p. 4): AB fiind o latură a lui K , iar ABC un triunghi care nu are în comun cu K decât punctele laturii AB , operația Δ constă în înlocuirea laturii AB prin conturul ACB ; Δ' este operația inversă. Cele două operații pot fi confundate într-una singură, în modul următor: ABC fiind un triunghi orientat care are în comun cu K una sau două laturi, și este așezat așa încât orientările laturilor comune să fie opuse pe K și ABC , vom numi „adunare” a triunghiului orientat ABC la conturul K operația care constă în suprimarea laturii sau laturilor comune, lăsând să subziste restul lui K și al frontierei triunghiului, cu orientările lor. Vom continua să notăm cu Δ această operație. Două noduri K și K' sînt izotope dacă aplicînd operația Δ un număr finit de ori unuia din noduri putem obține pe celălalt. Toate nodurile izotope cu K formează tipul (sau clasa de izotopie) a lui K . Condiția pusă triunghiului ABC , de a avea în comun cu K numai una sau două laturi, este desigur esențială, și corespunde unei deformări izotope a nodului, adică unei deformări în timpul căreia nodul nu se traversează el însuși. Dar, renunțînd la această restricție, se definește, printr-o construcție analogă aceleia care definește operația Δ , o deformare neizotopă a lui K , deformare care își are interesul său.

Să numim *traversare* deformarea lui K ce rezultă din K prin adunarea la K a unui triunghi ABC care, în afară de latura comună, sau de laturile comune, are încă un singur punct comun cu K , acest punct fiind interior triunghiului ABC și unei laturi a lui K . Fie K' nodul astfel obținut. O astfel de traversare, nefiind o deformare izotopă, poate fi însoțită de o schimbare a clasei de izotopie a nodului inițial, și în acest caz vom spune că traversarea este *esențială*. Dar e posibil ca o traversare să fie *inesențială*, clasa de izotopie rămînînd neschimbată; putem imagina cu ușurință deformări de această natură, pentru un nod oarecare. Teorema pe care o dăm aci ne permite să caracterizăm, din acest punct de vedere, traversările unui nod K . Enunțul teoremei face apel la descompunerea unui nod în

produs de factori, dată de H. S c h u b e r t [2], pe care credem util să o reamintim: S_2 fiind o sferă bidimensională (suprafață poliedrală închisă, fără puncte multiple, de gen zero), se numește „coardă“ a sferei S_2 un contur poligonal simplu care are în comun cu S_2 numai cele două extremități ale sale. O astfel de coardă poate fi plasată în interiorul sau în exteriorul sferei S_2 . K fiind un nod, și S_2 o sferă care taie K numai în două puncte, K este astfel descompus în două corzi ale sferei S_2 , fie ele u_1 și u_2 , situate de cele două părți ale sferei și avînd extremitățile lor A și B în comun. Să unim A cu B printr-un contur poligonal simplu v , situat pe S_2 . Atunci $u + v$ și $u - v$, cu o orientare convenabilă a lui v , formează două noduri pe care sfera S_2 le separă întrucîtva, și, după terminologia lui H. S c h u b e r t, K se numește „produsul“ acestor două noduri. (Termenul de „sumă“ a celor două noduri poate de asemenea să fie acceptat, cu atît mai mult cu cît operația în chestiune este comutativă; adunarea unui triunghi la un nod e un caz particular al acestei operații). Enunțul teoremei noastre este următorul:

Fie T o traversare a nodului K , rezultînd din adunarea la K a unui triunghi $ABC = \Sigma_1$, pe care latura EF a lui K îl traversează în punctul $\omega \cdot K'$ fiind nodul astfel deformat, vom presupune $K \cap \Sigma_1 = AB$, $K' \cap \Sigma_1 = AC + CB$. Condiția necesară și suficientă pentru ca T să fie o traversare inesențială a nodului K este ca acest nod să se descompună în produsul a două noduri avînd în comun segmentul $C'\omega$, C' fiind intersecția lui $C\omega$ cu AB .

Vom stabili mai întîi suficiența condiției. Să admitem deci că există o sferă σ care conține segmentul $C'\omega$ și separă contururile $C'B$. $F\omega$ și $C'A \dots E\omega$. Această sferă separă A de B , deci taie conturul ACB , dar nu întîlnește AB decît în punctul C' . O mică deplasare a vîrfurilor sferei σ ne permite să facem astfel ca punctele de intersecție ale conturului ACB cu σ să fie interioare unor fețe ale acestei sfere, și atunci numărul acestor puncte va fi finit și impar. Dacă acest număr este > 1 , putem modifica suprafața σ în vecinătatea triunghiului (plin) ABC astfel ca aceasta să întîlnească conturul ACB într-un singur punct α . Astfel, dacă urma sferei σ pe planul ABC conține arcul $\omega\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ care taie BC în punctele $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ e suficient să scoatem din interiorul (resp. exteriorul) sferei σ niște vecinătăți convenabile ale ariilor delimitate în ABC de arcele $\beta\gamma, \gamma\delta, \dots$. După această modificare, σ va întîlni conturul ACB într-un singur punct α . De altfel, se vede că nodul $\omega\alpha B \dots F\omega$ rezultă din $\omega C'B \dots F\omega$ prin operații Δ aplicate în interiorul triunghiului ABC , și, tot astfel, $\omega\alpha CA \dots E\omega$ rezultă din $\omega C'A \dots F\omega$ prin astfel de operații. Astfel, $\omega\alpha B \dots F\omega$ este izotop cu $\omega C'B \dots F\omega$, și $\omega\alpha CA \dots E\omega$ cu $\omega C' \dots E\omega$. Atunci, K și K' fiind produse de noduri respectiv izotope, sînt izotope unul celuilalt, și traversarea e inesențială.

Pentru a arăta că condiția din enunț e și necesară, să presupunem că, traversarea fiind inesențială, K și K' sînt izotope. Dar, K și K' avînd în comun conturul $K - AB$, o teoremă a lui H. S c h u b e r t ([2], p. 15, Hilfssatz 6) ne permite să afirmăm că există o deformare izotopă a lui K în K' în timpul căreia conturul $K - AB$ rămîne fix. Enunțul acestei teoreme e următorul: Σ fiind o sferă, iar u_1, u_2 fiind două corzi ale acesteia situate ambele în interior (sau exterior), avînd extremitățile în comun și definind

noduri izotope (dacă unim aceste extremități cu un arc simplu situat pe Σ) există o homeomorfie semiliniară a spațiului pe el însuși care aplică u_1 pe u_2 și care se reduce la identitate pe Σ și în exteriorul (sau interiorul) său. Să construim o sferă Σ alungită și foarte subțire, în vecinătatea conturului $K - AB = A \dots EF \dots B$, astfel încît acest contur să fie trasat pe Σ iar Σ să nu întâlnească laturile triunghiului ABC decît în punctele A și B . Atunci AB și ACB sînt două corzi ale lui Σ , situate în exteriorul său, avînd extremități comune, iar nodurile pe care ele le definesc împreună cu arcul $K - AB$, trasat pe Σ , sînt izotope prin ipoteză. Există deci o homeomorfie semiliniară h a exteriorului lui Σ , fie acesta Σ_e , asupra lui însuși, care transformă AB în ACB lăsînd fix arcul $K - AB$. Atunci există și o deformare continuă a lui Σ_e în el însuși care aduce AB pe ACB . În adevăr, să aplicăm Σ_e pe interiorul unui simplex tridimensional τ printr-o homeomorfie semiliniară H . Imaginile $A^*C^*B^*$ și $A^*C'^*B^*$ ale lui ACB și $AC'B$ prin H vor fi corzi interioare ale lui τ , și $H^{-1}hH$ este o homeomorfie a interiorului simplexului pe el însuși, care aplică $A^*C^*B^*$ pe $A^*C'^*B^*$. Convexitatea simplexului ne permite să definim o deformare care are același efect, punînd

$$M^*M_t^* = t \cdot M^*M'^*, \quad t \in [0,1] = I, \quad M'^* = H^{-1}hH(M^*)$$

unde M^* e un punct oarecare al simplexului iar M_t^* transformatul său. Notînd această deformare cu f_t , $H^{-1}f_tH$ este o deformare a lui Σ_e în el însuși, care aduce $AC'B$ pe ACB . Este o aplicație $\varphi: \Sigma_e \times I \rightarrow \Sigma_e$ care e simplicială pe o anumită subdiviziune a lui $\Sigma_e \times I$. Imaginea $\varphi(AB)$ este o suprafață poliedrală avînd ca bord triunghiul ABC . Această suprafață, generată de un contur poligonal care se deformează continuu, extremitățile sale rămînînd fixe, este un element de suprafață cu singularități, adică imaginea unui triunghi printr-o aplicație continuă. Această suprafață Φ poate prezenta puncte multiple a căror așezare pe Φ a făcut obiectul unor cercetări care pornesc dela o lucrare a lui Dehn [3]; cercetări ulterioare au condus la demonstrarea lemei lui Dehn de către C. D. Papakyriakopoulos [4]. Suprafața Φ putînd să întâlnească aria triunghiului ABC , dar fără a atinge sfera Σ , se poate trasa în planul ABC un cerc γ cu centrul ω și de rază destul de mică, astfel ca Φ să nu aibă nici un punct situat pe acest cerc sau în interiorul său. Adăugînd la Φ domeniul interior triunghiului ABC și exterior acestui cerc γ , se obține un element de suprafață al cărui bord este γ , și care nu are singularități pe bord. Lema lui Dehn arată atunci că acest element de suprafață poate fi modificat așa încît să obținem un element de suprafață Φ' fără nici o singularitate, avînd bordul γ , și situat în Σ_e . Adăugînd la Φ' și discul (γ) , obținem o sferă σ care nu întâlnește $K - AB$ decît în punctul ω , și care taie AB , deoarece K e un contur închis. Prin modificări deja utilizate mai sus putem face astfel ca σ să taie AB într-un singur punct, apoi să modificăm σ astfel ca ea să conțină segmentul $C'\omega$. Așadar nodul K este produsul, în sensul lui Schubert, a două noduri care au în comun segmentul $C'\omega$.

Să numim *traversare periferică* o traversare inesențială astfel încît descompunerea corespunzătoare a lui K în produs să fie banală, adică unul din factorii produsului să fie un cerc. Atunci:

Дacă K este un nod prim, singurele traversări inesențiale pe care le admite sînt traversări periferice.

Astfel, deoarece în tabela de noduri Alexander-Briggs [1], pp. 70—72) figurează numai noduri prime, iar numărul punctelor duble în proiecție este redus la minimum, orice inversiune a ramurilor într-un punct dublu (înlocuirea unei treceri deasupra .. printr-o trecere dedesubtul lui ..) corespunde unei traversări esențiale a nodului. Nodul care rezultă prin o astfel de traversare va avea același număr de puncte duble în proiecție dar este susceptibil de a fi simplificat prin deformări izotope astfel ca acest număr să scadă. Se pare că, în general, orice traversare de această natură aduce nodul într-o clasă cu un număr mai mic de puncte duble în proiecție, dar aceasta nu este încă demonstrat. Teorema enunțată în această lucrare poate fi utilă în vederea formării invariantilor de izotopie ([5], p. 607) exprimabili prin funcții de linie atașate nodului K . În adevăr, un astfel de invariant trebuie să rămînă constant atunci cînd K suferă o traversare inesențială, și trebuie să facă un salt pentru orice traversare esențială.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Reidemeister, *Knotentheorie*. Springer, Berlin, 1932.
2. H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten*, „Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss.," 1949.
3. M. Dehn, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*, „Mathematische Annalen", **69**, 1910, pp. 137—168.
4. C. D. Papakyriakopoulos, *Some problems on 3-dimensional manifolds*, „Bull. of the American Math. Society," **64**, 1958, pp. 317—335.
5. G. Călugăreanu, *Sur les classes d'isotopie des noeuds tridimensionnels et leurs invariants*, „Czechoslovak Mathematical Journal", 11, 1961, pp. 588—625.

ТЕОРЕМА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ УЗЛА

(Резюме)

В этой работе под узлом подразумевается простой замкнутый многоугольный направленный контур K с конечным числом сторон, в евклидовом трёхразмерном пространстве. Равнозначность или изотопия двух узлов была определена К. Рейдемейстером с помощью действий Δ и Δ' . Здесь пересечение узла определяется следующим образом: AB является стороной узла K , а ABC — треугольником, имеющим единственную общую с узлом K точку ω , кроме стороны AB , а ω являясь внутренней точкой треугольника и внутренней точкой некоторой стороны узла K , замена стороны AB контуром ABC называется пересечением узла K . Вследствие одного из таких пересечений класс изотопии узла K может измениться и, в этом случае, пересечение является *эссенциальным*, а когда класс изотопии остаётся без изменений, пересечение называется *инэссенциальным*. В работе даётся необходимое и достаточное условие для того, чтобы пересечение было бы инэссенциальным. Для этого необходимо и достаточно, чтобы узел K был бы разложен на произведение двух узлов, в значении Г. Шуберта, имеющих совместно отрезок $C'\omega$, где C' есть точка пересечения прямой $C\omega$ со стороной AB . При доказательстве используется лемма Дена, а также некоторые теоремы, выведенные Греубом и Шубертом. Дётся определение *периферийных* пересечений и доказывается, что простой узел допускает инэссенциальными пересечениями только периферийные пересечения.

UN THÉORÈME SUR LES TRAVERSÉES D'UN NOEUD

(R é s u m é)

Dans ce travail, on entend par noeud un contour polygonal fermé K , simple, orienté, à un nombre fini de côtés, situé dans l'espace euclidien tridimensionnel. L'équivalence ou isotopie de deux noeuds a été définie par K. Reidemeister à l'aide des opérations Δ et Δ' . On définit ici le terme „traversée” d'un noeud, de la manière suivante: AB étant un côté du noeud K , et ABC un triangle qui a un seul point ω en commun avec K , en dehors du côté AB , où ω est un point intérieur du triangle et un point intérieur d'un côté de K , on appelle traversée du noeud K l'opération qui consiste à remplacer le côté AB par le contour ACB . Par suite d'une telle traversée, la classe d'isotopie du noeud K peut changer, et dans ce cas la traversée est appelée *essentielle*, tandis que si la classe d'isotopie reste inchangée la traversée est appelée *inessentielle*. Le théorème donné dans le travail constitue une condition nécessaire et suffisante pour qu'une traversée soit inessentielle: il est nécessaire et suffisant, pour cela, que le noeud K se décompose en produit de deux noeuds, au sens de H. Schubert. La démonstration utilise le lemme de Dehn, ainsi que certains théorèmes de Greub et Schubert. On définit les traversées *périphériques*, et l'on établit que les noeuds premiers n'admettent, comme traversées inessentielles, que des traversées périphériques.

ASUPRA VARIETĂȚILOR NEOLONOME TIȚEICA

de

GH. TH. GHEORGHIU (Timișoara)

Într-o lucrare anterioară [1] am introdus două clase de varietăți neolonome de-a lungul cărora unul din rapoartele $K_1: d^4$ sau $K_2: d^4$ este constant, K_1 și K_2 fiind cele două curburi totale neolonome ale varietății. Grație asemănării dintre definiția acestor varietăți și suprafețele *Țițeica* [7;8, p. 128] am crezut de cuviință că este logic să numim aceste varietăți, *varietăți neolonome Țițeica* și ne întrebăm dacă aceste varietăți sînt totuna cu varietățile *Țițeica-Wilczynski* pe care le-a introdus *Tib. Mihăilescu* într-o lucrare anterioară [4;5, p. 481] pe altă cale.

De curînd [3] m-am ocupat în special cu o clasificare a varietăților neolonome *Țițeica* dublu riglate arătînd că în general plecînd de la o proprietate caracteristică a suprafețelor *Țițeica*, se poate introduce o clasă de varietăți neolonome și care în general să difere de la una la alta. Am propus cu această ocazie următoarea clasificare:

a) Varietăți (T_1) de-a lungul cărora raportul $K_1: d^4$ este constant, K_1 fiind prima curbură totală a varietății iar d distanța de la origină la planul tangent.

b) Varietăți (T_2) de-a lungul cărora raportul $K_2: d^4$ să fie constant, K_2 fiind a doua curbură totală a variației iar d aceeași semnificație ca mai sus.

c) Varietăți (T_3) de-a lungul cărora normala afină trece printr-un punct fix.

d) Varietăți (T_4) de-a lungul cărora prima normală proiectivă trece printr-un punct fix.

e) Varietăți (T_5) de-a lungul cărora a doua normală proiectivă rămîne într-un plan fix.

f) Varietăți (T_6) ale căror desfășurate asimptotice ale suprafețelor riglate asimptotice sînt conuri cu vîrfurile în același punct.

g) Varietăți (T_7) ale căror riglate asimptotice au liniile flecnodale plane și confundate într-un plan fix.

Vom nota cu ($T_{ab} \dots$) varietățile care sînt în același timp (T_a), (T_b), ...

În lucrarea de față ne propunem să determinăm varietățile (T_{12}), (T_3) și (T_{36}) neriglate, rămînînd să mai cercetăm alte cazuri în lucrări viitoare.

I

1. Să considerăm varietatea (V^3) definită prin ecuația P f a f f

$$ds^3 = l_\alpha^3 dx^\alpha = 0, \quad (1)$$

α fiind un indice mut variind de la 1 la 3 situată într-un spațiu euclidian cu trei dimensiuni. Pentru a face studiul acestei varietăți îi atașăm încă două (V^1) și (V^2) definite prin ecuațiile

$$ds^1 = l_\alpha^1 dx^\alpha = 0, \quad ds^2 = l_\alpha^2 dx^\alpha = 0, \quad (1')$$

inițial alese arbitrar supuse numai condiției

$$D = |l_i^h| \neq 0. \quad (2)$$

Alături de aceste trei varietăți vom considera congruențele de curbe (C_h) ($h = 1, 2, 3$) definite prin intersecția lor două câte două

$$\frac{dx^1}{m_h^1} = \frac{dx^2}{m_h^2} = \frac{dx^3}{m_h^3}, \quad (3)$$

unde funcțiile m_h^i sînt legate de l_k^j prin relațiile

$$l_\alpha^h m_k^\alpha = l_k^\alpha m_\alpha^h = \delta_k^h, \quad (4)$$

și unde S_h^k este simbolul lui K r o n e c k e r. Dacă notăm cu $\bar{i}^\alpha$ vectorii axelor de coordonate și cu $\bar{j}_\alpha$ reciproci lor este util uneori să folosim în calcule vectorii

$$\bar{l}^h = l_\alpha^h \bar{i}^\alpha, \quad \bar{m}_h = \bar{m}_h^\alpha \bar{j}_\alpha, \quad (5)$$

care în baza formulelor (4) sînt la rîndul lor reciproci.

Studiul ansamblului celor trei varietăți și al varietății (V^3) în particular se face cu ajutorul coeficienților lui R i c c i care definesc deplasarea infinitezimală a reperului atașat punctului M și definit prin vectorii $\bar{m}_h$. Astfel, dacă se introduc operatorii

$$X_h = m_h^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad (6)$$

avem formulele

$$X_h \bar{m}_k = c_{hk}^\alpha \bar{m}_\alpha, \quad X_h \bar{l}^k = -c_{ha}^k \bar{l}^a. \quad (7)$$

Coeficienții lui R i c c i c_{hk}^l satisfac condițiile lui C o d a z z i

$$X_m c_{hk}^l - X_h c_{mk}^l = c_{mk}^\alpha c_{h\alpha}^l - c_{hk}^\alpha c_{m\alpha}^l + c_{\alpha h}^l (c_{mh}^\alpha - c_{hm}^\alpha), \quad (8)$$

care sînt în număr de 27 și se găsesc scrise dezvoltat în lucrarea [2,8].

2. Pentru a face studiul centro-afin al varietății (V^3) , alegem ca congruențe (C_1) și (C_2) congruențele formate de asimptoticele varietăților iar ca

congruență (C_3), congruența al cărei vector tangent trece prin origină. Ceva mai mult, cum ecuațiile celor trei varietăți sînt determinate abstracție făcînd de un factor constant, vom profita de acest fapt pentru a simplifica calculele evitînd introducerea de funcții arbitrare neesențiale. Astfel, cum prin ipoteză vom presupune că varietatea nu trece prin origină, avem $l_a^3 x^\alpha \neq 0$; alegem factorul varietății date astfel ca

$$l_a^3 x^\alpha = 1. \quad (9)$$

Cu notațiile din [2, no. 10] aceasta revine la a lua

$$\rho_3 = l_a^3 x^\alpha. \quad (9')$$

De asemenea cum $D \neq 0$, vom alege factorii congruențelor asimptotice (ceea ce este totuna cu factorii varietăților (V^1), (V^2)) astfel ca

$$D = 1. \quad (10)$$

Aceasta revine la a lua

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = \frac{1}{D} \quad (10')$$

care combinat cu (9') determină numai produsul $\rho_1 \rho_2$. Mai tîrziu, printr-o condiție suplimentară, vom individualiza separat acești factori.

Pentru a face distincție între notațiile inițiale și cele rezultate prin alegerea de mai sus vom înlocui pe l_h^k, m_h^k, c_{hk}^l și X_h prin $\lambda_h^k, \nu_h^k, \gamma_{hk}^l$ și Y_h .

3. Să traducem prin relații asupra coeficienților lui Ricci ipotezele făcute.

Faptul că congruențele (C_1), (C_2) sînt asimptotice, revine la

$$\gamma_{11}^3 = \gamma_{22}^3 = 0. \quad (11)$$

Mai departe va trebui să avem

$$\bar{\lambda}^1 \bar{M} = 0, \quad \bar{\lambda}^2 \bar{M} = 0, \quad \bar{\lambda}^3 \bar{M} = 1. \quad (11')$$

Aplicînd acestor egalități operatorii Y_h în baza lor înșile rezultă egalitățile

$$\gamma_{k3}^h = \delta_k^h. \quad (12)$$

În fine, aplicînd aceiași operatori lui (10) rezultă de asemenea

$$\gamma_{h1}^1 + \gamma_{h2}^2 + \gamma_{h3}^3 = 0, \quad (h = 1, 2, 3) \quad (13)$$

sau dezvoltat, în baza lui (12)

$$\gamma_{11}^1 + \gamma_{12}^2 = 0, \quad \gamma_{21}^1 + \gamma_{22}^2 = 0, \quad \gamma_{31}^1 + \gamma_{32}^2 + 1 = 0. \quad (13')$$

În baza acestor relații, condițiile de integrabilitate se simplifică. Astfel, din (13') scoțînd pe γ_{12}^2 , γ_{21}^1 și γ_{22}^2 obținem

$$\begin{aligned} Y_1 \gamma_{22}^2 + Y_2 \gamma_{11}^1 = & -2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 - \gamma_{11}^2 \gamma_{22}^1 + \gamma_{12}^1 \gamma_{21}^2 - \gamma_{11}^1 \gamma_{12}^1 - \gamma_{22}^2 \gamma_{21}^2 - \\ & - \gamma_{31}^1 (\gamma_{12}^3 - \gamma_{21}^3) + \gamma_{21}^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 \gamma_{22}^1 - Y_2 \gamma_{12}^1 &= -3\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^1 - \gamma_{12}^1 \gamma_{22}^2 - \gamma_{22}^1 \gamma_{21}^2 + \gamma_{32}^1 (\gamma_{12}^3 - \gamma_{21}^3) + (\gamma_{12}^1)^2, \\
Y_1 \gamma_{21}^2 - Y_2 \gamma_{11}^2 &= 3\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^2 + \gamma_{21}^2 \gamma_{11}^1 + \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^1 + \gamma_{31}^2 (\gamma_{12}^3 - \gamma_{21}^3) - (\gamma_{21}^2)^2, \\
Y_1 \gamma_{21}^3 &= \gamma_{31}^3 (\gamma_{12}^3 - \gamma_{21}^3) - \gamma_{21}^2 (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3), \\
Y_2 \gamma_{12}^3 &= -\gamma_{32}^3 (\gamma_{12}^3 - \gamma_{21}^3) - \gamma_{12}^1 (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3); \\
Y_2 \gamma_{31}^1 + Y_3 \gamma_{22}^2 &= \gamma_{32}^1 \gamma_{21}^2 - \gamma_{32}^1 \gamma_{11}^1 - \gamma_{22}^1 \gamma_{31}^2 - \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^1 - \gamma_{31}^1 \gamma_{32}^3 - 2\gamma_{22}^2, \\
Y_2 \gamma_{32}^1 - Y_3 \gamma_{12}^1 &= 3\gamma_{31}^1 \gamma_{12}^2 + 2\gamma_{12}^1 \gamma_{22}^2 - \gamma_{12}^1 \gamma_{32}^1 - \gamma_{32}^1 \gamma_{32}^3 + 3\gamma_{22}^1, \\
Y_2 \gamma_{31}^2 - Y_3 \gamma_{21}^2 &= -2\gamma_{31}^2 \gamma_{22}^2 - \gamma_{21}^2 \gamma_{31}^1 - \gamma_{21}^1 \gamma_{32}^1 - \gamma_{31}^1 \gamma_{32}^3 + \gamma_{21}^2 - \gamma_{31}^3, \\
Y_2 \gamma_{31}^3 - Y_3 \gamma_{21}^3 &= -\gamma_{31}^3 \gamma_{22}^2 + \gamma_{32}^3 \gamma_{21}^2 - \gamma_{31}^1 \gamma_{32}^3 + 3\gamma_{21}^3, \\
Y_2 \gamma_{32}^3 &= \gamma_{31}^3 \gamma_{22}^1 + \gamma_{32}^3 \gamma_{12}^2 - \gamma_{32}^1 (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3) - (\gamma_{32}^3)^2; \\
Y_3 \gamma_{11}^1 - Y_1 \gamma_{31}^1 &= \gamma_{11}^1 \gamma_{31}^1 - \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^2 + \gamma_{31}^1 \gamma_{31}^3 + \gamma_{12}^1 \gamma_{31}^2 - \gamma_{32}^1 \gamma_{11}^2 + \\
&\quad + \gamma_{31}^3 - \gamma_{11}^1, \\
Y_3 \gamma_{12}^1 - Y_1 \gamma_{32}^1 &= 2\gamma_{32}^1 \gamma_{11}^1 - \gamma_{12}^1 \gamma_{31}^1 + \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^2 + \gamma_{32}^1 \gamma_{31}^1 - 2\gamma_{12}^1 + \gamma_{32}^3, \\
Y_3 \gamma_{11}^2 - Y_1 \gamma_{31}^2 &= 3\gamma_{11}^2 \gamma_{31}^1 - 2\gamma_{11}^1 \gamma_{31}^2 + \gamma_{21}^2 \gamma_{31}^1 + \gamma_{31}^1 \gamma_{31}^3, \\
Y_1 \gamma_{31}^3 &= \gamma_{32}^3 \gamma_{11}^2 + \gamma_{31}^3 \gamma_{11}^1 - \gamma_{31}^2 (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3) - (\gamma_{31}^3)^2, \\
Y_3 \gamma_{12}^3 - Y_1 \gamma_{32}^3 &= \gamma_{32}^3 \gamma_{11}^1 - \gamma_{31}^3 \gamma_{12}^1 + \gamma_{32}^3 \gamma_{31}^3 - 3\gamma_{12}^3.
\end{aligned}$$

Acest tablou îl vom nota cu (T_1) iar a-n-a ecuație din el cu simbolul (T_1, n) . Ecuațiile lui sînt compatibile între ele în sensul că nu se exclud și existența lor nu cere condiții noi. În adevăr, știm că în cazul varietăților neolonomice $Y_{hk} f \neq Y_{kh} f$ înțelegînd prin $Y_{hk} f = Y_h(Y_k f)$. În cazul nostru avem [2, no.5]

$$\begin{aligned}
Y_{12} f - Y_{21} f &= (\gamma_{12}^1 + \gamma_{22}^2) Y_1 f - (\gamma_{11}^1 + \gamma_{21}^2) Y_2 f + (\gamma_{12}^3 - \gamma_{21}^3) Y_3 f, \quad (14) \\
Y_{23} f - Y_{32} f &= -Y_{32}^1 Y_1 f + (2 + \gamma_{31}^1) Y_2 f - \gamma_{32}^3 Y_3 f, \\
Y_{31} f - Y_{13} f &= (\gamma_{31}^1 - 1) Y_1 f + \gamma_{31}^2 Y_2 f + \gamma_{31}^3 Y_3 f.
\end{aligned}$$

Aplicînd operatorul Y_3 ecuației $(T_1, 1)$, operatorul Y_1 ecuației $(T_1, 6)$ și operatorul Y_2 ecuației $(T_1, 11)$ și scăzînd din prima pe ultimele două, în baza formulelor precedente, rezultă ecuația nouă

$$\begin{aligned}
&-(2\gamma_{22}^2 + \gamma_{32}^3 + \gamma_{12}^1) (Y_3 \gamma_{11}^1 - Y_1 \gamma_{31}^1) - (2\gamma_{11}^1 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{31}^3) (Y_2 \gamma_{31}^1 + Y_3 \gamma_{22}^2) + \\
&+ \gamma_{11}^2 (Y_2 \gamma_{32}^1 - Y_3 \gamma_{22}^2) - \gamma_{22}^1 (Y_3 \gamma_{11}^2 - Y_1 \gamma_{31}^2) + (\gamma_{21}^2 - \gamma_{11}^1) (Y_3 \gamma_{12}^1 - Y_1 \gamma_{32}^1) + \\
&+ (\gamma_{22}^2 - \gamma_{12}^1) (Y_2 \gamma_{31}^2 - Y_3 \gamma_{21}^2) - \gamma_{31}^1 (Y_3 \gamma_{12}^3 - Y_1 \gamma_{32}^3) - (\gamma_{31}^1 + 1) (Y_2 \gamma_{31}^3 - Y_3 \gamma_{21}^3) - \\
&- \gamma_{32}^1 (Y_1 \gamma_{21}^2 - Y_2 \gamma_{11}^2) + \gamma_{31}^2 (Y_1 \gamma_{22}^1 - Y_2 \gamma_{12}^1) + 3(Y_1 \gamma_{22}^2 + Y_2 \gamma_{11}^1) = 0,
\end{aligned}$$

care în baza tabloului (T_1) este identic verificată. Aceeași metodă putem s-o aplicăm și celorlalte ecuații ale acestui tablou. Rezultatul obținut ne spune că sistemul de ecuații cu derivate parțiale definit prin tabloul (T_1) este complet.

4. Tabloul (T_1) se mai poate simplifica chiar în cazul general ținînd seamă că factorii ρ_1 și ρ_2 nu sînt determinați decît prin produsul lor. Dar pentru a face acest lucru este necesar să facem diferite ipoteze asupra naturii geometrice a varietății. Astfel, putem face următoarea clasificare.

a) Varietatea (V^3) nu este riglată. Ca și în cazul suprafețelor, dacă pe varietate se găsește o familie de drepte, ele trebuie să fie asimptotice. Ori, pentru ca congruența (C_1) să fie formată din drepte, va trebui ca planul

$$|\bar{P} - \bar{M}, Y_1 \bar{M}, Y_{11} \bar{M}| = 0,$$

să fie nedeterminat. Dar, în ipotezele făcute

$$Y_1 \bar{M} = \bar{\mu}_1, \quad Y_{11} \bar{M} = Y_1 \bar{\mu}_1 = \gamma_{11}^1 \bar{\mu}_1 + \gamma_{11}^2 \bar{\mu}_2,$$

încît condiția căutată este $\gamma_{11}^2 = 0$. Analog, pentru ca congruența (C_2) să fie formată din drepte va fi necesar să avem $\gamma_{22}^1 = 0$.

Pentru ca varietatea să nu fie riglată va fi deci necesar să presupunem $\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^1 \neq 0$. În această ipoteză, vom putea alege pe ρ_1 și ρ_2 astfel ca

$$\gamma_{11}^2 = \gamma_{22}^1. \quad (15)$$

Folosind notațiile inițiale această ipoteză cere să luăm [2, no. 10]

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \sqrt[3]{\frac{c_{11}^3}{c_{22}^1}}, \quad (15')$$

care în numere reale, împreună cu (9'), (10'), determină în mod unic factorii de proporționalitate ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

b) Varietatea (V^3) este simplu riglată, adică $\gamma_{11}^2 = 0, \gamma_{22}^1 \neq 0$ (sau invers). În această ipoteză vom putea determina factorii de proporționalitate impunînd condiția

$$\gamma_{11}^2 = 1, \quad (\gamma_{22}^1 = 0). \quad (16)$$

Aceasta revine la a lua

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = c_{22}^1. \quad (16')$$

c) Varietatea (V^3) este dublu riglată, adică avem în același timp

$$\gamma_{11}^2 = \gamma_{22}^1 = 0; \quad (17)$$

normalizarea se poate face cu ajutorul coeficienților $\gamma_{31}^3, \gamma_{32}^3$ presupunînd că nu sînt ambii nuli. Astfel, dacă $\gamma_{31}^3 \neq 0$, vom lua

$$\gamma_{31}^3 = 1, \quad (18)$$

ceea ce revine la a alege

$$\rho_1 = \frac{1}{c_{31}^3}. \quad (18')$$

De asemenea dacă $\gamma_{31}^3 \cdot \gamma_{32}^3 \neq 0$ putem face și normalizarea

$$\gamma_{31}^3 = \gamma_{32}^3. \quad (19)$$

ceea ce revine la a lua

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{c_{32}^3}{c_{31}^3}. \quad (20)$$

Normalizarea (19) introduce calcule mai simetrice.

d) Dacă avem în același timp

$$\gamma_{11}^2 = \gamma_{22}^1 = \gamma_{31}^3 = \gamma_{32}^3 = 0, \quad (21)$$

ceea ce are loc pentru suprafețele riglate dublu ale căror normale afine trec printr-un punct fix, deoarece în acest caz normala afină este definită prin vectorul $\underline{m}_3$ [2, nr. 14], atunci normalizarea se poate face cu ajutorul coeficienților $\gamma_{12}^1, \gamma_{21}^2$ presupunând că nu sînt ambii nuli. Astfel, dacă $\gamma_{21}^2 \neq 0$, putem lua

$$\gamma_{21}^2 = 1, \quad (22)$$

ceea ce revine la a pune

$$\rho_1 = \frac{1}{c_{21}^2} \quad (22')$$

Ca și la cazul precedent, dacă $\gamma_{12}^1, \gamma_{21}^2 \neq 0$ atunci putem face de asemenea normalizarea prin impunerea condiției

$$\gamma_{21}^2 = \gamma_{12}^1 \quad (23)$$

ceea ce revine la a lua

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{c_{12}^1}{c_{21}^2}. \quad (23')$$

e) Mai departe, putem avea în același timp

$$\gamma_{11}^2 = \gamma_{22}^1 = \gamma_{31}^3 = \gamma_{32}^3 = \gamma_{12}^1 = \gamma_{21}^2 = 0, \quad (24)$$

ceea ce are loc pentru varietățile dublu riglate care au normala afină confundată cu prima normală proiectivă și trecînd printr-un punct fix [2, no. 16]. Pentru normalizare, vom ține seamă că varietățile (V^1) și (V^2) sînt olonome sau neolonome după cum expresiile [2, nr. 7]

$$\Omega^1 = -\gamma_{32}^1, \quad \Omega^2 = \gamma_{31}^2, \quad (25)$$

sînt sau nu diferite de zero. Presupunînd că una cel puțin este neolonomă, de ex. a doua, vom putea lua ¹⁾

$$\gamma_{31}^2 = 1 \quad (26)$$

¹⁾ În ipoteza că ambele varietăți sînt neolonome, se poate face normalizarea luînd

$$\gamma_{32}^1 = \gamma_{31}^2, \quad (26')$$

ceea ce conduce la

$$\frac{\rho_1}{\rho^2} = \sqrt{\frac{c_{32}^1}{c_{31}^2}}, \quad (26'')$$

alegere care are dezavantajul că poate introduce în calcule numere complexe.

ceea ce revine la alegerea factorilor

$$\frac{\tilde{c}_1 \tilde{c}_3}{\tilde{c}_2} = \frac{1}{c_{31}^2}. \quad (26')$$

f) În fine avem cazul varietăților pentru care au loc în același timp condițiile

$$\gamma_{11}^3 = \gamma_{22}^1 = \gamma_{31}^3 = \gamma_{32}^3 = \gamma_{12}^1 = \gamma_{21}^2 = \gamma_{32}^1 = \gamma_{31}^2 = 0, \quad (27)$$

și pentru care varietățile (V^1) , (V^2) sînt olonome (conuri cu vîrfurile în origină). Tabloul (T_1) se reduce în acest caz la ecuațiile

$$Y_1 \gamma_{21}^3 = 0, \quad Y_3 \gamma_{21}^3 = -3\gamma_{21}^3; \quad Y_2 \gamma_{12}^3 = 0, \quad Y_3 \gamma_{12}^3 = -3\gamma_{12}^3; \quad (28)$$

$$Y_1 \gamma_{22}^2 + Y_2 \gamma_{11}^1 = -2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 + \gamma_{31}^1 (\gamma_{21}^3 - \gamma_{12}^3) + \gamma_{21}^3,$$

$$Y_3 \gamma_{11}^1 = Y_1 \gamma_{31}^1 + \gamma_{11}^1 (\gamma_{31}^1 - 1), \quad Y_3 \gamma_{22}^2 = -Y_2 \gamma_{31}^1 - \gamma_{22}^2 (\gamma_{31}^1 + 2) = 0.$$

Avînd în vedere numărul redus al acestor ecuații, problema normalizării nu mai este cazul să se pună. De altfel cu aceste varietăți ne-am ocupat și în lucrarea [3].

Am dat mai sus normalizări și pentru cazurile cînd varietatea este simplu sau dublu riglată deși în această lucrare nu le vom folosi. Ele pot fi utilizate însă într-un studiu ulterior. Desigur că normalizările propuse pot fi schimbate cu altele care în anumite probleme pot apărea mai indicate.

II

5. De-a lungul varietăților (T_{12}) vom avea în același timp

$$\frac{K_1}{d^4} = \text{const.}, \quad \frac{K_2}{d^4} = \text{const.} \quad (29)$$

În baza unui calcul făcut în lucrarea [2, nr. 21] pe aceste varietăți vom avea

$$\frac{4c_{11}^3 c_{22}^3 - (c_{12}^3 + c_{21}^3)^2}{4D^2(I_{12}^3)^4} = \text{const.}, \quad \frac{c_{11}^3 c_{22}^3 - c_{12}^3 c_{21}^3}{D^2(I_{12}^3)^4} = \text{const.} \quad (30)$$

Conform ipotezelor făcute la (no.2), aceste condiții se reduc la

$$\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3 = \text{const.}, \quad \gamma_{12}^3 \gamma_{21}^3 = \text{const.},$$

adică

$$\gamma_{12}^3 = \alpha = \text{const.}, \quad \gamma_{21}^3 = \beta = \text{const.}, \quad (31)$$

unde prin ipoteză vom presupune că constantele α și β sînt astfel că

$$\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) \neq 0. \quad (32)$$

Prin această ipoteză lăsăm deoparte din studiul nostru varietățile pentru care în punctul curent liniile asimptotice ar avea un punct staționar, s-ar comporta ca un complex liniar sau ar fi olonomie [2, nr. 22].



Prin împărțirea lui (29') cu (30') rezultă că varietățile (τ_{12}) se bucură de asemenea de proprietatea că de-a lungul lor

$$\frac{K_1}{K_2} = \text{const.}, \quad (33)$$

ceea ce este o proprietate proiectivă a lor [2, nr. 21]. Cu notațiile A. P a n - t a z i [9, p. 348; 6 §3], de-a lungul varietăților considerate, invariantul proiectiv I de primul ordin, este constant (invariantul fundamental, cum îl numește T. M i h ă i l e s c u [5, p. 477]).

6. Să reducem tabloul (T_1) la forma cea mai simplă în baza condițiilor (31). Vom presupune îndeplinită condiția (15). Din $(T_1, 4)$ și $(T_1, 5)$ scoatem

$$\gamma_{31}^3 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{21}^2, \quad \gamma_{32}^3 = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{12}^1. \quad (34)$$

Înlocuind aceste valori în $(T, 10)$ și $(T, 14)$ rezultă relațiile

$$Y_1 \gamma_{21}^2 = -\gamma_{11}^2 \gamma_{12}^1 + \gamma_{11}^1 \gamma_{21}^2 - (\alpha - \beta) \gamma_{31}^2 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} (\gamma_{21}^2)^2, \quad (35)$$

$$Y_2 \gamma_{12}^1 = -\gamma_{11}^2 \gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2 \gamma_{12}^1 + (\alpha - \beta) \gamma_{32}^1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} (\gamma_{12}^1)^2. \quad (36)$$

De asemenea, din relațiile $(T_1, 9)$ și $(T_1, 15)$ rezultă

$$Y_2 \gamma_{21}^2 = -\gamma_{22}^2 \gamma_{21}^2 + \frac{2\beta}{\alpha - \beta} \gamma_{12}^1 \gamma_{21}^2 + 3\beta \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad (37)$$

$$Y_1 \gamma_{12}^1 = -\gamma_{11}^1 \gamma_{12}^1 - \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} \gamma_{12}^1 \gamma_{21}^2 - 3\alpha \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}. \quad (38)$$

Cu ajutorul formulelor (35) și (36), relațiile $(T_1, 2)$ și $(T_1, 3)$ se scriu

$$Y_1 \gamma_{11}^2 = -3\gamma_{11}^1 \gamma_{11}^2 - 2\gamma_{11}^2 \gamma_{21}^2 + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} (\gamma_{12}^1)^2 + 2(\alpha - \beta) \gamma_{32}^1, \quad (39)$$

$$Y_2 \gamma_{11}^2 = -3\gamma_{22}^2 \gamma_{11}^2 - 2\gamma_{11}^2 \gamma_{12}^1 - \frac{2\beta}{\alpha - \beta} (\gamma_{21}^2)^2 - 2(\alpha - \beta) \gamma_{31}^2. \quad (40)$$

Relațiile care ne-au rămas se scriu sub forma

$$Y_1 \gamma_{22}^2 + Y_2 \gamma_{11}^1 = -2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 + \gamma_{12}^1 \gamma_{21}^2 - \gamma_{11}^1 \gamma_{12}^1 - \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^2 - (\gamma_{11}^2)^2 - (\alpha - \beta) \gamma_{31}^1 + \beta, \quad (41)$$

$$Y_1 \gamma_{31}^1 - Y_3 \gamma_{11}^1 = -\gamma_{11}^1 \gamma_{31}^1 + \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^2 - \gamma_{12}^1 \gamma_{31}^2 + \gamma_{11}^2 \gamma_{32}^1 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{21}^2 (\gamma_{31}^1 + 1) + \gamma_{11}^1. \quad (42)$$

$$Y_2 \gamma_{31}^1 + Y_3 \gamma_{22}^2 = \gamma_{32}^1 \gamma_{21}^2 - \gamma_{32}^1 \gamma_{11}^1 - \gamma_{11}^2 \gamma_{31}^2 - \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^1 + \quad (43)$$

$$+ \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{31}^1 \gamma_{12}^1 - 2\gamma_{22}^2,$$

$$Y_2 \gamma_{32}^1 - Y_3 \gamma_{11}^2 = 3\gamma_{11}^2 \gamma_{31}^1 + 2\gamma_{22}^2 \gamma_{32}^1 + \frac{2\beta}{\alpha - \beta} \gamma_{32}^1 \gamma_{12}^1 + 3\gamma_{11}^2, \quad (44)$$

$$Y_1 \gamma_{32}^1 - Y_3 \gamma_{12}^1 = -2\gamma_{11}^1 \gamma_{32}^1 + \gamma_{12}^1 \gamma_{31}^1 - \gamma_{11}^2 \gamma_{31}^2 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{32}^1 \gamma_{21}^2 + \quad (45)$$

$$+ \frac{3\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{12}^1,$$

$$Y_2 \gamma_{31}^2 - Y_3 \gamma_{21}^2 = -2\gamma_{22}^2 \gamma_{31}^2 - \gamma_{21}^2 \gamma_{31}^1 - \gamma_{11}^2 \gamma_{32}^1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{31}^2 \gamma_{12}^1 - \quad (46)$$

$$- \frac{2\beta}{\alpha - \beta} \gamma_{21}^2,$$

$$Y_1 \gamma_{31}^2 - Y_3 \gamma_{11}^2 = -3\gamma_{11}^2 \gamma_{31}^1 + 2\gamma_{11}^1 \gamma_{31}^2 - \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} \gamma_{31}^2 \gamma_{21}^2 \quad (47)$$

7. În formulele (35)–(47) coeficienții care au unul din indicii inferiori 3 trebuie să fie priviți ca funcții auxiliare care ușurează scrierea ecuațiilor de compatibilitate; de asemenea operatorul Y_3 . Ele pot fi scrise și fără acești auxiliari. În adevăr, (41), (35) și (36) dau posibilitatea să calculăm pe γ_{31}^1 , γ_{31}^2 și γ_{32}^1 . Înlocuind valorile obținute în celelalte formule și folosind formulele (15) se poate elimina Y_3 . Calculele sînt prea complicate ca să le redăm aci mai ales că rezultatele ce se obțin sînt complicate și practic nu pot fi folosite.

În concluzie, coeficienții lui Ricci ai varietăților (T_{12}) neriglate vor trebui să satisfacă condițiilor de integrabilitate (34)–(47). Ca aplicație, ne propunem să determinăm varietățile (T_{123}) neriglate. De-a lungul acestor varietăți va trebui să avem în plus satisfăcute condițiile

$$\gamma_{31}^3 = \gamma_{32}^3 = 0.$$

Or, formulele (34) spun că în aceste ipoteze va trebui să avem de asemenea

$$\gamma_{21}^2 = \gamma_{12}^1 = 0.$$

Dar aceste condiții, în baza formulelor (37), (38) conduc la egalitatea $\alpha = \beta$ sau $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ceea ce noi am exclus din calculele noastre. Aceasta înseamnă că nu avem varietăți (T_{123}) neriglate.

De asemenea nu putem avea varietăți (T_{124}) , (T_{125}) neriglate deoarece pentru asemenea varietăți ar trebui să avem relațiile [2, nr. 16]

$$\gamma_{31}^3 = \varepsilon \gamma_{21}^2, \quad \gamma_{32}^3 = \varepsilon \gamma_{12}^1,$$

unde ε este $+1$ sau -1 și care în baza lui (34) ar conduce la $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Condițiile de integrabilitate (34)–(47) sînt totuna cu ecuațiile diferențiale exterioare

$$\begin{aligned}
 [d\gamma_{12}^1 ds^3] = & \left(-\gamma_{11}^2 \gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2 \gamma_{12}^1 + (\alpha - \beta) \gamma_{31}^1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} (\gamma_{12}^1)^2 \right) [ds^2 ds^3] + \\
 & + \left((\gamma_{11}^1 \gamma_{12}^1 + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} \gamma_{12}^1 \gamma_{21}^2 + 3\alpha \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}) [ds^3 ds^1], \right. \\
 [d\gamma_{21}^2 ds^3] = & \left(-\gamma_{22}^2 \gamma_{21}^2 + \frac{2\beta}{\alpha - \beta} \gamma_{12}^1 \gamma_{21}^2 + 3\beta \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) [ds^2 ds^3] + \\
 & + \left(\gamma_{11}^2 \gamma_{12}^1 - \gamma_{11}^1 \gamma_{21}^2 + (\alpha - \beta) \gamma_{31}^2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} (\gamma_{21}^2)^2 \right) [ds^3 ds^1], \\
 [d\gamma_{11}^1 ds^1] = & [d\gamma_{22}^2 ds^2] + [d\gamma_{31}^1 ds^3] = \\
 = & (2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 - \gamma_{12}^2 \gamma_{21}^2 + \gamma_{11}^1 \gamma_{12}^1 + \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^2 + (\gamma_{11}^2)^2 + (\alpha - \beta) \gamma_{31}^1 - \beta) [ds^1 ds^2] + \\
 & + \left(\gamma_{32}^1 \gamma_{21}^2 - \gamma_{32}^2 \gamma_{11}^1 - \gamma_{11}^2 \gamma_{31}^2 - \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{31}^1 \gamma_{12}^1 - 2\gamma_{22}^2 \right) [ds^2 ds^3] + \\
 & + \left(\gamma_{11}^1 \gamma_{31}^1 - \gamma_{22}^2 \gamma_{31}^2 + \gamma_{12}^1 \gamma_{31}^2 - \gamma_{11}^2 \gamma_{32}^1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{21}^2 (\gamma_{31}^1 + 1) - \gamma_{11}^1 \right) [ds^3 ds^1], \\
 [d\gamma_{12}^1 ds^1] = & [d\gamma_{11}^2 ds^2] + [d\gamma_{32}^1 ds^3] = \\
 = & \left(3\gamma_{11}^1 \gamma_{11}^2 - \gamma_{22}^2 \gamma_{12}^1 + 3\gamma_{11}^2 \gamma_{21}^2 - \frac{3\alpha + \beta}{\alpha - \beta} (\gamma_{12}^1)^2 - 3(\alpha - \beta) \gamma_{32}^1 \right) [ds^1 ds^2] + \\
 & + \left(3\gamma_{11}^2 \gamma_{31}^1 + 2\gamma_{22}^2 \gamma_{32}^1 + \frac{2\beta}{\alpha - \beta} \gamma_{32}^1 \gamma_{12}^1 + 3\gamma_{11}^2 \right) [ds^2 ds^3] + \\
 & + \left(2\gamma_{11}^1 \gamma_{32}^1 - \gamma_{12}^1 \gamma_{31}^1 + \gamma_{11}^2 \gamma_{31}^2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{32}^1 \gamma_{21}^2 - \frac{3\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{12}^1 \right) [ds^3 ds^1], \\
 [d\gamma_{11}^2 ds^1] = & [d\gamma_{21}^2 ds^2] + [d\gamma_{31}^2 ds^3] = \\
 = & \left(3\gamma_{22}^2 \gamma_{11}^2 + \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^1 + \gamma_{11}^1 \gamma_{21}^2 - (\gamma_{21}^2)^2 + (\alpha - \beta) \gamma_{31}^2 \right) [ds^1 ds^2] + \\
 & + \left(-2\gamma_{22}^2 \gamma_{31}^2 - \gamma_{21}^2 \gamma_{31}^1 - \gamma_{11}^2 \gamma_{32}^1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \gamma_{31}^2 \gamma_{12}^1 - \frac{2\beta}{\alpha - \beta} \right) [ds^2 ds^3] + \\
 & + \left(3\gamma_{11}^2 \gamma_{31}^1 - 2\gamma_{11}^1 \gamma_{31}^2 + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} \gamma_{31}^2 \gamma_{21}^2 \right) [ds^3 ds^1].
 \end{aligned}$$

8. Să trecem la determinarea varietăților (T_3) neriglate. Cum de-a lungul acestor varietăți normala afină trece printr-un punct fix, pe care-l alegem originea, va trebui să avem

$$\gamma_{31}^3 = \gamma_{32}^3 = 0. \quad (49)$$

Alegem normalizarea definită prin (15). În baza acestor ipoteze, formulele $(T_1, 10)$ și $(T_1, 14)$ spun că

$$\gamma_{32}^1 = \gamma_{31}^2 = 0, \quad (50)$$

Mai departe, formulele $(T_1, 7)$ și $(T_1, 13)$ se scriu

$$-Y_3 \gamma_{22}^1 = 3\gamma_{31}^1 \gamma_{22}^1 + 3\gamma_{22}^1, \quad Y_3 \gamma_{11}^2 = 3\gamma_{11}^2 \gamma_{31}^1,$$

și luînd pe γ_{11}^2 ca funcție necunoscută ecuația (15) cere

$$\gamma_{31}^1 = -\frac{1}{2} \quad Y_3 \gamma_{11}^2 = -\frac{3}{2} \gamma_{11}^2. \quad (51)$$

Folosind aceste formule, $(T_2, 11)$ și $T_2, 6)$ spun că

$$Y_3 \gamma_{11}^1 = -\frac{3}{2} \gamma_{11}^1, \quad Y_3 \gamma_{22}^2 = -\frac{3}{2} \gamma_{22}^2; \quad (52)$$

mai departe, $(T_1, 12)$ și $(T_1, 8)$ dau

$$Y_3 \gamma_{12}^1 = -\frac{3}{2} \gamma_{12}^1, \quad Y_3 \gamma_{21}^2 = -\frac{3}{2} \gamma_{21}^2; \quad (53)$$

iar $(T_1, 15)$ și $(T_1, 9)$

$$Y_3 \gamma_{12}^3 = -3\gamma_{12}^3, \quad Y_3 \gamma_{21}^3 = -3\gamma_{21}^3. \quad (54)$$

În fine, formulele rămase din (T_1) dau succesiv ecuațiile

$$\begin{aligned} Y_1 \gamma_{21}^3 &= -\gamma_{21}^2 (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3), \\ Y_2 \gamma_{12}^3 &= -\gamma_{12}^1 (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1 \gamma_{22}^2 + Y \gamma_{11}^1 &= -2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 - (\gamma_{11}^2)^2 \gamma_{12}^1 - \gamma_{21}^2 - \gamma_{11}^1 \gamma_{12}^1 - \gamma_{22}^2 \gamma_{21}^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3), \\ Y_1 \gamma_{11}^2 - Y_2 \gamma_{12}^1 &= -3\gamma_{11}^1 \gamma_{11}^2 - \gamma_{12}^1 \gamma_{22}^2 - \gamma_{11}^2 \gamma_{21}^2 + (\gamma_{12}^1)^2, \\ Y_1 \gamma_{21}^2 - Y_2 \gamma_{11}^2 &= 3\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^2 + \gamma_{21}^2 \gamma_{11}^1 + \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^1 - (\gamma_{21}^2)^2. \end{aligned} \quad (55)$$

În concluzie, varietățile (T_3) sînt definite prin coeficienții lui Ricci care în bună parte, cum arată formulele de mai sus, pot fi aleși 1, $-\frac{1}{2}$ sau 0, și mai depind de funcțiile $\gamma_{12}^3, \gamma_{21}^3, \gamma_{12}^1, \gamma_{21}^2, \gamma_{11}^1, \gamma_{22}^2, \gamma_{11}^2$ care verifică ecuațiile diferențiale (51), (52), (53), (54) și (55). Aceste ecuații sînt echivalente cu sistemul de ecuații diferențiale exterioare

$$\begin{aligned} [d\gamma_{12}^3 ds^1] &= \gamma_{12}^1 (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3) [ds^1 ds^2] - 3\gamma_{12}^3 [ds^3 ds^1], \\ [d\gamma_{21}^3 ds^2] &= -\gamma_{21}^2 (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^2) [ds^1 ds^2] + 3\gamma_{21}^3 [ds^2 ds^3], \\ [d\gamma_{12}^1 ds^1] + [d\gamma_{11}^2 ds^2] &= (-3\gamma_{11}^1 \gamma_{11}^2 - \gamma_{12}^1 \gamma_{22}^2 - \gamma_{11}^2 \gamma_{21}^2 + (\gamma_{12}^1)^2) \\ &\quad [ds^1 ds^2] + \frac{3}{2} \gamma_{11}^2 [ds^2 ds^3] - \frac{3}{2} \gamma_{12}^1 [ds^3 ds^1], \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
[d\gamma_{21}^2 ds^2] + [d\gamma_{11}^2 ds^1] &= (3\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^2 + \gamma_{21}^2 \gamma_{11}^1 + \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^1 - (\gamma_{21}^2)^2) [ds^1 ds^2] + \\
&\quad + \frac{3}{2} \gamma_{21}^2 [ds^2 ds^3] - \frac{3}{2} \gamma_{11}^2 [ds^3 ds^1], \\
[d\gamma_{11}^1 ds^1] - [d\gamma_{22}^2 ds^2] &= (2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 + (\gamma_{11}^2)^2 + \gamma_{12}^1 \gamma_{21}^2 + \gamma_{11}^1 \gamma_{12}^1 + \gamma_{22}^2 \gamma_{21}^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2} (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3)) [ds^1 ds^2] - \frac{3}{2} \gamma_{22}^2 [ds^2 ds^3] - \frac{3}{2} \gamma_{11}^1 [ds^3 ds^1].
\end{aligned}$$

9. Pentru a încheia să determinăm varietățile (T_{36}) . Acestea se vor deduce din cele de la no. prec. luând în plus [3,no.14]

$$\gamma_{12}^1 = \gamma_{21}^2 = 0. \quad (57)$$

În baza acestor relații ecuațiile (53) dispar iar (55) devin

$$Y_1 \gamma_{21}^3 = 0, \quad Y_2 \gamma_{12}^3 = 0, \quad (58)$$

$$Y_1 \gamma_{22}^2 + Y_2 \gamma_{11}^1 = -2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 - (\gamma_{11}^2)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{12}^3 + \gamma_{21}^3),$$

$$Y_1 \gamma_{11}^2 = -3\gamma_{11}^1 \gamma_{11}^2, \quad Y_2 \gamma_{11}^2 = -3\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^2.$$

Ecuațiile (51₂) și (58₄), (58₅) ne spun, în baza celor arătate la [2,no.3], că va trebui să avem

$$-\frac{d\gamma_{11}^2}{3\gamma_{11}^2} = \gamma_{11}^1 ds^1 + \gamma_{22}^2 ds^2 + \frac{1}{2} ds^3. \quad (59)$$

Pentru a avea această egalitate, va trebui ca expresia din dreapta să aibă diferențiala exterioară nulă. Același lucru putem să-l facem folosind linia urmată pînă acum scriind că condițiile (14) sînt identic verificate în care vom lua

$$f = -\frac{1}{3} (\ln \gamma_{11}^2)$$

și în baza lui (59)

$$Y_1 f = \gamma_{11}^1, \quad Y_2 f = \gamma_{22}^2, \quad Y_3 f = \frac{1}{2} \quad (59')$$

Scriind aceste condiții rezultă egalitatea nouă

$$Y_2 \gamma_{11}^1 - Y_1 \gamma_{22}^2 = -2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{21}^3 - \gamma_{12}^3). \quad (60)$$

Aceasta combinată cu (58) ne dă

$$Y_1 \gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \left(-(\gamma_{11}^2)^2 + \gamma_{12}^3 \right), \quad Y_2 \gamma_{11}^1 = -2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{11}^2)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{21}^3. \quad (61)$$

Avînd în vedere că am făcut multe transformări succesive, dăm mai jos tabloul coeficienților lui Ricci care definesc varietățile (T_{36}); acesta este

$$\begin{array}{lll}
 \gamma_{11}^1 & \gamma_{11}^2 & \gamma_{11}^3 = 0, \\
 \gamma_{12}^1 = 0 & \gamma_{12}^2 = -\gamma_{11}^1 & \gamma_{12}^3, \\
 \gamma_{13}^1 = 1 & \gamma_{13}^2 = 0 & \gamma_{13}^3 = 0; \\
 \gamma_{21}^1 = -\gamma_{22}^2 & \gamma_{21}^2 = 0 & \gamma_{21}^3, \\
 \gamma_{22}^1 = \gamma_{11}^2 & \gamma_{22}^2 & \gamma_{22}^3 = 0; \\
 \gamma_{23}^1 = 0 & \gamma_{23}^2 = 1 & \gamma_{23}^3 = 0; \\
 \gamma_{31}^1 = -\frac{1}{2} & \gamma_{31}^2 = 0 & \gamma_{31}^3 = 0, \\
 \gamma_{32}^1 = 0 & \gamma_{32}^2 = -\frac{1}{2} & \gamma_{32}^3 = 0, \\
 \gamma_{33}^1 = 0 & \gamma_{33}^2 = 0 & \gamma_{33}^3 = 1,
 \end{array}$$

și după cum se vede depinde de funcțiile $\gamma_{11}^1, \gamma_{11}^2, \gamma_{12}^3, \gamma_{21}^3, \gamma_{22}^2$ care satisfac ecuațiilor diferențiale

$$\begin{array}{ll}
 Y_1 \gamma_{21}^3 = 0 & Y_2 \gamma_{12}^3 = 0; \\
 Y_1 \gamma_{11}^2 = -3\gamma_{11}^1 \gamma_{11}^2, & Y_2 \gamma_{11}^2 = -3\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^2, \quad Y_3 \gamma_{11}^2 = -\frac{3}{2} \gamma_{11}^2; \\
 Y_1 \gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \left(-(\gamma_{11}^2)^2 + \gamma_{12}^3 \right) & Y_2 \gamma_{11}^1 = -2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{11}^2)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{21}^3, \\
 Y_3 \gamma_{11}^1 = -\frac{3}{2} \gamma_{11}^1 & Y_3 \gamma_{22}^2 = -\frac{3}{2} \gamma_{22}^2; \\
 Y_3 \gamma_{12}^3 = -3\gamma_{12}^3, & Y_3 \gamma_{21}^3 = -3\gamma_{21}^3.
 \end{array}$$

Ele sînt totuna cu sistemul de ecuații diferențiale exterioare

$$d\gamma_{11}^2 = -3\gamma_{11}^2 \left(\gamma_{11}^1 ds^1 + \gamma_{22}^2 ds^2 + \frac{1}{2} ds^3 \right). \quad (63)$$

$$[d\gamma_{12}^3 ds'] = -3\gamma_{12}^3 [ds^3 ds']; \quad [d\gamma_{21}^3 ds^2] = 3\gamma_{21}^3 [ds^2 ds^3].$$

$$[d\gamma_{11}^1 ds^1] = \left(2\gamma_{11}^1 \gamma_{22}^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{11}^2)^2 - \frac{1}{2} \gamma_{21}^3 \right) [ds^1 ds^2] - \frac{3}{2} \gamma_{11}^1 [ds^3 ds^1],$$

$$[d\gamma_{22}^2 ds^2] = \frac{1}{2} \left(-(\gamma_{11}^2)^2 + \gamma_{12}^3 \right) [ds^1 ds^2] + \frac{3}{2} \gamma_{22}^2 [ds^2 ds^3].$$

10. Ca încheiere, ne propunem să dăm cîteva proprietăți ale ultimelor varietăți. În primul rînd facem observarea că varietățile (V^1), (V^2), (V^3) sînt olonome sau nu, după cum expresiile

$$\Omega^1 = \gamma_{23}^1 - \gamma_{32}^1, \quad \Omega^2 = \gamma_{31}^2 - \gamma_{13}^2, \quad \Omega^3 = \gamma_{12}^3 - \gamma_{21}^3, \quad (64)$$

sînt nule sau diferite de zero [2, nr. 7]. În baza tabloului de mai sus constatăm că pentru varietățile (T_{36}) avem

$$\Omega^1 = \Omega^2 = 0, \quad (65)$$

ceea ce înseamnă că pentru ele, varietățile (V^1) și (V^2) sînt olonome, și anume, formează fiecare separat, o familie de conuri cu vîrfurile în origină.

Pe de altă parte, avînd în vedere tabloul coeficienților lui Ricci rezultă că aceste varietăți au de-a lungul lor

$$\begin{aligned} \gamma_{31}^3 &= \gamma_{21}^2, & \gamma_{22}^3 &= \gamma_{12}^1, \\ \gamma_{31}^3 + \gamma_{21}^2 &= 0, & \gamma_{32}^3 + \gamma_{12}^1 &= 0, \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că sînt în același timp și varietăți (T_4) , (T_5) ; cu alte cuvinte varietățile în chestiune sînt în același timp $(T_{34,6})$. Acestea sînt singurele varietăți Țițeica de acest fel cum se constată imediat luînd în (T_1)

$$\gamma_{31}^3 = \gamma_{32}^3 = \gamma_{21}^2 = \gamma_{12}^1 = 0, \quad \gamma_{22}^1 = \gamma_{11}^2.$$

În lucrarea [3, nr. 13 — 14] sînt determinate varietăți de acest gen dublu riglate.

BIBLIOGRAFIE

1. G. h. T. h. G h e o r g h i u, *Sur les variétés non holonomes de l'espace S_3* , „Revue de Mathématiques pures et appliquées,” II, p. 501—508, 1957.
2. G. h. T. h. G h e o r g h i u, *Asupra varietăților neolonome*, „Lucrările științifice ale Institutului Pedagogic din Timișoara pe anul 1961” (sub presă).
3. G. h. T. h. G h e o r g h i u, *Sur les variétés nonholonomes Țițeica doublement réglées*. Comunicare făcut la Conștiințirea unională de Geometrie diferențială dela Kiev, 1926).
4. T. M i h ă i l e s c u, *Varietăți neolonome de tip Țițeica-Wilczynski*, „Studii și cercetări matematice,” VI, p. 175—192, 1955.
5. T. M i h ă i l e s c u, *Geometria diferențială proiectivă*, Editura Acad. R.P.R., București, 1958.
6. A l e x. P a n t a z i, *Sur la déformation projective des surfaces nonholonomes de l'espace E_3* , „Bull. Math. Soc. Roum. Sc.” 45, p. 39—47, 1943.
7. G. Ț i Ț e i c a, *Sur une nouvelle classe de surfaces*, „C. R.”, 144, p. 1257, 1907.
8. * * * *Operele lui George Țițeica*, Academia Română, București, 1941.
9. * * * *Operele lui Alex. Pantazi*, Academia R. P. R., București, 1956.

ОТНОСИТЕЛЬНО НЕГОЛОНОМНЫХ РАЗНОВИДНОСТЕЙ ЦИЦЕЙКИ

(Резюме)

Работа начинается классификацией неголономных разновидностей Цицейки, исходя из известных характерных особенностей поверхностей Цицейки. Так, назовём: а) разновидности (T_1) неголономными разновидностями, вдоль которых отношение $\frac{K_2}{d^4}$ является постоянным, K , будучи первой полной метрической кривизной разновидности, а d — расстояние от начала до касательной плоскости; б) разновидности

(T_2) вдоль которых отношение $\frac{K_2}{d^4}$ является постоянным, где K_2 — вторая полная метрическая кривизна; в) разновидности (T_3) вдоль которых аффинная нормаль проходит через постоянную точку; г) разновидности (T_4) вдоль которых первая проекционная нормаль проходит через постоянную точку; д) разновидности (T_5), вдоль которых вторая проекционная нормаль остаётся в постоянной плоскости; е) разновидности (T_6), которых асимптотические развёртываемые линейчатых асимптотических поверхностей являются конусами с вершиной в одной и той же точке; ж) разновидности (T_7), асимптотические линейчатые которых имеют плоские флекноидные линии и совпадающие в постоянной плоскости. Обозначим вообще через ($Tab \dots$) разновидности, которые являются в одно и то же время (Ta), (Tc), ...

В первой части работы осваивается центр-аффинное изучение разновидности (V^3), присоединив к ней еще две разновидности (V^1), (V^2), таким образом, чтобы они пересекались бы попарно по трём конгруэнтностям кривых (Ch), из которых первые две должны быть образованы асимптотиками разновидности (V^3), а третья из прямых, соединяющих текущую точку разновидности с началом. Подобрав факторы пропорциональности (ρ_1, ρ_2, δ_3), на все три конгруэнции таким образом, чтобы получить (9) и (10), коэффициенты Риччи, удовлетворяют таблице (τ_1). Затем предлагается подбор факторов ρ_2 и ρ_1 при посредстве (15), предположив, что разновидность не является линейчатой.

Во второй части работы сначала определяются разновидности, (T_{12}) вдоль которых коэффициенты Риччи удовлетворяют условиям (11), (12), (13), (15), (31), (34), (37). Затем определяются разновидности, вдоль которых будем иметь условия (12), (13), (15), (49), (50), (55). Разновидности (T_3) определяются из предыдущих, поставив еще условия (57). При этих предположениях разновидности имеют коэффициенты Риччи, приведенные в таблице из (№ 9), где $\gamma_{11}^1, \gamma_{11}^2, \gamma_{12}^3, \gamma_{21}^3, \gamma_{22}^2$ удовлетворяют системе (62) или (63). Эти разновидности в то же время являются T_{3456} ; вдоль них разновидности (V^1) и (V_2) являются голономными.

SUR LES VARIÉTÉS NONHOLONOMES TÎȚEICA

(Résumé)

On commence par une classification des variétés nonholonomes Tîțeica en partant des propriétés caractéristiques connues des surface Tîțeica. On peut faire la classification suivante:

a) les variétés (T_1) le long desquelles le rapport $\frac{K_1}{d^4}$ est constant, K_1 étant la première courbure totale métrique de la variété et d la distance de l'origine au plan tangent; b) les variétés (T_2) le long desquelles le rapport $\frac{K_1}{d^4}$ est constant où K_2 est la deuxième courbure totale métrique; c) les variétés (T_3) le long desquelles la normale affine passe par un point fixe; d) les variétés (T_4) le long desquelles la première normale projective passe par un point fixe; e) les variétés (T_5) le long desquelles la deuxième normale affine reste dans un plan fixe; f) les variétés (T_6) dont les développables asymptotiques des surfaces réglées asymptotiques sont des cônes du même sommet; g) les variétés (T_7) dont les lignes flecnodales de réglées asymptotiques sont planes et confondues dans le plan de l'infini. Nous désignons par ($Tab \dots$) une variété qui est en même temps (Ta), (Tb), ...

Dans la première partie on commence une étude centro-affine d'une variété (V^3) en associant encore deux variétés (V^1) et (V^2) telles qu'elles se coupent deux à deux d'après trois congruences des courbes (C_n) parmi lesquelles deux soient formées par les congruences des asymptotiques de la variété (V^3) et la troisième formée par les droites qui passent par le point courant et l'origine. On peut choisir les facteurs de proportionnalités ρ_1, ρ_2, ρ_3 sur les trois congruences tels que nous ayons (9) et (10). Dans ces conditions, les coefficients de Ricci satisfont aux conditions du tableau (T_1). On propose ensuite de choisir les facteurs ρ_1 et ρ_2 par la relation (15) dans l'hypothèse où la variété n'est pas réglée.

Dans la deuxième partie, on détermine premièrement les variétés (T_{12}) le long desquelles les coefficients de *Ricci* satisferont aux conditions (11), (12), (13), (15), (31), (34)–(47). Ensuite on détermine les variétés (T_3) le long desquelles nous aurons les conditions (12), (13), (15), (49), (50)–(55). Les variétés (T_{12}) appartiennent aux précédentes avec les conditions (57) de plus. Dans ces hypothèses les variétés ont les coefficients de *Ricci* écrits dans le tableau (no.9) et où $\gamma_{11}^1, \gamma_{11}^2, \gamma_{12}^3, \gamma_{21}^3, \gamma_{22}^2$ satisfont au système (62) ou (63). Ces variétés sont en même temps (T_{3456}) ; pour elles, les variétés (V^1) et (V^2) sont holonomes.

SUPRAFEȚE RIGLATE NORMALE ASOCIATE UNEI SUPRAFEȚE NEDESFĂȘURABILE

de

TIBERIU MIHĂILESCU

În studiul diferențial proiectiv al suprafețelor din spațiul obișnuit intervin, în mod frecvent, congruențe binare de drepte asociate în mod intrinsec unei suprafețe date și care introduc figuri avînd un rol important în determinarea proprietăților suprafeței. Astfel, sînt întrebuițate congruențele transversale și congruențele tangențiale, denumite și congruențe de clasa I respectiv de clasa II ([2], p. 276).

Vom arăta, în cele ce urmează, că între suprafețele riglate nedesfășurabile, care pot fi formate cu dreptele unor astfel de congruențe, poate fi introdusă o relație de natură intrinsecă și proiectivă, numită relație de normalitate.

Această relație, considerată anterior de E. C a r t a n [1] ca o generalizare, în cadrul grupului proiectiv, a relației de ortogonalitate metrică a două suprafețe riglate nedesfășurabile avînd o generatoare comună, permite stabilirea unor noi proprietăți diferențiale proiective ale congruențelor menționate și deci ale suprafețelor de bază cărora aceste figuri le sînt asociate.

1. Fie (Γ) o congruență transversală determinată asociată unei suprafețe date neriglate (S) , reportată la o familie de repere asimptotice (R_3) .

Coordonatele pluckeriene ale dreptelor (Δ_r) ale congruenței sînt de forma

$$\Delta_r = [A_0, P]$$

unde

$$P = x A_1 + y A_2 + A_3. \quad (1)$$

Funcțiile x, y — numite *parametrii congruenței* — depind de parametri principali și de cei secundari ai familiei de repere (R_3) și verifică sistemul P f a f f (17) ([2], p. 277).

Fie (C_σ) o curbă prin A_0 a suprafeței (S) tangentă în acest punct la dreapta

$$[A_0, A_1 + \sigma A_2] \quad (2)$$

Dreptele (Δ_I) ale congruenței (Γ) , care sînt incidente cu punctele curbei (C_o) , formează o suprafață riglată (R_o) .

Coordonatele planului tangent la această suprafață în punctul

$$M = t A_0 + P \quad (3)$$

al dreptei (Δ_I) asociată punctului A_0 sînt:

$$\begin{aligned} \tau_o &= [A_0, P, M + dM] = \\ &= [A_0, P, (t\omega_{01} + p_1 - x p_3) A_1 + (t\omega_{02} + p_2 - y p_3) A_2] \end{aligned} \quad (4)$$

unde:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= dx + x\omega_{11} + y\omega_{21} + \omega_{31}, \\ p_2 &= dy + x\omega_{12} + y\omega_{22} + \omega_{32}, \\ p_3 &= x\omega_{13} + y\omega_{23} + \omega_{33}. \end{aligned} \right\}$$

Se știe că între punctele unei generatoare rectilinii a unei suprafețe riglate nedesfășurabile și planele tangente la această suprafață în punctele generatoarei considerate există o corespondență proiectivă care este numită corelația principală asociată generatoarei ([2], p. 228).

Scriind coordonatele unui plan, care conține dreapta (Δ_I) , sub forma:

$$[A_0, P, A_1] + t'[A_0, P, A_2] \quad (5)$$

valoarea parametrului t' , care corespunde planului tangent π_o , este dată de relația

$$(t\omega_{02} + p_2 - y p_3) - t'(t\omega_{01} + p_1 - x p_3) = 0 \quad (6)$$

care, ținînd seamă de relațiile (19) ([2], p. 277), se scrie sub forma:

$$(f'_1 \omega_{01} + g'_1 \omega_{02} + t\omega_{02}) - t'(t_1 \omega_{01} + g_1 \omega_{02} + t\omega_{01}) = 0 \quad (7)$$

coeficienții f_1, f'_1, g_1, g'_1 fiind dați de relațiile (19') ([2], p. 278).

Introducînd coeficientul director σ al tangentei în A_0 la curba directoare (C_o) , a suprafeței riglate (R_o) , ecuația corelației principale, dedusă din (7), este

$$tt' + at' - \sigma t - b = 0 \quad (8)$$

unde:

$$a = f_1 + \sigma g_1, \quad b = f'_1 - \sigma g'_1 \quad (9)$$

Fie $(C_{o_1}), (C_{o_2})$ două curbe ale suprafeței (S) , care conțin punctul A unde ele au tangente distincte $(\sigma_1 \neq \sigma_2)$.

Suprafețele riglate $(R_{o_1}), (R_{o_2})$, care aparțin congruenței (Γ) și au curbele considerate drept curbe directoare, au în comun o generatoare rectilinie care este însăși dreapta (Δ_I) a congruenței (Γ) asociată punctului A_0 .

Produsul celor două corelații principale asociate acestei generatoare comune în raport cu cele două suprafețe riglate cărora aparține este o corespondență omografică între planele fasciculului care are dreapta (Δ_I) ca

axă, corespondentul unui plan π_{σ_1} din fascicul, care este tangent la (R_{σ_1}) într-un punct M al dreptei (Δ_I) , fiind planul π_{σ_2} care este tangent la (R_{σ_2}) în același punct M .

În cazul în care această omografie este o involuție se spune că suprafețele riglate considerate (R_{σ_1}) , (R_{σ_2}) se intersectează armonic [1] sau că sînt *normale*.

Dacă:

$$tt'_1 + a^{(1)}t'_1 - \sigma_1 t - b^{(1)} = 0, \quad (10)$$

$$tt'_2 + a^{(2)}t'_2 - \sigma_2 t - b^{(2)} = 0, \quad (11)$$

unde

$$a^{(i)} = f_1 + \sigma_i g_2, \quad b^{(i)} = f'_1 + \sigma_i g'_1 \quad (i = 1, 2)$$

sînt ecuațiile corelațiilor principale asociate dreptei (Δ_I) relativ la cele două suprafețe riglate, rezultă — prin eliminarea argumentului t — ecuația corespondenței omografice între planele tangente la suprafețele riglate (R_{σ_1}) , (R_{σ_2}) în punctele drepte (Δ_I) :

$$(a^{(2)} - a^{(1)})t'_1 t'_2 + (\sigma_2 a^{(1)} - b^{(2)})t'_1 + (b^{(1)} - \sigma_1 a^{(2)})t'_2 + (\sigma_2 b^2 - \sigma_1 b^{(1)}) = 0 \quad (12)$$

Se deduce că relația

$$\sigma_1 a^{(2)} + \sigma_2 a^{(1)} = b^{(1)} + b^{(2)} \quad (13)$$

exprimă condiția necesară și suficientă ca suprafețele riglate considerate (R_{σ_1}) , (R_{σ_2}) să fie normale.

Se observă că definiția suprafețelor riglate normale este mult mai generală deoarece ea este valabilă pentru două suprafețe riglate nedesfășurabile arbitrare care au o generatoare rectilinie comună de-a lungul căreia cele două suprafețe nu sînt tangente.

Figura a fost considerată pentru prima dată de E. Cartan care a întrebuițat-o în definirea evolventelor unei suprafețe riglate date [1].

În cazul unei congruențe tangențiale (Γ) asociată suprafeței (S) , dreptele (Δ_{II}) ale acestei congruențe, care sînt situate în planele tangente la (S) în punctele curbilor (C_{σ_1}) , (C_{σ_2}) , formează două suprafețe riglate (R_{σ_1}) , (R_{σ_2}) care au în comun dreapta (Δ_{II}) asociată punctului A_0 .

Condiția necesară și suficientă de normalitate a celor două suprafețe riglate (R_{σ_1}) , (R_{σ_2}) este exprimată de relația:

$$\sigma_1 \bar{a}^{(2)} + \sigma_2 \bar{a}^{(1)} = \bar{b}^{(1)} + \bar{b}^{(2)} \quad (14)$$

unde:

$$a^{(i)} = f_2 + \sigma_i g_2, \quad \bar{b}^{(i)} = f'_2 + \sigma_i g'_2 \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

coeficienții f_2 , g_2 , f'_2 , g'_2 , fiind dați de relațiile (28') ([2], p. 280).

2. Dacă curba directoare (C_σ) a unei suprafețe riglate (R_σ) , care aparține unei congruențe date (Γ) — transversală sau tangențială în raport cu suprafața (S) — este o linie asimptotică a suprafeței (S) , suprafața riglată (R_σ)

se numește *suprafață riglată asimptotică* a congruenței considerate relativ la suprafața (S).

Fiind dată o congruență transversală (Γ), ecuațiilec relațiilor principale relative la cele două suprafețe riglate asimptotice, care conțin dreapta (Δ_I) a congruenței date asociată punctului A_0 , sînt :

$$\begin{aligned} u'_1 + f_1 t'_2 - f'_1 &= 0, \\ g_2 t'_2 - t - g'_1 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

după cum se deduce din (7) pentru variațiile care verifică relația

$$\omega_{02} = 0,$$

respectiv

$$\omega_{01} = 0.$$

Eliminarea argumentului t din relațiile (16) conduce la ecuația omografiei relative la planele tangente la cele două suprafețe riglate asimptotice în punctele dreptei (Δ_I):

$$g_1 t'_1 t'_2 + (f_1 - g'_1) t'_1 + f'_1 = 0 \quad (17)$$

Suprafețele riglate asimptotice considerate sînt normale dacă există relația:

$$f_1 - g'_1 = 0$$

adică

$$\xi_1 - \eta_2 = \mu - \nu \quad (18)$$

În acest caz, congruența transversală (Γ) este conjugată suprafeței (S). ([2], (38), p. 280)

Prin urmare, cele două suprafețe riglate asimptotice ale unei congruențe transversale (Γ) sînt normale dacă congruența (Γ) este conjugată în raport cu suprafața (S) și numai în acest caz.

Într-un mod asemănător se stabilește că suprafețele riglate asimptotice ale unei congruențe tangențiale sînt normale dacă congruența este armonică în raport cu suprafața de bază (S) și numai în acest caz.

Așadar proprietatea de normalitate a suprafețelor riglate asimptotice ale unei congruențe de clasa I sau de clasa II este caracteristică pentru congruențele conjugate respectiv armonice în raport cu (S).

Pentru anumite congruențe de drepte asociate unei suprafețe, suprafețele riglate asimptotice nu îndeplinesc condiția de normalitate decît numai în cazul în care suprafața de bază aparține unei clase particulare. Astfel, ([2], p. 343) suprafețele riglate asimptotice ale congruențelor formate cu dreptele lui Wilczynski sînt normale dacă suprafața de bază (S) este izotermo-asimptotică.

3. Fie (C_σ), ($C_{-\sigma}$) curbele unei rețele conjugate care conțin punctul A_0 .

Suprafețele riglate, care aparțin unei congruențe (Γ) — transversală sau tangențială — și care au drept curbe directoare cele două curbe considerate, se numesc *suprafețe riglate conjugate* ale congruenței (Γ).

În cazul unei congruențe (Γ) transversale, condiția de normalitate a două suprafețe riglate conjugate (R_σ) , $(R_{-\sigma})$ devine:

$$\sigma(\xi_1 + \eta_2) + a_3 x + c_3 \sigma^2 y + \lambda + \sigma^2 \rho - b(y^2 + \sigma^2 x^2) = c \quad (19)$$

În particular, pentru congruența dreptelor lui Wilczynski $[A_0, A_3]$ există relațiile:

$$x = y = 0, \quad \xi_1 = \eta_2 = 0$$

deci relația (19) este

$$\lambda + \sigma^2 \rho = 0 \quad (20)$$

Prin urmare, în congruența transversală formată de dreptele lui Wilczynski $[A_0, A_3]$ fiecare dreaptă a congruenței aparține numai la două suprafețe riglate conjugate ale congruenței care sînt în relație de normalitate.

Aceste suprafețe riglate conjugate normale au drept curbe directoare curbele rețelei conjugate definită de ecuația diferențială

$$\lambda \omega_{01}^2 + \rho \omega_{02}^2 = 0 \quad (21)$$

Pentru o congruență tangențială condiția de normalitate a două suprafețe riglate conjugate este:

$$\sigma(\xi_2 + \bar{\eta}_1) - (c_3 \sigma^2 \bar{x} + a_3 \bar{\lambda}) + b_2(\lambda + \sigma^2 \rho) - (\bar{x}^2 + \sigma^2 \bar{y}^2) = 0 \quad (22)$$

În cazul congruențelor dreptelor lui Wilczynski $[A_1, A_2]$, există numai două suprafețe riglate conjugate care conțin o dreaptă determinată a congruenței și care sînt în relație de normalitate.

Ele corespund aceleiași rețele conjugate (21).

4. În cazul în care suprafața (S) este raportată la o familie de repere (R_i) aderentă unei rețele conjugate date, condițiile de normalitate a două suprafețe riglate care aparțin unei aceleiași congruențe (Γ) — transversală sau tangențială — păstrează aceleași forme (13) și (14), coeficienții (11) și (15) fiind calculați cu funcțiile f'_i, f''_i, g'_i, g''_i ($i = 1, 2$) date de formulele (150) și (151) ([2], p. 395).

Suprafețele riglate ale congruenței (Γ) care corespund curbelor rețelei conjugate, la care este aderentă familia de reper considerată (R_i) , se numesc *suprafețe riglate conjugate principale* ale congruenței (Γ) .

O congruență (Γ) — transversală sau tangențială — se numește congruență normală în raport cu o rețea conjugată dată ([2], p. 396) dacă figura formată de tangentele la curbele focale ale congruenței și tangentele la curbele rețelei conjugate este un sistem armonic.

Relațiile

$$\begin{aligned} f_1 &= g'_1 = 0, \\ a_2 g_2 &= c_2 f'_2 = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

exprimă condițiile necesare și suficiente ca o congruență transversală, respectiv tangențială, să fie normală în raport cu rețeaua conjugată de bază.

Din (13) și (14) se deduce că relațiile (23) exprimă și condițiile necesare și suficiente de normalitate a suprafețelor riglate conjugate principale ale congruențelor considerate.

Prin urmare, o congruență (Γ) — transversală sau tangențială — este normală în raport cu o rețea conjugată dacă cele două suprafețe riglate conjugate principale ale ei sînt normale și reciproc.

5. Rezultatele expuse rămîn valabile și în cazul în care suprafața de bază (S) este o suprafață riglată nedesfășurabilă, relațiile analitice fiind supuse unor ușoare modificări datorite introducerii valorii

$$a_3 = 0$$

([2] p. 220) în cazul întrebuițării familiei de repere asimptotice (K_3).

BIBLIOGRAFIE

1. Cartan, É., *Sur les développantes d'une surface réglée*. „Bull. Acad. Roumaine”, 14, p. 167—174.
2. Mihăilescu, Tiberiu, *Geometrie diferențială proiectivă*. Ed. Acad. R.P.R., 1958.

НОРМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К НЕРАЗВЕРТЫВАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Резюме)

Используя понятие о нормальных линейчатых поверхностях, рассмотренное раньше Е. Картаном, [1], автор устанавливает несколько результатов относительно нормальных линейчатых поверхностей, принадлежащих конгруенциям прямых, присоединенных к данной поверхности в обычном проекционном пространстве.

LES SURFACES RÉGLÉES NORMALES ASSOCIÉES À UNE SURFACE NON-DÉVELOPPABLE

(Résumé)

En utilisant la notion de surfaces réglées normales, considérée antérieurement par E. Cartan [1], l'auteur établit quelques résultats concernant les surfaces réglées normales appartenant aux congruences de droites associées à une surface de l'espace projectif ordinaire.

APLICAREA ÎN GEOMETRIA NEEUCLIDIANĂ A NOȚIUNII DE NORMĂ A UNEI MATRICI

de

N. MIHĂILEANU (București)

Într-un spațiu neeuclidian tridimensional, de curbură $1:q^2$ considerăm m puncte X_i ($i = 1, 2, \dots, m$) de coordonate omogene x_i^k ($k = 0, 1, 2, 3$), și formăm matricea

$$[X_1 X_2 \dots X_m] = \begin{vmatrix} qx_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ qx_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ qx_m^0 & x_m^1 & x_m^2 & x_m^3 \end{vmatrix}$$

Admitem pentru două matrici o operație de înmulțire *pe linii*. Numim *normă* a unei matrici, rădăcina pătrată pozitivă din determinantul patratului matricei. Notăm norma printr-o bară superioară.

$$\overline{X_1 X_2 \dots X_m}^2 = \begin{vmatrix} X_1^2 & X_1 \cdot X_2 & \dots & X_1 \cdot X_m \\ X_1 \cdot X_2 & X_2^2 & \dots & X_2 \cdot X_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1 \cdot X_m & X_2 \cdot X_m & \dots & X_m^2 \end{vmatrix}$$

produsele scalare fiind efectuate în sensul matricei neeuclidiene

$$X_i \cdot X_j = q^2 x_i^0 x_j^0 + x_i^1 x_j^1 + x_i^2 x_j^2 + x_i^3 x_j^3$$

În virtutea identității B i n e t*, patratul normei unei matrici este rădăcina patrată din suma patratelor tuturor minorilor de ordin maxim.

* A se vedea T h. A n g h e l u ț ă : *Curs de Algebră Superioară*, vol. I, 1943, p. 84.

Aceeași noțiune poate să fie introdusă relativ la m plane $\xi_i (i = 1, 2, \dots, m)$ de coordonate omogene $\xi_{ik} (k = 0, 1, 2, 3)$ dar formăm matricea cu coordonatele planelor, astfel

$$\| \xi_1 \xi_2 \dots \xi_m \| = \begin{vmatrix} \xi_{10} & q\xi_{11} & q\xi_{12} & q\xi_{13} \\ \xi_{20} & q\xi_{21} & q\xi_{22} & q\xi_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{m0} & q\xi_{m1} & q\xi_{m2} & q\xi_{m3} \end{vmatrix}$$

Cu ajutorul noțiunii de normă a unei matrici putem să exprimăm simplu, multe formule care intervin în geometrie.

Exemple: Condiția ca trei puncte X, Y, Z să fie coliniare sau patru puncte X, Y, Z, T să fie coplanare se scrie

$$\overline{XYZ} = 0 \quad \text{respectiv} \quad \overline{XYZT} = 0$$

Condiția ca trei plane ξ, η, ζ să aibă o dreaptă comună sau ca patru plane ξ, η, ζ, θ să fie concurente se scrie

$$\overline{\xi\eta\zeta} = 0 \quad \text{respectiv} \quad \overline{\xi\eta\zeta\theta} = 0$$

Dacă XY este distanța dintre două puncte X, Y și $\xi\eta$ unghiul a două plane ξ, η

$$q^2 \sin \frac{XY}{q} = \overline{XY}, \quad q^2 \sin \xi\eta = \overline{\xi\eta}$$

Distanța de la punctul Z la dreapta determinată de punctele X, Y este dată de

$$q \sin \frac{Z, XY}{q} = \frac{\overline{XYZ}}{\overline{XY}}$$

Unghiul planului ζ cu dreapta $\xi\eta$ de intersecție a planelor ξ, η este dat de

$$q \sin (\zeta, \xi\eta) = \frac{\overline{\xi\eta\zeta}}{\xi\eta}$$

Distanța de la punctul T la planul XYZ

$$q \sin \frac{T, XYZ}{q} = \frac{\overline{XYZT}}{\overline{XYZ}}$$

Distanța planului θ la punctul O , comun planelor ξ, η, ζ

$$q \sin \frac{O, \theta}{q} = \frac{\overline{\xi\eta\zeta\theta}}{\xi\eta\zeta}$$

Unghiul u a două drepte concurente, determinate de punctele X, Y respectiv X, Z

$$\sin u = q \frac{\overline{XYZ}}{\overline{XYXZ}}$$

Lungimea δ a perpendicularei comune a două drepte coplanare, determinate de planele ξ, η respectiv ξ, ζ

$$\sin \frac{\delta}{q} = q \frac{\overline{\xi \eta \zeta}}{\overline{\xi \eta} \overline{\xi \zeta}}$$

Două drepte determinate de punctele X, Y respectiv Z, T admit două perpendiculare comune, de lungimi δ_1, δ_2 astfel că

$$\sin \frac{\delta_1}{q} \sin \frac{\delta_2}{q} = \frac{\overline{XY ZT}}{\overline{XY} \overline{ZT}}$$

Dacă $OO_1O_2O_3$ este un reper de referință și $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ planele lui atunci coordonatele unui punct X sînt date de

$$qx^0 = \frac{\overline{XO_1O_2O_3}}{\overline{O_1O_2O_3}}, \quad x^1 = \frac{\overline{XOO_2O_3}}{\overline{OO_2O_3}} \text{ etc}$$

Coordonatele unui plan ξ sînt date de

$$\xi_0 = \frac{\overline{\xi \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}}{\overline{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}}, \quad q \xi_1 = \frac{\overline{\xi \sigma \sigma_2 \sigma_3}}{\overline{\sigma \sigma_2 \sigma_3}} \text{ etc}$$

Coordonatele (plückeriene) ale unei drepte determinate de punctele X, Y sau de planele ξ, η sînt date de

$$qu^{01} = \frac{\overline{XYO_2O_3}}{\overline{XYO_2O_3}} = \frac{\overline{\xi \eta \sigma \sigma_1}}{\overline{\xi \eta} \overline{\sigma \sigma_1}} \text{ etc.}$$

$$u^{23} = \frac{\overline{XYOO_1}}{\overline{XY} \overline{OO_1}} = \frac{\overline{\xi \eta \sigma_2 \sigma_3}}{\overline{\xi \eta} \overline{\sigma_2 \sigma_3}} \text{ etc}$$

ПРИМЕНЕНИЕ В НЕЭВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОНЯТИЯ НОРМЫ МАТРИЦЫ

(Резюме)

С помощью понятия нормы матрицы можно просто выражать многие формулы, встречающиеся в геометрии.

L'APPLICATION EN GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE DE LA NOTION DE NORME D'UNE MATRICE

(Résumé)

On peut exprimer simplement, à l'aide de la notion de norme d'une matrice, beaucoup de formules qui interviennent en géométrie.

DESPRE CURBELE POLARE GENERALIZATE ALE CURBELOR ALGEBRICE PLANE

de

B. ORBĂN

Lucrarea de față generalizează curbele polare ale unui punct P în raport cu o curbă algebrică dată, înlocuind punctul P cu punctele unei curbe algebrice C , iar fasciculul de drepte cu centrul în P cu tangentele aceleiași curbe.

DEFINIȚIE. Se consideră în planul proiectiv complex două curbe algebrice K și C . Fie P un punct al curbei C . Tangenta la C în P intersectează curba polară de ordinul p a punctului P în raport cu curba K în punctele $M_1, M_2, \dots, M_{r-p}$, unde r este ordinul curbei K . Curba descrisă de punctele $M_1, M_2, \dots, M_{r-p}$ când punctul P descrie curba C , o vom numi „curbă polară generalizată de ordinul p a curbei C în raport cu curba K ” și o vom nota cu $\Gamma^{(p)}$. Din definiție rezultă imediat că $\Gamma^{(p)}$ este o curbă algebrică. În cazul particular când curba C se reduce la un punct, $\Gamma^{(p)}$ este curba polară de ordinul p a punctului C în raport cu K .

Curbele polare astfel generalizate se pot aplica mai ales la studiul problemelor legate de două curbe algebrice. În această lucrare vom studia proprietățile fundamentale ale acestor curbe polare generalizate, și le vom aplica la studiul curbelor algebrice generale.

Unele proprietăți ale curbelor polare generalizate sînt analoage cu proprietățile cunoscute ale curbelor polare. Proprietățile fundamentale ale acestor curbe sînt exprimate în teoremele 1—7.

Prima teoremă se referă la ordinul curbei $\Gamma^{(p)}$.

TEOREMA 1. Notînd cu r ordinul curbei K , cu n și m ordinul și clasa curbei C , ordinul s al curbei polare generalizate $\Gamma^{(p)}$ a curbei C în raport cu K este:

$$s = p(n - m) + mr.$$

Demonstrație. Ținînd seama de definiția curbei $\Gamma^{(p)}$ și de o proprietate cunoscută a curbelor polare se vede ușor, că un punct arbitrar P din plan se află pe curba $\Gamma^{(p)}$ atunci și numai atunci, dacă cel puțin unul dintre punctele de intersecție ale primei curbe polare a punctului P în raport cu

curba C și curbei polare de ordinul $r - p$ a aceluiaș punct în raport cu curba K este un punct simplu al curbei C , (sau dacă cel puțin k puncte de intersecție ale acestor două curbe coincid cu un punct multiplu de ordinul k al curbei C .) Să notăm ecuațiile acestor curbe cu $C^{(1)}(M|P)=0$, $K^{(r-p)}(M|P)=0$, raportate la un reper proiectiv arbitrar în plan, M fiind punctul curent. Fie Δ o dreaptă oarecare din plan, determinată prin două puncte fixe P_1 și P_2 , iar $P = P_1 + P_2\lambda$ un punct arbitrar pe Δ . Vom căuta ce curbă descriu punctele comune ale curbelor $C^{(1)}(M|P) = 0$ și $K^{(r-p)}(M|P)=0$, cînd punctul P se mișcă pe dreapta Δ . Putem scrie:

$$C^{(1)}(M|P) = C^{(1)}(M|P_1 + \lambda P_2) = C^{(1)}(M|P_1) + \lambda C^{(1)}(M|P_2) = 0 \quad (12)$$

și

$$K^{(r-p)}(M|P_1 + \lambda P_2) = K^{(r-p)}(M|P_1) + \lambda K_1(M, P_1, P_2) + \lambda^2 K_2(M, P_1, P_2) + \dots + \lambda^{r-p-1} K_{r-p-1}(M, P_1, P_2) + \lambda^{r-p} K^{(r-p)}(M|P_2) = 0, \quad (2)$$

unde $K_1, K_2, \dots, K_{r-p-1}$ sînt forme algebrice de ordinul $r - p$ în coordonatele x_1, x_2, x_3 ale punctului M . Eliminînd pe λ dintre ecuațiile (1) și (2) găsim:

$$K^{(r-p)}(M|P_1) [C^{(1)}(M|P_2)]^{r-p} + K_1(M, P_1, P_2) C^{(1)}(M|P_1) C^{(1)}(M|P_2)^{r-p-1} + \dots + \dots + K^{(r-p)}(M|P_2) [C^{(1)}(M|P_2)]^{r-p} = 0 \quad (3)$$

Gradul acestei ecuații în x_1, x_2, x_3 , este $p + (n - 1)(r - p)$, deci ecuația (3) reprezintă o curbă algebrică G de ordinul $p + (n - 1)(r - p)$. Numărul punctelor comune ale curbelor C și G este egal, conform afirmației enunțate la începutul demonstrației, cu numărul punctelor comune ale curbei $\Gamma^{(p)}$ și dreptei Δ . Curbele C și G se intersectează după $n[p + (n - 1)(r - p)]$ puncte. Dar ținînd seamă că, curbele polare de ecuații $C^{(1)}(M|P_1) = 0$ și $C^{(1)}(M|P_2) = 0$ trec prin punctele nodale ale curbei C și sînt tangente la C în punctele cuspidale, din ecuația (3) rezultă că punctele duble ale curbei C sînt puncte multiple de ordinul $r - p$ pentru curba G . Deci numărul punctelor comune ale curbelor C și G , diferite de punctele duble ale lui C este

$$s = n[p + (n - 1)(r - p)] - (r - p)(2d + 3k)$$

unde d și k reprezintă numărul punctelor nodale și cuspidale ale curbei C . Conform primei formule a lui Plücker:

$$2d + 3k = n(n - 1) - m$$

Deci

$$s = n[p + (n - 1)(r - p)] - (r - p)[n(n - 1) - m]$$

sau

$$s = p(n - m) + mr.$$

Fiindcă dreapta arbitrară intersectează pe $\Gamma^{(p)}$ în s puncte, teorema este demonstrată.

Consecință. Dacă curba C este o curbă autoduală ($n = m$), ordinul curbelor polare generalizate nu depinde de p .

În cazul particular când C este un punct, adică $n = 0$ și $m = 1$, regăsim ordinul cunoscut al curbei polare de ordinul p al punctului C în raport cu K : $s = r - p$.

TEOREMA 2. Toate curbele polare generalizate sînt tangente la C în punctele comune ale curbelor K și C .

Demonstrație. Fie M un punct comun al curbelor K și C . Conform proprietății cunoscute a curbelor polare, curba polară $K^{(p)}$ pe ordinul p a punctului M în raport cu curba K , este tangentă în M la K și astfel tangenta t dusă în M la C intersectează curba $K^{(p)}$ în M , deci pe baza definiției $\Gamma^{(p)}$ trece prin M .

Se consideră acum un punct N pe curba K , în vecinătatea punctului M . Dintre cele m tangente, pe care le putem duce din N la curba C , cel puțin două, t_1, t_2 , au puncte de contact T_1 și T_2 în vecinătatea punctului M . Fiindcă curba polară de ordinul p a punctului M în raport cu K trece prin M , curbele polare de ordinul p ale punctelor T_1 și T_2 vor intersecta tangentele t_1 respectiv t_2 cel puțin într-un punct P_1 pe t_1 și într-un punct P_2 pe t_2 , situate în vecinătatea punctului M . Conform definiției, P_1 și P_2 sînt punctele curbei $\Gamma^{(p)}$. Dacă punctul N tinde către M , P_1 și P_2 vor tinde către M , iar poziția limită a tangentelor t_1 și t_2 fiind tangenta t dusă în M la C , dreapta P_1P_2 are deasemenea această tangentă drept poziția limită. Deci t este tangentă în M și la curba $\Gamma^{(p)}$, ceea ce era de demonstrat.

Consecință. Dacă curbele K și C sînt tangente într-un punct, toate curbele polare generalizate vor fi tangente la K în acest punct.

Următoarele trei teoreme se referă la efectele singularităților curbelor K și C asupra curbei $\Gamma^{(p)}$.

TEOREMA 3. Dacă punctul M este un punct multiplu de ordinul k al curbei K , acest punct este un punct multiplu de ordinul $m(k - p)$ pentru curba $\Gamma^{(p)}$, dacă $k > p$. În cazul când $k \leq p$, curba $\Gamma^{(p)}$ nu trece prin M . În special, dacă M este un punct cuspidal al curbei K , el este un punct cuspidal și pentru $\Gamma^{(p)}$ și tangentele cuspidale coincid.

Demonstrație. Fie M un punct multiplu de ordinul k al curbei K și să considerăm tangentele $t_1, t_2, \dots, t_m$ duse din M la C (m fiind clasa lui C) și notăm cu $T_1, T_2, \dots, T_m$ punctele lor de contact cu C . Curbele polare ale punctelor T_i ($i = 1, 2, \dots, m$) în raport cu K , după cum se știe, au în M un punct multiplu de ordinul $k - p$ ($p < k$). Deci din definiția curbei $\Gamma^{(p)}$ rezultă că prin punctul M trec m ramuri ale curbei $\Gamma^{(p)}$, fiecare avînd în M cîte un punct multiplu de ordinul $k - p$. Rezultă că punctul M este un punct multiplu de ordinul $m(k - p)$ ($k > p$) pentru curba $\Gamma^{(p)}$. În special când M este un punct cuspidal de ordinul k cu tangenta cuspidală t , curbele polare ale punctelor T_m în raport cu curba K vor avea în M punct cuspidal de ordinul $k - p$; tangentele cuspidale fiind coincidente cu t .

Astfel și curba $\Gamma^{(p)}$ admite un punct cuspidal în M cu tangentă cuspidală t . Deci teorema este demonstrată.

După cum se vede ușor, punctele multiple nodale ale curbei C n-au efect asupra curbilor $\Gamma^{(p)}$. Referitor la punctele cuspidale ale curbei C , putem anunța următoarea teoremă:

TEOREMA 4. Dacă curba C are un punct cuspidal U , curba polară generalizată $\Gamma^{(p)}$ și curba polară $K^{(p)}$ a punctului U în raport cu curba K vor fi tangente în punctele unde tangenta cuspidală u intersectează curba $K^{(p)}$, adică în $r - p$ puncte.

Demonstrație. Să presupunem mai întâi că curba C are un punct dublu nodal într-un punct U și să notăm cu t' și t'' cele două tangente nodale. Curba polară de ordinul p al punctului U intersectează pe t' și t'' în punctele $P'_1, P'_2, \dots, P'_{r-p}$ respectiv în $P''_1, P''_2, \dots, P''_{r-p}$. Dacă acum tangentele t' și t'' tind către o dreaptă u , punctul U va deveni un punct cuspidal al curbei C , iar dreptele $P'_1 P''_1, P'_2 P''_2, \dots, P'_{r-p} P''_{r-p}$ vor tinde către tangentele curbei polare de ordinul p a punctului U în raport cu curba K duse în punctele ei de intersecție cu dreapta u . Fiindcă conform definiției punctele P'_i și P''_i ($i = 1, 2, \dots, r - p$) sînt punctele curbei $\Gamma^{(p)}$, teorema este demonstrată.

Observație. În mod analog se poate demonstra ușor că dacă U este un punct cuspidal de ordinul k al curbei C , curbele $\Gamma^{(p)}$ și $K^{(p)}$ vor avea un contact de ordinul k în punctele amintite mai sus.

TEOREMA 5. Tangenta inflexională i a curbei C este tangenta multiplă de ordinul $r - p$ a curbei polare generalizate $\Gamma^{(p)}$, punctele de contact fiind punctele de intersecție ale tangentei inflexionale cu curba polară de ordinul p a punctului de inflexiune I în raport cu curba K .

Demonstrație. Să presupunem că curba C are o tangentă dublă t , punctele de contact fiind T_1 și T_2 . Curbile polare de ordinul p ale punctelor T_1 și T_2 în raport cu curba K intersectează pe t în punctele $P_1, P_2, \dots, P_{r-p}$, respectiv în punctele $Q_1, Q_2, \dots, Q_{r-p}$, care în același timp sînt puncte și ale curbei $\Gamma^{(p)}$. Dacă T_1 și T_2 tind către un punct I pe tangenta t , punctul I va deveni un punct de inflexiune al curbei C , iar punctele P_α și Q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, r - p$) vor tinde către punctele de intersecție R_α ale curbei polare de ordinul p a punctului I în raport cu K , cu tangenta inflexională i ($\alpha = 1, 2, \dots, r - p$). Fiindcă astfel tangenta inflexională i intersectează curba $\Gamma^{(p)}$ în $r - p$ puncte confundate două câte două cu punctele R_α , i este o tangentă multiplă a acestei curbe.

Dintre curbele polare generalizate prima ($\Gamma^{(1)}$) și ultima ($\Gamma^{(r-1)}$) joacă un rol deosebit, datorită proprietății exprimate în următoarele teoreme:

TEOREMA 6. Punctele comune ale curbilor K și $\Gamma^{(1)}$, diferite de punctele de intersecție ale curbilor K și C , și de punctele duble ale curbei K , coincid cu punctele de contact ale tangentelor comune la curbele K și C , așezate pe curba K .

Demonstrație. Mai, întâi demonstrăm că $\Gamma^{(1)}$ trece prin punctele de contact ale tangentelor comune ale curbelor K și C situate pe K . Fie t o tangentă comună a curbelor K și C , punctele de contact fiind T_1 (pe K) și T_2 (pe C). Fiindcă prima curbă polară a punctului T_2 în raport cu curba K , trece prin punctele de contact ale tangentelor duse prin T_2 la curba K , ea trece și prin T_1 . Deci conform definiției, și curba $\Gamma^{(1)}$ trece prin punctul T_1 . Rămîne să demonstrăm că în afară de aceste puncte de contact, în afară de punctele comune ale curbelor K și C și punctele duble ale curbei K , curbele $\Gamma^{(1)}$ și K nu au alte puncte comune. Fiindcă gradul curbei $\Gamma^{(1)}$ conform teoremei 1 este $s = n - m + mr$, curbele K și $\Gamma^{(1)}$ au $N = r(n - m + r)$ puncte comune. Dintre aceste puncte fac parte punctele de contact ale tangentelor comune la curbele K și C care se găsesc pe K , adică mr' puncte, unde r' este numărul de clasă al curbei K . Din teorema 2. rezultă că printre punctele de intersecție ale curbelor K și $\Gamma^{(1)}$ găsim și punctele comune ale curbelor K și C , adică $n \cdot r$ puncte. În sfîrșit pe baza teoremei 3. punctele duble* ale curbei K sînt punctele multiple de ordinul m pentru curba $\Gamma^{(1)}$. Notînd cu d numărul punctelor duble nodale și cu k numărul punctelor duble cuspidale ale curbei K , ținînd seama de teorema 3., punctele duble ale curbei K sînt echivalente cu $m(2d + 3k)$ puncte comune ale curbelor K și $\Gamma^{(1)}$. Deci în total am găsit:

$$N' = mr' + nr + m(2d + 3k)$$

puncte comune.

Dar $r' = r(r - 1) - 2d - 3k$, conform primei formule a lui Plücker. Deci

$$N' = r(mr - m + n)$$

Acest număr fiind egal cu N , adică cu numărul total al punctelor de intersecție ale curbelor K și $\Gamma^{(1)}$, aceste curbe nu mai au puncte comune în afară de cele înșirate mai sus și astfel teorema este demonstrată.

Aplicație. Pe baza acestei proprietăți, primele curbe polare generalizate se pot aplica la determinarea punctelor de contact ale tangentelor comune a două curbe algebrice oarecare C_1 și C_2 . N-avem decît să considerăm prima curbă polară generalizată a curbei C_1 în raport cu C_2 , apoi cea a curbei C_2 în raport cu C_1 . Punctele de intersecție ale acestor curbe cu curba C_2 respectiv C_1 , abstracție făcînd de punctele comune ale curbelor C_1 și C_2 și de punctele multiple ale lor, vor fi punctele de contact căutate.

TEOREMA 7. Dacă curbele C și K sînt tangente într-un punct, ultima curbă polară generalizată $\Gamma^{(r-1)}$ va fi degenerată conținînd toate punctele tangentei comune duse în punctul T la curbele K și C .

Demonstrație. Conform proprietăților cunoscute ale curbelor polare, ultima curbă polară a punctului de contact comun T al curbelor K și C în raport cu K este tangentă la K în acest punct. Tangenta în T la curba

* Ne mărginim la punctele duble ale lui K , pentru că cazul în care K are puncte multiple de ordin mai înalt se reduce la cazul punctelor duble.

C și ultima curbă polară a punctului T în raport cu curba K fiind confundate, $\Gamma^{(r-p)}$ conține, pe baza definiției, toate punctele acestei tangente.

O curbă polară generalizată este asociată la două curbe algebrice K și C . Ea va fi asociată la o singură curbă algebrică K , dacă în locul curbei C vom lua o curbă algebrică derivată din curba K . De exemplu: curbele K și C coincid, adică considerăm curbele polare generalizate ale unei curbe algebrice în raport cu ea însăși. Din teorema 2. rezultă că în acest caz curba $\Gamma^{(p)}$ este degenerată conținând curba K de două ori. În afară de curba K , $\Gamma^{(p)}$ mai conține o curbă Γ' de ordinul:

$$s' = p(n - m) + mr - 2n.$$

Din definiția curbei $\Gamma^{(p)}$ rezultă că Γ' există numai în cazul când $n - p > 2$. Fiindcă $p \geq 1$, găsim că atunci $n > 3$. Curba Γ' este caracteristică pentru curba algebrică K , avînd o serie de proprietăți importante. Alte aplicații ale curbelor polare generalizate la studiul curbelor algebrice și la studiul citorva clase de curbe algebrice speciale vor fi tratate într-o altă lucrare.

BIBLIOGRAFIE

1. Meyer, W., Mohrmann, H., *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III, 2. I.
2. Salmon-Fiedler, *Höhere Kurven*.
3. H. Wieleitner, *Algebraische Kurven*, 1918.
4. R. J. Walker, *Algebraic Curves*, 1950.

ОБОБЩЕНИЕ ПОЛЯРНЫХ КРИВЫХ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПЛОСКОЙ АЛГЕБРИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

(Резюме)

Работа обобщает полярные кривые некоторой точки по отношению к алгебраической кривой следующим образом: в комплексной проективной плоскости рассматриваются две алгебраические кривые K и C . P являясь точкой кривой C , касательная к C в P пересекает полярную кривую порядка p точки P по отношению к кривой K в точках $M_1, M_2, \dots$. Если P описывает кривую C , кривая, описанная этими точками, является обобщенной полярной кривой $\Gamma^{(p)}$ порядка p кривой C по отношению к кривой K .

В работе доказываются основные свойства кривых $\Gamma^{(p)}$. Таким образом выводится, что порядок кривой $\Gamma^{(p)}$ есть $s = p(n - m) + mr$, где n и r являются порядками кривых C и K , а m — классом кривой C ; кривые $\Gamma^{(p)}$ касаются с C в общих точках кривых K и C . Рассматриваются действия особенностей кривых K и C на кривую $\Gamma^{(p)}$ и, наконец, изучаются кривые $\Gamma^{(p)}$ и показываются их применения при определении точек соприкосновения общих касательных к двум алгебраическим кривым.

SUR LES COURBES POLAIRES GÉNÉRALISÉES DES COURBES
ALGÈBRIQUES PLANES

(R é s u m é)

Cette étude généralise les courbes polaires d'un point par rapport à une courbe algébrique, de la manière suivante: on considère dans le plan projectif complexe deux courbes algébriques K et C . P étant un point de la courbe C , la tangente à C en P coupe la courbe polaire d'ordre p du point P par rapport à la courbe K aux points $M_1, M_2, \dots$. La courbe décrite par ces points lorsque P décrit la courbe C est la courbe polaire généralisée $\Gamma^{(p)}$ d'ordre p de la courbe C par rapport à la courbe K .

L'auteur démontre les propriétés fondamentales des courbes $\Gamma^{(p)}$. Il montre ainsi que l'ordre de la courbe $\Gamma^{(p)}$ est $s = p(n-m) + mr$, où n et r sont les ordres des courbes C et K , et m la classe de la courbe C . Les courbes $\Gamma^{(p)}$ sont tangentes à C aux points communs des courbes K et C . On étudie les effets des singularités des courbes K et C sur la courbe $\Gamma^{(p)}$ et, enfin, les courbes $\Gamma^{(1)}$ en montrant leurs applications à la détermination des points de contact des tangentes communes aux deux courbes algébriques.

LEGĂTURA ÎNTRE TRANSFORMAREA LUI ABEL ȘI TRANSFORMAREA LUI KUMMER

de
ANDREI NEY

Egalitatea

$$\sum_{v=n+1}^{n+k} a_v b_v = \sum_{v=n+1}^{n+k} A_v (b_v - b_{v+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k+1} \quad (1)$$

în care $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ respectiv $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ sînt șiruri de numere reale, $A_v = a_0 + a_1 + \dots + a_v$, n este un număr întreg nenegativ oarecare, iar k un număr natural oarecare, este cunoscută sub denumirea de transformarea lui Abel (sumarea parțială a lui Abel), [1].

Relația

$$R_n = \sum_{v=n+1}^{\infty} u_v = (1 + c_{n+1}) u_{n+1} + \sum_{v=n+1}^{\infty} \left[1 - \left(c_v \frac{u_v}{u_{v+1}} - c_{v+1} \right) \right] u_{v+1} \quad (2)$$

unde $\sum_0^{\infty} u_n$ este o serie convergentă cu termeni pozitivi, iar $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ un șir de numere pozitive astfel, ca relațiile la limită

$$\left. \begin{aligned} c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} &\rightarrow 1 & (n \rightarrow \infty) \\ c_n u_n &\rightarrow 0 & (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

să aibă loc, se numește transformarea lui Kummer, [2]. Prin această transformare — după cum se știe — calculul sumei seriei $\sum_0^{\infty} u_n$ se înlocuiește cu sumarea unei serii mai rapid convergente.

În cele ce urmează se arată, că relația (2) se poate obține din (1).

Considerînd seria convergentă, cu termeni pozitivi $\sum_0^{\infty} u_n$, există — în baza criteriului lui Kummer — un șir de numere pozitive $\{c_n\}$, astfel, ca

(3) să fie îndeplinită. Înlocuim în (1) $b_v = u_v$, $A_v = c_{v+1}$ deci $a_v = c_{v+1} - c_v = \Delta c_v$ și obținem

$$\sum_{v=n+1}^{n+k} u_v \Delta c_v = \sum_{v=n+1}^{n+k} c_{v+1} (u_v - u_{v+1}) = c_{n+1} u_{n+1} - c_{n+k+1} u_{n+k+1}. \quad (4)$$

Cuprinzînd cele două sume din (4) sub același semn al sumării, avem

$$0 = \sum_{v=n+1}^{n+k} [(c_{v+1} - \Delta c_v) u_v - c_{v+1} u_{v+1}] = c_{n+1} u_{n+1} - c_{n+k+1} u_{n+k+1},$$

de unde se obține, evident

$$0 = c_{n+1} u_{n+1} - c_{n+k+1} u_{n+k+1} + \sum_{v=n+1}^{n+k} - (c_v u_v - c_{v+1} u_{v+1}). \quad (5)$$

Egalitatea (5) se adună membru cu membru egalității

$$\sum_{v=n+1}^{n+k+1} u_v = u_{n+1} + \sum_{v=n+1}^{n+k} u_{v+1} \quad (6)$$

i astfel rezultă

$$\sum_{v=n+1}^{n+k} u_v = (1 + c_{n+1}) u_{n+1} - c_{n+k+1} u_{n+k+1} + \sum_{v=n+1}^{n+k} \left[1 - \left(c_v \frac{u_v}{u_{v+1}} - c_{v+1} \right) \right] u_{v+1}. \quad (7)$$

Făcînd să tindă k către infinit și ținîndu-se seama de condiția $\lim_{v \rightarrow \infty} c_v u_v = 0$ din (3), are loc relația (2), ceea ce trebuia dedus.

B I B L I O G R A F I E

1. К. К о р р, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Verlag von Julius Springer, Berlin 1931.
2. В. И. Р о м а н о в с к и й, *Введение в анализ*, „Избранные труды I.“ Издательство академии наук Узбекской СССР, Ташкент, 1959.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ АБЕЛЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ КУММЕРА

(Р е з ю м е)

Автор выводит преобразование Куммера (2) из преобразования Абеля (1).

LA RELATION ENTRE LA TRANSFORMATION D'ABEL ET LA TRANSFORMATION DE KUMMER

(R é s u m é)

L'auteur déduit la transformation de Kummer (2), de celle d'Abel (1).

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE COMPLET INTEGRABILE CARE GENERALIZEAZĂ SISTEMELE PFAFFIENE

de

ADOLF HAIMOVICI (Iași)

De curînd m-am ocupat de integrala sistemului

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x^1} &= f_1(x, u^{(1)}, u^{(2)}), \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x^2} = f_2(x, u^{(1)}, u^{(2)}), \\ \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x^1} &= g(x, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}), \quad \frac{\partial u^{(3)}}{\partial x^2} = h(x, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}),\end{aligned}$$

$u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$, fiind trei vectori cu cîte un număr oarecare de componente. Acesta se întîlnește cu ocazia studiului unor probleme de geometrie a spațiilor cu conexiune afină [3], [4].

Sistemul de mai sus poate fi generalizat pentru cazul a n variabile, cu mai mulți vectori necunoscuți. Pentru astfel de sisteme generalizate vom demonstra o teoremă de existență pe un domeniu $|x^i - x_0^i| < A$, atunci cînd funcțiunile din membrul al doilea sînt de clasă C^1 și mărginite pe:

$$|x^i - x_0^i| < A \quad -\infty < u^{(i)} < +\infty.$$

De altfel, acest domeniu se mai poate restrînge.

Dacă, pe de altă parte, în cele de mai sus A este oarecare, cu alte cuvinte dacă funcțiunile din membrul al doilea sînt mărginite pe orice domeniu mărginit din spațiul coordonatelor x^i , atunci integrala există în tot spațiul. Așa se petrec lucrurile atunci cînd funcțiunile f sînt liniare în $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$.

Se pot da, în sfîrșit, și condiții din care să rezulte caracterul mărginit al soluțiilor pe întregul spațiu al variabilelor. De acestea nu ne vom ocupa în Nota de față.

În modul acesta, teorema noastră de existență și de unicitate generalizează teoreme stabilite de T. Y. Thomas [9], Bruwier [2], W. Nikliborc, [6] D. Petrovanu [7].

Să notăm cu

- a) x^a ($a = 1, 2, \dots, n$) n variabile independente,
 b) u_i , n vectori cu câte k_1 componente.
 $u_{i_1 i_2 \dots \frac{n(n-1)}{2}}$ vectori cu câte k_2 componente,
 $\dots$
 $u_{i_1 i_2 \dots i_n}$ un vector cu k_n componente,

unde indicii $i, i_1, i_2, \dots, i_n$ parcurg valorile $1, 2, \dots, n$, vectorii u pot avea numai indici diferiți între ei și nu se schimbă la o permutare a acestor indici. Pentru simplitate, vom presupune indicii fiecărui vector scriși în ordine crescătoare.

c) Să notăm încă cu $z_{ab \dots l}$, un vector u generic dintre cei de mai sus, care are printre indicii săi indicii $a, b \dots l$ și încă eventual și alții, diferiți de aceștia.

d) $f_{(i_1 i_2 \dots i_s) i_k}$ ($i \leq k \leq s$), funcții de x^a și $z_{i_1 i_2 \dots i_s i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s}$.

e) Să mai notăm, ca de obicei, cu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_{i_1 i_2 \dots i_s}} \frac{\partial z_{i_1 i_2 \dots i_s}}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_{i_1 i_2 \dots i_s}} f_{(i_1 i_2 \dots i_s) i}.$$

produsul scalar dintre gradientul lui φ , în care sînt presupuse variabilele componentele vectorilor $z_{i_1 i_2 \dots i_s}$, și vectorul $\partial z_{i_1 i_2 \dots i_s} / \partial x^i$, adică :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{i_1 i_2 \dots i_s}} \frac{\partial z_{i_1 i_2 \dots i_s}}{\partial x^i} &= \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_s}^a} \frac{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_s}^a}{\partial x^i} + \\ &+ \sum_b \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1}}^b} \frac{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1}}^b}{\partial x^i} + \dots \\ &+ \sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_n}^l} \frac{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_n}^l}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Să ne plasăm în ipotezele:

A. Funcțiile $f_{(i_1 i_2 \dots i_s) i_k}$ sînt continue și cu derivatele continue de x^a și $z_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s}$ în domeniul:

$$|x^a - x_0^a| < A, \quad -\infty < z_{i_1 \dots i_s} < +\infty; \quad (D)$$

B. În acest domeniu ele sînt mărginite,

$$|f_{(i_1 \dots i_s) i_k}| < M, \quad (a)$$

Pentru a evita complicația notației, vom face demonstrația pentru cazul $n = 3$, avînd în vedere că aceasta se extinde la cazul general fără nici o dificultate.

§ 2. Fie deci sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x^i} = f_{(i)}(x; u_1, u_2, u_3, u_{12}, u_{13}, u_{23}, u_{123}), \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial x^1} = f_{(12)}(x; u_2, u_{23}, u_{12}, u_{123}), \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial x^2} = f_{(21)}(x; u_1, u_{12}, u_{13}, u_{123}), \\ \frac{\partial u_{23}}{\partial x^2} = f_{(23)}(x; u_3, u_{13}, u_{23}, u_{123}), \quad \frac{\partial u_{23}}{\partial x^3} = f_{(32)}(x; u_2, u_{12}, u_{23}, u_{123}), \\ \frac{\partial u_{13}}{\partial x^1} = f_{(13)}(x; u_3, u_{13}, u_{23}, u_{123}), \quad \frac{\partial u_{13}}{\partial x^3} = f_{(31)}(x; u_1, u_{12}, u_{13}, u_{123}), \\ \frac{\partial u_{123}}{\partial x^1} = f_{(123)}(x; u_{23}, u_{123}); \quad \frac{\partial u_{123}}{\partial x^2} = f_{(123)}(x; u_{13}, u_{123}); \\ \frac{\partial u_{123}}{\partial x^3} = f_{(123)}(x; u_{12}, u_{123}); \quad u_{ij} = u_{ji}, \end{cases}$$

în care f_{ii} , $f_{(ij)i}$, $f_{(123)i}$ sînt funcțiuni continue de argumentele lor pe

$$|x^a - x_0^a| < A; \quad -\infty < u_i, u_{ij}, u_{123} < +\infty, \quad (D)$$

cu derivatele continue pe acest domeniu, pe care satisfac condițiilor:

$$\begin{aligned} |f_{ii}|, |f_{(ij)i}|, |f_{(123)i}| &< M, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial u_{ij}} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial u_{123}} \right| &< N, \end{aligned} \quad (4)$$

f — fiind una din funcțiunile f_{ii} , $f_{(ij)i}$, $f_{(123)i}$ iar M și N — constante și condițiilor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial x^j} + \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_j} f_{ji} + \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{ij}} f_{(ij)i} + \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{jk}} f_{(jk)i} + \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)i} = \\ = \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_i} f_{ii} + \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{ji}} f_{(ij)i} + \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{ik}} f_{(ik)i} + \frac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)i} \\ \frac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial x^j} + \frac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial u_{jk}} f_{(jk)i} + \frac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)i} = \frac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial u_{ik}} f_{(ik)i} + \frac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)i} \end{aligned} \quad (5)$$

i, j, k — diferiți.

Fie încă $\varphi_i(x^j, x^k)$ (i, j, k mereu diferiți) trei funcțiuni continue de x^j, x^k pe

$$|x^j - x_0^j|, \quad |x^k - x_0^k| < A, \quad (6)$$

$\varphi_{ij}(x^k)$ trei funcțiuni continue de x^k , pe

$$|x^k - x_0^k| < A, \quad (6')$$

toate mărginite și φ_{123} o constantă arbitrară.

Vom demonstra că în aceste ipoteze există o soluție unică a sistemului (4), definită și continuă pe $|x^i - x_0^i| < A$, care satisface condițiilor:

$$\begin{cases} u_i(x_0^i, x^j, x^k) = \varphi_i(x^j, x^k), \\ u_{ij}(x_0^i, x_0^j, x^k) = \varphi_{ij}(x^k), \\ u_{123}(x_0^i, x_0^j, x_0^k) = \varphi_{123}, \end{cases} \quad (7)$$

și admite derivatele cerute de verificarea sistemului (3).

Pentru demonstrație să considerăm spațiul S al sistemelor Z de șapte funcții

$$u_i(x^1, x^2, x^3), \quad u_{ij}(x^1, x^2, x^3) \quad u_{123}(x^1, x^2, x^3),$$

definite pe domeniul δ :

$$|x^a - x_0^a| < A, \quad (8)$$

mărginite pe acest domeniu, pe care să le notăm în mod generic cu $z_a(x^1, x^2, x^3)$ ($a = 1, 2, \dots, 7$). Să introducem în acest spațiu metrica [1]:

$$\rho(Z, Z') = \max_{i=1,2,\dots,7(x^i) \in \delta} \sup |z_i - z'_i| e^{-\tau \sum |x^i - x_0^i|}, \quad (m)$$

τ fiind o constantă pozitivă, care satisface condiției:

$$\tau > 7N. \quad (8)$$

Spațiul astfel metrizat e complet.

Să definim pe acest spațiu operatorul $\mathcal{Q}$.

$$\bar{Z} = \mathcal{Q}Z, \quad (9)$$

dat de

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u}_i &= \varphi_i(x^j, x^k) + \int_{x_0^i}^x f_{(i)1}(x; u_1; u_2; u_3; u_{23}; u_{12}; u_{13}; u_{123}) dx^i \\ \bar{u}_{ij} &= \varphi_{ij}(x^k) + \int_{x_0^i}^x f_{(ij)1}(x; u_j; u_i; u_{jk}; u_{123}) dx^i + \int_{x_0^j}^x f_{(ij)2}(x; u_i; u_j; u_{ik}; u_{123}) dx^j \\ \bar{u}_{123} &= \varphi_{123} + \int_{x_0^1}^{x^1} f_{(123)1}(x; u_{23}; u_{123}) dx^1 + \int_{x_0^2}^{x^2} f_{(123)2}(x; u_{13}; u_{123}) dx^2 + \\ &\quad + \int_{x_0^3}^{x^3} f_{(123)3}(x; u_{12}; u_{123}) dx^3 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

i, j, k — diferiți, $i < j, u_i = u_{ji}$

Să arătăm că operatorul $\mathcal{Q}$ admite un element fix în S . În acest scop, să observăm că operatorul (8) transformă un element $Z \in S$ într-un alt element al aceluiași spațiu.

Să mai observăm că operatorul $\mathcal{Q}$ e contractant. În adevăr, dacă

$$Z(u_i; u_{ij}; u_{123}), \quad Z'(u'_i; u'_{ij}; u'_{123})$$

sînt două elemente din S și:

$$\bar{Z}(\bar{u}_i, \bar{u}_{ij}, \bar{u}_{123}), \quad \bar{Z}'(\bar{u}'_i, \bar{u}'_{ij}, \bar{u}'_{123})$$

transformatele lor prin $\mathcal{Q}$, avem:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_i - \bar{u}'_i| &\leq \left| \int_{x_0^i}^{x^i} N \left\{ \Sigma |u_i - u'_i| + \Sigma |u_{ij} - u'_{ij}| + \Sigma |u_{123} - u'_{123}| \right\} dx^i \right| \\ &\leq 7N \rho(Z, Z') \int_{x_0^i}^{x^i} e^{-\tau \Sigma |x^i - x_0^i|} dx^i \leq 7N \rho(Z, Z') e^{-\tau \Sigma |x^i - x_0^i|} \end{aligned}$$

de unde:

$$|\bar{u}_i - \bar{u}'_i| e^{-\tau \Sigma |x^i - x_0^i|} \leq \frac{7N}{\tau} \rho(Z, Z').$$

În mod analog se găsește:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_{ij} - \bar{u}'_{ij}| e^{-\tau \Sigma |x^i - x_0^i|} &\leq \frac{4N}{\tau} \rho(Z, Z'); \\ |\bar{u}_{123} - \bar{u}'_{123}| e^{-\tau \Sigma |x^i - x_0^i|} &\leq \frac{2N}{\tau} \rho(Z, Z'); \end{aligned}$$

Ținînd seama de valoarea lui τ , din (8), urmează

$$\rho(\bar{Z}, \bar{Z}') \leq \alpha \rho(Z, Z'), \quad \alpha < 1,$$

cu alte cuvinte operatorul nostru este contractant.

În conformitate cu teorema lui Banach ([5] pag. 47) de punct fix, există o soluție unică a ecuației

$$Z = \mathcal{Q}Z,$$

cu alte cuvinte există un sistem de funcțiuni continue u_i, u_{ij}, u_{ijk} , care satisfac sistemul:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \varphi_i(x^j, x^k) + \int_{x_0^i}^{x^i} f_{ii}(x; u_1, u_2, u_3, u_{23}, u_{12}, u_{13}, u_{123}) dx^i, \\ u_{ij} &= \varphi_{ij}(x^k) + \int_{x_0^i}^{x^i} f_{(ij)i}(x; u_i, u_{ij}, u_{jk}, u_{123}) dx^i + \\ &\quad + \int_{x_0^j}^{x^j} f_{(ji)j}(x; u_i, u_{ij}, u_{jk}, u_{123}) dx^j \\ u_{123} &= \varphi_{123} + \int_{x_0^1}^{x^1} f_{(123)1}(x; u_{23}, u_{123}) dx^1 + \int_{x_0^2}^{x^2} f_{(123)2}(x; u_{13}, u_{123}) dx^2 + \\ &\quad + \int_{x_0^3}^{x^3} f_{(123)3}(x; u_{12}, u_{123}) dx^3 \\ u_{ij} &= u_{ji}, \quad i, j, k - \text{diferiți}, \quad i < j. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

§ 3. Rămîne să arătăm că soluția sistemului (11) satisface ecuațiilor (3) și condițiilor (7). Este evident că acestea din urmă sînt verificate. În ceea ce privește verificarea ecuațiilor (3) va trebui să demonstrăm în prealabil următoarea lema care generalizează lema lui Gronwall ([8], pag. 29).

LEMA A. Dacă $z_i(x^k)$, $i = 1, 2, \dots, p$, $k = 1, 2, \dots, n$ sînt k funcțiuni continue de $x^1, x^2, \dots, x^n$, care satisfac inegalităților

$$0 \leq z_{s_i}(x^k) \leq \int_{x_0^i}^{x^i} \left\{ \sum \alpha_{ij} z_j(x^k) + \beta_i \right\} dx^i + \gamma_i, \quad 1 \leq s_i \leq p, \quad (9)$$

unde $\alpha_{ij}, \beta_i, \gamma_i$ sînt constante pozitive și

$$x_0^i \leq x^i \leq x_0^i + A, \quad (10)$$

și dacă notăm

$$\alpha = \max \alpha_{ij}, \quad \beta = \max \beta_i, \quad \gamma = \max \gamma_i, \quad (10')$$

atunci

$$0 \leq z_s(x) \leq (\beta A + \gamma) e^{p \alpha A}. \quad (11)$$

Pentru demonstrație, să considerăm funcția

$$z(x^1, x^2, \dots, x^n) = \max z_i(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

care este și ea continuă; pentru aceasta avem evident:

$$|0 \leq z(x^k) \leq \int_{x_0^i}^{x_1^i} \{p \alpha z(x^k) + \beta\} dx^i + \gamma; \quad (*)$$

ca și pentru demonstrarea lemei lui Gronwall, să punem:

$$z(x^1, x^2, \dots, x^n) = \zeta(x^1, x^2, \dots, x^n) e^{p \alpha \sum (x^i - x_0^i)},$$

și fie (x_1^i) punctul în care S ia valoarea maximă. Avem atunci, înlocuind în *):

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^{p \alpha \sum (x_1^1 - x_0^1)} \zeta(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) \leq \\ &\leq \zeta(x_1^1, \dots, x_1^n) \left(e^{p \alpha \sum (x_1^i - x_0^i)} - e^{p \alpha \sum_{a \neq 1} (x_1^a - x_0^a)} \right) + \beta A + \gamma, \end{aligned}$$

care conduce la,

$$\zeta(x^1, x^2, \dots, x^n) \leq \zeta(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) \leq \zeta(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) e^{p \alpha \sum_{a \neq 1} (x_1^a - x_0^a)} \leq \beta A + \gamma,$$

de unde rezultă concluzia.

Să trecem acum la demonstrarea faptului că integrala sistemului (11) satisface sistemul (3). În acest scop, se constată, în primul rînd, că din (11), avînd în vedere ordinea în care sînt efectuate integrările ($i < j$), se deduce:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x^i} = f_{ii}(x; u_r; u_{rs}; u_{123}), \\ \frac{\partial u_{13}}{\partial x^3} = f_{(31)3}(x; u_1; u_{12}; u_{13}; u_{123}), \\ \frac{\partial u_{23}}{\partial x^3} = f_{323}(x; u_2; u_{12}; u_{23}; u_{123}); \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial x^2} = f_{(21)2}(x; u_1; u_{12}; u_{13}; u_{123}), \\ \frac{\partial u_{123}}{\partial x^3} = f_{(123)3}(x; u_{12}; u_{123}). \end{cases} \quad (12)$$

Punînd acum

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_{23}}{h} &= \frac{u_{23}(x^1, x^2 + h, x^3) - u_{23}(x^1, x^2, x^3)}{h}, \\ \frac{\Delta u_{123}}{h} &= \frac{u_{123}(x^1, x^2 + h, x^3) - u_{123}(x^1, x^2, x^3)}{h}, \end{aligned}$$

rezultă tot din (11):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_{23}}{h} = (f_{(23)2})^* \Big|_{x_0^3}^{x^3} + \int_{x_0^3}^{x^3} \left\{ \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial x^2} \right)^* + \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_2} \right)^* f_{(2)2} + \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{23}} \right)^* \frac{\Delta u_{23}}{h} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{12}} \right)^* (f_{212})^* + \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{123}} \right)^* \frac{\Delta u_{123}}{x^2} \right\} dx^3, \end{aligned} \quad (13)$$

unde cu $(\)^*$ am notat valori ale funcțiilor dintre paranteze p n u valori ale lui x^2 cuprinse între x^2 și $x^2 + h$. Ținând seama de faptul că toate funcțiile f și derivatele lor sînt mărginite în (δ) , din relația de mai sus rezultă:

$$\left| \frac{\Delta u_{23}}{h} \right| \leq M + \int_{x_0^3}^{x^3} \left(R_1 \frac{\Delta u_{23}}{h} + R_2 \frac{\Delta u_{123}}{h} + S \right) dx^3, \quad (13')$$

unde cu R_1, R_2, S am notat constante pozitive convenabil alese; în mod analog ajungem la relația

$$\left| \frac{\Delta u_{123}}{h} \right| \leq M + \int_{x_0^3}^{x^3} \left\{ R_1' \frac{\Delta u_{123}}{h} + S' \right\} dx^3. \quad (13'')$$

Folosind lema A, ajungem la concluzia că membrii întîi sînt mărginiți. Fie m marginea lor superioară, adică

$$\left| \frac{\Delta u_{23}}{h} \right|, \left| \frac{\Delta u_{123}}{h} \right| \leq m.$$

Cu acestea, (13) se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_{23}}{h} = f_{(23)2} \Big|_{x_0^3}^{x^3} + \int_{x_0^3}^{x^3} \left\{ \left[\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial x^2} + \frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_2} f_{(2)2} + \frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{23}} f_{(23)2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{12}} f_{(21)2} + \frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{123}} f_{(123)2} \right] + \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{23}} \right)^* \left(\frac{\Delta u_{23}}{h} - f_{(23)2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{123}} \right)^* \left(\frac{\Delta u_{123}}{h} - f_{(123)2} \right) + \Phi \right\} dx^3 + \Phi_1, \end{aligned}$$

unde am pus

$$\begin{aligned}\Phi = & \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial x^2} \right)^* - \frac{\partial f_{(32)3}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_2} f_{(2)2} \right)^* - \frac{f_{(32)3}}{u_2} f_{(2)2} + \\ & + f_{(23)2} \left[\left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{23}} \right)^* - \frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{23}} \right] + \left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{12}} f_{(2)2} \right)^* - \\ & - \frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{12}} f_{(2)2} + f_{(123)2} \left[\left(\frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{123}} \right)^* - \frac{\partial f_{(32)3}}{\partial u_{123}} \right], \\ \Phi_1 = & f_{(23)2}^* \Big|_{x_0^3} - f_{(23)2} \Big|_{x_0^3}.\end{aligned}$$

Ținând seama acum de condițiile de integrabilitate (5), grupul de termeni dintre paranteze drepte de sub integrală, se poate înlocui cu derivata totală a funcției $f_{(23)2}$ în raport cu x^3 , așa încît

$$\left| \frac{\Delta u_{23}}{h} - f_{(23)2} \right| \leq \int_0^3 \left\{ P \left[\left| \frac{\Delta u_{23}}{h} - f_{(23)2} \right| + \left| \frac{\Delta u_{123}}{h} - f_{(123)2} \right| \right] + \Phi \right\} dx^3 + \Phi_1.$$

În mod analog se obține o relație de forma:

$$\left| \frac{\Delta u_{123}}{h} - f_{(123)2} \right| \leq \int_0^3 \left\{ P \left[\left| \frac{\Delta u_{23}}{h} - f_{(23)2} \right| + \left| \frac{\Delta u_{123}}{h} - f_{(123)2} \right| \right] + \psi \right\} dx^3 + \psi_1.$$

ψ, ψ_1 fiind expresii analoage cu Φ și Φ_1 . Din continuitatea funcțiunilor f și a derivatelor lor, rezultă că Φ, ψ, Φ_1 și ψ_1 pot fi făcuți mai mici decît orice număr pozitiv ε , dacă h este suficient de mic. Folosind acum o dată lema lui Gronwall, rezultă

$$\left| \frac{\Delta u_{23}}{h} - f_{(23)2} \right|, \left| \frac{\Delta u_{123}}{h} - f_{(123)2} \right| \leq \varepsilon (1 + 1)e^{PA}.$$

Dar aceasta înseamnă faptul că u_{23} și u_{123} sînt derivabile în raport cu u_2 și

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{23}}{\partial x_2} = f_{(23)2}(x, u_3; u_{13}; u_{23}; u_{123}), \\ \frac{\partial u_{123}}{\partial x^2} = f_{(123)2}(x, u_{13}; u_{123}). \end{cases} \quad (14)$$

Să demonstrăm, în sfîrșit, că u_{12}, u_{13} și u_{123} sînt derivabile în raport cu u_1 și că aceste derivate satisfac (3). Pentru demonstrație să introducem notațiile

$$\begin{aligned}\Delta' u_{13} &= u_{13}(x^1 + h, x^2, x^3) - u_{13}(x^1, x^2, x^3), \quad \Delta' u_{12} = u_{12}(x^1 + h, x^2, x^3) - \\ &\quad - u_{12}(x^1, x^2, x^3), \\ \Delta' u_{123} &= u_{123}(x_1 + h, x_2, x_3) - u_{123}(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Avem atunci din (11), utilizând notații analoage cu cele precedente:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\Delta' u_{12}}{h} &= f_{(12)1}^* \Big|_{x_0^2}^{x^2} + \int_{x_0^2}^{x^2} \left\{ \left(\frac{\partial f_{(21)2}}{\partial x^1} \right)^* + \left(\frac{\partial f_{(21)2}}{\partial u^1} \right)^* (f_{11})^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial f_{(21)2}}{\partial u_{21}} \right)^* \frac{\Delta' u_{12}}{h} + \left(\frac{\partial f_{(21)2}}{\partial u_{13}} \right)^* \frac{\Delta' u_{13}}{h} + \left(\frac{\partial f_{(23)2}}{\partial u_{123}} \right)^* \frac{\Delta' u_{123}}{h} \right\} dx^2, \\
 \frac{\Delta' u_{13}}{h} &= f_{(13)1}^* \Big|_{x_0^3}^{x^3} + \int_{x_0^3}^{x^3} \left\{ \left(\frac{\partial f_{(31)3}}{\partial x^1} \right)^* + \left(\frac{\partial f_{(31)3}}{\partial u^1} \right)^* (f_{11})^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial f_{(31)3}}{\partial u_{13}} \right)^* \frac{\Delta' u_{13}}{h} + \left(\frac{\partial f_{(31)3}}{\partial u_{12}} \right)^* \frac{\Delta' u_{12}}{h} + \left(\frac{\partial f_{(31)3}}{\partial u_{123}} \right)^* \frac{\Delta' u_{123}}{h} \right\} dx^2, \\
 \frac{\Delta' u_{123}}{h} &= f_{(123)1}^* \Big|_{x_0^2, x_0^3}^{x^2} + \int_{x_0^2}^{x^2} \left\{ \left(\frac{\partial f_{(123)2}}{\partial x^1} \right)^* + \left(\frac{\partial f_{(123)2}}{\partial u_{13}} \right)^* \frac{\Delta' u_{13}}{h} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial f_{(123)2}}{\partial u_{123}} \right)^* \frac{\Delta' u_{123}}{h} \right\} dx^2 + \int_{x_0^3}^{x^3} \left\{ \left(\frac{\partial f_{(123)3}}{\partial x^1} \right)^* + \left(\frac{\partial f_{(123)3}}{\partial u_{12}} \right)^* \frac{\Delta' u_{12}}{h} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial f_{(123)3}}{\partial u_{123}} \right)^* \frac{\Delta' u_{123}}{h} \right\} dx^3.
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Să facem în aceste egalități $x^3 = x_0^3$. Lucrînd ca și în cazul precedent, se constată, aplicînd de două ori lema A , că:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u_{13}}{\partial x^1} \Big|_{x^3=x_0^3} &= f_{(13)1}(x, u_3; u_{13}, u_{23}, u_{123}) \Big|_{x^3=x_0^3}, \\
 \frac{\partial u_{12}}{\partial x^1} \Big|_{x^3=x_0^3} &= f_{(12)1}(x, u_2; u_{12}, u_{23}, u_{123}) \Big|_{x^3=x_0^3}, \\
 \frac{\partial u_{123}}{\partial x^1} \Big|_{x^3=x_0^3} &= f_{(123)1}(x, u_{23}; u_{123}) \Big|_{x^3=x_0^3},
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Atunci prima integrală din ultima egalitate se poate scrie sub forma:

$$I = \int_{x_0^2}^{x^2} \left\{ \frac{\partial f_{(123)2}}{\partial x^1} + \frac{\partial f_{(123)2}}{\partial u_{13}} f_{(13)1} + \frac{\partial f_{(123)2}}{\partial u_{123}} f_{(123)1} + \lambda \right\} dx^2$$

unde

$$\begin{aligned} \lambda = & \left(\frac{\partial f_{(123)2}}{\partial x^1} \right)^* - \frac{\partial f_{(123)2}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial f_{(123)2}}{\partial u_{13}} \right)^* \frac{\Delta' u_{13}}{h} - \frac{\partial f_{(123)2}}{\partial u_{13}} f_{(13)1} + \\ & + \frac{\partial f_{(123)2}}{\partial u_{123}} \frac{\Delta' u_{123}}{h} - \frac{\partial f_{(123)2}}{\partial u_{123}} f_{(123)1}. \end{aligned}$$

Or, avînd în vedere că

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x^3 = x_0^3}} \frac{\Delta' u_{13}}{h} = f_{(13)1} \Big|_{x^3 = x_0^3}, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x^3 = x_0^3}} \frac{\Delta' u_{123}}{h} = f_{(123)1} \Big|_{x^3 = x_0^3},$$

ținînd seama de continuitatea funcțiunilor f și a derivatelor lor, ca și de condițiile de integrabilitate (5), avem:

$$J = f_{(123)1} | x_0^3 - f_{(123)1} | x_0^2, x_0^2 + A$$

A fiind o expresie care poate fi făcută oricît de mică dacă h este suficient de mic. Atunci ultima relație (15) se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta' u_{123}}{h} = & f_{(123)1} \Big|_{x_0^3}^{x^3} + \int_{x_0^3}^{x^3} \left\{ \frac{\partial f_{(123)3}}{\partial x^1} + \frac{\partial f_{(123)3}}{\partial u_{12}} \frac{\Delta' u_{12}}{h} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f_{(123)3}}{\partial u_{123}} \frac{\Delta' u_{123}}{h} \right\} dx^3 + A', \end{aligned}$$

A' fiind o altă expresie care tinde la zero cu h .

Din primele două ecuații (15) și din (15'), folosind iar de două ori lema A , rezultă ca și mai sus, că funcțiunile u_{12} , u_{13} , u_{123} sînt derivabile în raport cu x^1 și că

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{12}}{\partial x^1} = f_{(12)1}(x; u_2; u_{12}; u_{13}; u_{123}), \\ \frac{\partial u_{13}}{\partial x^1} = f_{(13)1}(x; u_3; u_{13}; u_{23}; u_{123}), \\ \frac{\partial u_{123}}{\partial x^1} = f_{(123)1}(x; u_{23}; u_{123}) \end{cases} \quad (17)$$

și aceasta termină demonstrația.

Evident metoda de lucru utilizată aici se generalizează fără nici o modificare pentru sistemul (1)–(2).

Observații. 1. Integralele sistemului nostru sînt mărginite dacă funcțiunile φ_i , φ_{ij} sînt mărginite. În adevăr, dacă avem

$$|\varphi_i|, |\varphi_{ij}| \leq m_1,$$

rezultă

$$|u_i| \leq m_1 + MA,$$

$$|u_{ij}| \leq m_1 + 2MA,$$

$$|u_{123}| \leq \varphi_{123} + 3MA.$$

2. Să presupunem că funcțiunile f sînt definite pe domeniul

$$|x^i - x_0^i| < A, \quad |z_i - z_i^0| < m, \quad (D_1)$$

și că funcțiunile φ_i , φ_{ij} sînt definite pe

$$|x^i - x_0^i| < A,$$

și satisfac condițiilor

$$|\varphi_i(x_0^j, x_0^k) - u_i^0|, \quad |\varphi_{ij}(x_0^k) - u_{ij}^0| \leq m_1 < m.$$

Atunci teorema rămîne satisfăcută, dacă operatorul $\mathcal{Q}$ transformă spațiul funcțiunilor continue care satisfac condiția

$$|z_i(x^k) - z_i^0| < m$$

în el însuși. Or aceasta se întîmplă dacă

$$|\bar{z} - z_i^0| \leq |\bar{z}_i - \varphi_i| + |\varphi_i - z_i^0| \leq 3MA + m_1 \leq m.$$

Dacă această condiție nu este satisfăcută, intervalul A va trebui res-trîns la un interval A' , așa fel ca

$$A' \leq \frac{m - m_1}{3M}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. A. Bielecki, *Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tihonov, dans la théorie des équations différentielles ordinaires.* „Bull. Acad. Polonaise des Sci. cl. III” **IV** (1956), p. 261.
2. L. Bruwier, *Sur les équations linéaires aux différentielles totales.* „Bull. de la Soc. Royale de Sciences de Liège”, **VIII** (1939) p. 105.
3. A. Haimovici, *Asupra conexiunii spațiilor lui Cartan.* „Acad. R.P.R., Filiala Iași, Studii și cercetări științifice, Matematica”.
4. A. Haimovici, *Asupra unui sistem de ecuații cu derivate parțiale.* „Comunicările Acad. R.P.R.”

5. Л. А. Люстерник и В. Н. Соболев, *Элементы функционального анализа*, „Г.И.Т.Т.Л.“, Москва—Ленинград, 1951.
6. W. Nikliborc, *Sur les équations linéaires aux différentielles totales*, „Studia Math.” 1. (1929) p. 41.
7. D. Petrovanu, *Asupra prelungirii soluțiilor sistemelor Pfaff complet integrabile și comportării lor asimptotice*, „Acad. R.P.R. Filiala Iași, Studii și cercetări științifice. Matematica” XII (1961), p. 1.
8. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. I, Bologna, 1948.
9. T. Y. Thomas, *Systems of Total Differential Equations Defined over Simply Connected Domains*, „Ann. of Math.” 35 (1934), p. 730.

СИСТЕМА ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОБОБЩАЮЩИХ СИСТЕМЫ ПФАФФА

(Резюме)

Изучается система уравнений (1), где функции $f(i \dots i_k)_{i_k}$ из класса C^1 на (D) и удовлетворяют (а) и (б). Доказывается, что эта система допускает единственный интеграл на (δ) , удовлетворяющий (2). φ_i , являющиеся непрерывными функциями. Во избежание сложности обозначений дается доказательство только для системы (3) и условий (7). Что касается метода, рассматривается оператор, определенный (10) в пространстве систем непрерывных и ограниченных на (δ) функций, метризованный (m), и доказывается, что он допускает единственный постоянный элемент, т.е. что (11) допускает единственный интеграл. Затем обобщается лемма Гронуолла и с ее помощью показывают эквивалентность (11) с (14) и (7); это последнее предположение доказывается в четыре приема: сначала устанавливают действительность (12), затем используют два раза обобщенную лемму Гронуолла (14), а потом тем же методом (16) и, наконец с помощью этого последнего, устанавливают действительность (17).

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES QUI GÉNÉRALISENT LES SYSTÈMES DE PFAFF

(Résumé)

On étudie le système d'équations (1) où les fonctions $(f_i \dots i_k)_{i_k}$ sont de classe C^1 sur (D) et satisfont à (a) et (b). On démontre que ce système admet une intégrale unique sur (δ) , satisfaisant à (2), les φ_i étant des fonctions continues. Pour éviter la complication de la notation, on fait la démonstration pour le système (3) et les conditions (7). En ce qui concerne la méthode, on considère l'opérateur défini par (10) dans l'espace des systèmes de fonctions continues et bornées sur (δ) , métrisé par (m), et on démontre que celui-ci admet un élément fixe unique, c'est à dire que (1) admet une intégrale unique. On généralise ensuite le théorème de Gronwall, et, à l'aide de celui-ci, on montre l'équivalence de (11) avec (4) et (7); cette dernière proposition est démontrée en quatre étapes: on constate d'abord la valabilité de (12), ensuite, en utilisant deux fois le lemme généralisé de Gronwall, celle de (14), puis, par la même méthode, celle de (16) et enfin, par l'intermédiaire de cette dernière, la valabilité de (17).

ASUPRA DEZVOLTĂRII ÎN SERIE A FUNCȚIEI LUI GREEN ÎN VECINĂTATEA PUNCTULUI DE LA INFINIT

de

CARIUS IACOB (București)

1. Fie C o curbă simplă închisă, situată în planul variabilei complexe $z = x + iy$. Se notează prin Ω domeniul exterior lui C . Domeniul Ω fiind simplu conex, se poate presupune, după efectuarea unei reprezentări conform prealabile, că frontiera sa C este formată dintr-o curbă analitică.

Să considerăm funcția lui Green, armonică, $G(M, P)$ relativă la punctul $P \in \Omega$ și la domeniul Ω . În vecinătatea punctului de la infinit avem dezvoltarea în serie

$$G(M, P) = a_0(P) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(P)\cos n\theta + b_n(P)\sin n\theta] r^{-n} \quad (1)$$

unde $z = re^{i\theta}$ este afixul punctului M , iar P este presupus la distanță finită.

Într-o lucrare anterioară [1], am studiat unele proprietăți ale funcțiilor armonice $a_0(P)$, $a_n(P)$ și $b_n(P)$, în cazul mai general când Ω este un domeniu multiplu conex. Ne propunem să arătăm că în cazul, considerat acum, al domeniului Ω simplu conex, coeficienții $a_n(P)$ și $b_n(P)$ se pot exprima în mod simplu cu ajutorul lui $a_0(P)$.

2. Se știe [1, 2] că $a_0(P)$, $a_n(P)$, $b_n(P)$ sînt funcții armonice de punctul P , regulate în Ω , cu excepția punctului $z = \infty$, în vecinătatea căruia diferențele

$$a_0(P) - \log r_P, a_n(P) - \frac{1}{n} \operatorname{Re} \{z_P^n\}, b_n(P) - \frac{1}{n} \operatorname{Im} \{z_P^n\} \quad (2)$$

sînt regulate. Aici $z_P = r_P e^{i\theta_P}$ este afixul punctului P . În plus, aceste funcții se anulează pe frontiera C , fiind continue în vecinătatea sa.

Vom nota prin $a_0^*(P)$, $a_n^*(P)$, $b_n^*(P)$, conjugatele armonice ale funcțiilor armonice $a_0(P)$, $a_n(P)$, $b_n(P)$ și vom scrie

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(z) &= a_0(P) + i a_0^*(P) \\ \mathcal{A}_n(z) &= a_n(P) + i a_n^*(P) \\ \mathcal{B}_n(z) &= b_n(P) + i b_n^*(P) \end{aligned} \quad (3)$$

fără de a mai pune indicele P .

Reprezentarea conformă a domeniului Ω pe domeniul $D(|Z| > a)$ de frontieră $C_a(|Z| = a)$ din planul variabilei complexe $Z = X + iY$, cu corespondența punctelor $z = \infty$ și $Z = \infty$, și a direcțiilor axelor reale în aceste puncte, este dată după cum se constată ușor, de

$$Z = ae^{\mathcal{A}_0(z)} \quad (4)$$

Notînd prin $\Gamma(z, z_P)$ funcția lui Green complexă, dată de

$$\Gamma(z, z_P) = G(M, P) + iH(M, P) \quad (5)$$

unde $H(M, P)$ este conjugata armonică a lui $G(M, P)$ considerat ca funcție de punctul M , avem $G(M, \infty) = G(\infty, M)$, deci conform lui (1),

$$\Gamma(z, \infty) = \mathcal{A}_0(z) \quad (6)$$

z fiind acum afixul punctului P , socotit ca variabil.

Avem dezvoltarea în serie

$$\mathcal{A}_0(z) = \log z + \gamma + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots \quad (7)$$

unde numărul real γ este constanta lui Robin a domeniului Ω [3].

Rezultă atunci din (4) că la mari distanțe avem dezvoltarea în serie

$$Z = ae^{\gamma} z + \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \dots \quad (4')$$

Funcțiile $\mathcal{A}_n(z)$ și $\mathcal{B}_n(z)$, ($n = 1, 2, \dots$), definite de (3) sînt olomorfe în Ω , cu excepția punctului de la infinit, în vecinătatea căruia diferențele

$$\mathcal{A}_n(z) - \frac{1}{n} z^n, \mathcal{B}_n(z) + \frac{i}{n} z^n$$

sînt regulate, în virtutea lui (2). Avem în plus

$$\operatorname{Re}\{\mathcal{A}_n(z)\}_C = 0, \quad \operatorname{Re}\{\mathcal{B}_n(z)\}_C = 0. \quad (8)$$

Din (4') rezultă

$$z = \lambda Z \left(1 + \frac{\gamma_1}{Z} + \frac{\gamma_2}{Z^2} + \dots \right) \quad (4'')$$

punînd

$$\lambda = \frac{1}{a} e^{-\gamma} \quad (9)$$

Prin urmare

$$z^n = \lambda^n Z^n \left(1 + \frac{\gamma_1}{Z} + \frac{\gamma_2}{Z^2} + \dots \right)^n = \lambda^n (Z^n + \delta_1 Z^{n-1} + \dots + \delta_{n-1} Z + \delta_n + \dots) \quad (10)$$

unde coeficienții $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ se determină prin calcule algebrice simple.

Transformatele funcțiilor $\mathcal{A}_n(z)$ și $\mathcal{B}_n(z)$, pe care le vom nota prin $\mathcal{A}_n(Z)$ și $\mathcal{B}_n(Z)$, sînt olomorfe în D , cu excepția punctului $Z = \infty$, diferențele

$$\mathcal{A}_n(Z) - \frac{\lambda^n}{n}(Z^n + \delta_1 Z^{n-1} + \dots + \delta_{n-1}Z)$$

$$\mathcal{B}_n(Z) + i \frac{\lambda^n}{n}(Z^n + \delta_1 Z^{n-1} + \dots + \delta_{n-1}Z)$$

fiind regulate în vecinătatea lui $Z = \infty$. În consecință, teorema cercului [4] conduce la

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(Z) &= \frac{\lambda^n}{n}(Z^n + \delta_1 Z^{n-1} + \dots + \delta_{n-1}Z) \\ &- \frac{\lambda^n}{n} \left(\frac{a^{2n}}{Z^n} + \bar{\delta}_1 \frac{a^{2n-2}}{Z^{n-1}} + \dots + \bar{\delta}_{n-1} \frac{a^2}{Z} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

ținînd seamă că relațiile (8) vor avea loc și pe circumferința C_a .

De asemenea

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(Z) &= -i \frac{\lambda^n}{n}(Z^n + \delta_1 Z^{n-1} + \dots + \delta_{n-1}Z) \\ &- i \frac{\lambda^n}{n} \left(\frac{a^{2n}}{Z^n} + \bar{\delta}_1 \frac{a^{2n-2}}{Z^{n-1}} + \dots + \bar{\delta}_{n-1} \frac{a^2}{Z} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

În relațiile (11) și (12) s-au neglijat constantele imaginare pure care se pot adăuga lui $\mathcal{A}_n(Z)$ și $\mathcal{B}_n(Z)$. Înlocuind în (11) și (12) pe Z prin expresia sa (4), în funcție de $\mathcal{A}_0(z)$, rezultă expresiile lui $\mathcal{A}_n(z)$ și $\mathcal{B}_n(z)$, în funcție de $\mathcal{A}_0(z)$.

Astfel, în cazul $n = 1$, se găsește că

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(z) &= 2e^{-\gamma} \operatorname{sh} \mathcal{A}_0(z) \\ \mathcal{B}_1(z) &= -2ie^{-\gamma} \operatorname{ch} \mathcal{A}_0(z). \end{aligned} \quad (13)$$

Rezultatele de mai sus sînt susceptibile de numeroase aplicații în hidrodinamică. Ele pot fi ușor particularizate în cazul cînd Ω este exteriorul unui cerc [5] sau al unei elipse, cînd transformarea (4) este cunoscută [6].

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Sur le problème de Dirichlet à singularités données*, „Journal de mathématiques pures et appliquées”, 9-e série, 40, 1961, p. 157–188.
2. C. Iacob, *Sur quelques propriétés de la fonction de Green*, „Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Paris”, 245, 1957, p. 483–485.
3. S. Stoilow-C. Andreian-Cazacu, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, Edit. Acad. R.P.R., București, t. II, 1958, p. 100.
4. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, Ed. II-a, Londra p. 149.
5. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Ed. Acad. R.P.R., Buc. — Gauthier-Villars, Paris, 1959, p. 533.
6. Th. Anghelută, *Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă*, Editura tehnică, Ed. II-a, 1957, p. 125.

ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУНКЦИИ ГРИНА БЛИЗ ТОЧКИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

(Резюме)

Рассматривается обыкновенная связная область Ω извне кривой Иордана C , которую можно предположить аналитической. Функция Грина $G(M, P)$ области Ω может быть разложена в ряд (1), вблизи точки в бесконечности. Гармонические функции $a_0(P)$, $a_n(P)$, $b_n(P)$ обладают замечательными характерными свойствами [1, 2], позволяющими выразить $a_n(P)$ и $b_n(P)$, ($n = 1, 2, \dots$) с помощью $a_0(P)$, если к ним присоединяются гармонические сопряженные равенствами (3).

Если выполняется подобное изображение (4'') Ω в области $D(|z| > a)$ с соответствием точек в бесконечности и в соответствующих направлениях действительных осей, получаются формулы (11) и (12), где: $\lambda = a^{-1} e^{-\gamma}$, где γ есть постоянная Робена области Ω , а $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ — коэффициенты, которые появляются в формуле (10).

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION DE GREEN AU VOISINAGE DU POINT À L'INFINI

(Résumé)

On considère le domaine simplement connexe Ω , l'extérieur de la courbe de Jordan C , qu'on peut supposer analytique. La fonction de Green $G(M, P)$ du domaine Ω peut être développée en la série (1) au voisinage du point à l'infini. Les fonctions harmoniques $a_0(P)$, $a_n(P)$, $b_n(P)$ possèdent quelques propriétés caractéristiques remarquables [1, 2], permettant d'exprimer $a_n(P)$ et $b_n(P)$, ($n = 1, 2, \dots$) moyennant $a_0(P)$, pourvu qu'on leur attache les conjuguées harmoniques par les relations (3).

Si l'on effectue la représentation conforme (4'') de Ω sur le domaine $D(|Z| < a)$, avec la correspondance des points à l'infini et des directions des axes réels en ces points, on obtient les formules (11) et (12), où $\lambda = a^{-1} e^{-\gamma}$, γ étant la constante de Robin du domaine Ω et $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ les coefficients qui figurent dans la formule (10).

REMARKS ON THE PEXIDER'S FUNCTIONAL EQUATION

by

M. HOSSZÚ (Miskolc)

H. W. P e x i d e r [4] has investigated the functional equation

$$f(xy) = g(x) + h(y), \quad (1)$$

where the independent variables x, y as well as the values of the unknown functions f, g, h are real numbers. In this note we shall consider the same functional equation [1] but in our investigations the variables x, y are elements of a groupoid Q in which a binary operation xy is defined, further, f, g, h are mappings of Q onto another groupoid G the operation of which is written additively. We shall suppose that Q, G are such groupoids in which the following laws hold:

- I) $\forall e_1, e_2 \in Q; \forall x, y \in Q; e_1(xe_2) = (e_1x)e_2, e_1(xy)e_2 = (e_1x)(ye_2);$
- II) $x \rightarrow e_1x, xe_2$ are 1-1 mappings of Q onto the whole of Q ;
- III) $c_1 = g(e_1), c_2 = h(e_2)$ has the same properties in G as e_i in Q .

Under suppositions I (—III) we give the most general solutions of the generalized Pexider's equation (1). We state the following theorems:

THEOREM 1. Let Q, G be groupoids with properties I (—III). Supposing that G is a homotope of Q i. e. there exist mappings f, g, h of Q onto G for which (1) is satisfied, G is a homomorphic image of Q i. e. there exist a mapping k of Q onto G such that

$$\forall x, y \in Q; k(xy) = k(x) + k(y) \quad (2)$$

is valid.

THEOREM 2. Suppose that Q, G are groupoids with properties I(—III). Then every triple f, g, h of homotopic mappings of Q onto G (i. e. for which (1) is satisfied) can be written in the form

$$\begin{aligned} f(e_1xe_2) &= c_1 + k(x) + c_2, \\ g(e_1x) &= c_1 + k(x), \\ h(xe_2) &= k(x) + c_2, \end{aligned} \quad (3)$$

where $k(x)$ is a homomorphism of Q onto G [see(2)].

By another words: the most general solutions of the functional equation (1) defined on the groupoids Q, G with properties I(–III) can be written in the form (3), where $k(x)$ is an arbitrary mapping of Q onto G satisfying (2).

Proof. By putting $y=e_2$ resp. $x=e_1$, with the notations

$$L u = c_1 + u, \quad R u = u + c_2$$

(1) gives

$$g(x) = R^{-1} f(xe_2), \quad h(y) = L^{-1} f(e_1y), \quad (4)$$

where the exponent -1 denotes the inverse mapping.

Thus writing e_1x and ye_2 in (1) instead of x resp. y , we obtain

$$f[e_1(xy)e_2] = R^{-1} f(e_1xe_2) + L^{-1} f(e_1ye_2) \quad (5)$$

and so

$$k(x) = R^{-1} L^{-1} f(e_1xe_2) \quad (6)$$

is really a homomorphism of Q onto G i.e. (2) is satisfied. This last statement can be verified immediatel) by applying the 1–1 mapping

$$u \rightarrow L R u = c_1 + u + c_2$$

on the both sides of (2) namely so it becomes

$$\begin{aligned} f[e_1(xy)e_2] &= c_1 + [k(x) + k(y)] + c_2 = [c_1 + k(x)] + [k(y) + c_2] = \\ &= L k(x) + R k(y) = R^{-1} f(e_1 x e_2) + L^{-1} f(e_1 y e_2) \end{aligned}$$

which is just (5). Here we have used the definition (6) of k and the fact that R and L resp R^{-1} and L^{-1} too are commutable mappings with accordance to

$$c_1 + (u + c_2) = (c_1 + u) + c_2.$$

Thus Theorem 1 is proved.

In order to prove Theorem 2 it is enough to compare (4) with (6) by which we obtain (3). On the other hand, it is easy to verify that functions f, g, h of the form (3) satisfy (1) with an arbitrary function $k(x)$ for which (2) is true.

This completes the proof.

Some corollaries.

1) Every group homotope of a groupoid possessing an identity element is homomorphic map.

2) If one of the mappings f, g, h in (3) is 1–1, then also k is a such one, consequently, they all are 1–1. In this case Q and G are called isotopic.

3) Every loop isotope of a group is an isomorphic map [3].

4) Isotopic groups are isomorphic [3].

5) The most general solution of the functional equation

$$\forall x, y \in Q; \quad f(xy) = g(x) h(y)$$

defined on a grup Q is

$$f(x) = c_1 k(x) c_2, \quad g(x) = c_1 k(x), \quad h(x) = k(x) c_2,$$

where $k(x)$ is an arbitrary endomorphism of Q and c_i are arbitrary fixed elements in Q .

Applications.

The special cases of the functional equation

$$E_1[F_2(x, y), z] = F_3[x, F_4(y, z)], \quad (7)$$

where some of the unknown functions F_i are identical one with the other, can be treated by the application of the generalized Pexider's equation. Namely, it was proved [1] that, under invertability conditions about the functions F_i , all those functions are operations of such groupoids which are isotopes of the same group and thus e. g. in the special case $F_1 = F_2 = F_3$ (see [2]) we have to solve functional equations of the form

$$F_i(x, y) = F_j(x, y) = f_i^{-1} [[g_i(x) h_i(y)]] = f_j^{-1} [[g_j(x) h_j(y)]]$$

i. e.

$$f_j[f_i^{-1}(uv)] = g_j[g_i^{-1}(u)] h_j[h_j^{-1}(v)].$$

So here the corollary 5) can be applied.

A similar consideration holds also for the special cases of equation

$$F_1[F_2(x, y), F_3(u, v)] = F_4[F_5(x, u), F_6(y, v)].$$

LITERATURE CITED

- [1] J. Aczél - V. D. Belousov - M. Hosszú, *Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups*, „Acta Math. Hung.” **11** (1960), 127—136.
- [2] T. H. Angheluta, *Ecuatia funcțională a translației*, „Lucrări științifice (1959)”, 29—31.
- [3] R. H. Bruck, *A survey of binary systems*. 1958.
- [4] H. W. Pexider, *Notiz über Funktionaltheoreme*, „Monatshefte für Math. Phys.” **14** (1903), 293—301.

OBSERVAȚII ASUPRA ECUAȚIEI FUNCȚIONALE A LUI PEXIDER

(Rezumat)

H. W. Pexider a studiat ecuația funcțională [1], unde variabilele independente x, y și funcțiile necunoscute f, g, h iau valori reale. În această notă, autorul consideră aceeași ecuație (1), însă variabilele x, y sînt elementele unui grupoid Q , în care e definită operația binară xy , și f, g, h sînt aplicații ale lui Q pe un alt grupoid G , în care operația e scrisă aditiv. Se presupune că grupoizii Q, G satisfac proprietățile:

- I. $\exists e_1, e_2 \in Q; \forall x, y \in Q; e_1(xe_2) = (e_1x)e_2, e_1(xy)e_2 = (e_1x)(ye_2)$
- II. $x \rightarrow e_1x, xe_2$ sînt aplicații biunivoce ale lui Q pe Q .
- III. $c_1 = g(e_1), c_2 = h(e_2)$ au aceleași proprietăți în G ca și e_i în Q .

Se demonstrează:

Teorema 1. Fie Q, G grupoizi cu proprietățile I—III. Dacă G este un omotop al lui Q , adică există aplicațiile f, g, h ale lui Q pe G , pentru care (1) este satisfăcut, atunci G este o imagine omomorfă a grupoidului Q , adică există o aplicație k a lui Q pe G astfel ca să avem

$$\forall x, y \in Q; \quad k(xy) = k(x) + k(y).$$

Teorema 2. Dacă Q, G sînt grupoizi cu proprietățile I.—III., atunci orice triplet f, g, h de transformare omotopică (pentru care (1) este satisfăcut) poate fi scris sub forma (3), unde $h(x)$ este un omorfism al lui Q pe G .

Se dau cîteva consecințe ale acestor teoreme.

ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕКСИДЕРА

(Резюме)

Г. В. Пексидер изучил функциональное уравнение (1), где независимые переменные x, y и неизвестные функции f, g, h принимают действительные значения. В этой работе автор рассматривает то же уравнение (1), но переменные x, y являются элементами группоида Q , в котором определено бинарное действие xy , и f, g, h являются изображениями Q на другом группоиде G , в котором действие написано аддитивно. Предполагается, что группоиды Q, G удовлетворяют свойствам:

- I. $\exists e_1, e_2 \in Q; \forall x, y \in Q; e_1(xe_2) = (e_1x)e_2, e_1(xy)e_2 = (e_1x)(ye_2)$
 II. $x \rightarrow e_1x, xe_2$

являются взаимно однозначными изображениями Q на G .

- III. $c_1 = g(e_1), c_2 = h(e_2)$

обладают такими же свойствами в G , как и $e_1 Q$.

Доказываются:

Теорема 1. Пусть Q, G группоиды, обладающие свойствами I.—III. Если G есть гомотоп Q , т.е. существуют приложения f, g, h группоида Q на G , для которого (1) является удовлетворенным, то G есть гомоморфное изображение группоида Q , т.е. существует изображение k с Q на G , чтобы таким образом получить:

$$\forall x, y \in Q, \quad k(xy) = k(x) + k(y)$$

Теорема 2. Если Q, G являются группоидами, обладающими свойствами I.—III., то любая тройка f, g, h гомотопического преобразования (для которого (1) удовлетворено) может быть написана в виде (3), где $h(x)$ есть гомоморфизм Q на G .

Дается несколько следствий этих теорем.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER PEXIDERSCHEN FUNKTIONALGLEICHUNGEN

von

E. VINCZE (Miskolc)

1. Mehrere Verfasser haben Verallgemeinerungen der PEXIDERSchen Funktionalgleichungen [3] untersucht. Bezüglich Literaturangaben verweisen wir den Leser an das Buch von J. A c z é l [1]. Das Ergebnis von M. H o s s z ú [2] ist—unseres Wissens—bisher das allgemeinste, und zwar hat er die zwischen zwei (nicht unbedingt ABELschen) Quasigruppen $Q'(\cdot)$ und $Q''(+)$ Homotopie bestimmenden Abbildungen, also die der Funktionalgleichung

$$\omega(x \cdot y) = \rho x + \sigma y$$

$$(x, y, x \cdot y \in Q'; \omega, \rho, \sigma : Q' \rightarrow Q'')$$

genügenden Funktionen ω, ρ, σ unter folgenden Bedingungen angegeben: *es existiert (mindestens) ein Elementepaar e_1, e_2 in Q' , mit denen die Gleichungen*

$e_1(x \cdot e_2) = (e_1 \cdot x) \cdot e_2, e_1 \cdot (x \cdot y) \cdot e_2 = (e_1 \cdot x) \cdot (y \cdot e_2)$ ($x, y \in Q'$) erfüllt sind; die Abbildungen $x \rightarrow e_1 \cdot x$ und $x \rightarrow x \cdot e_2$ sind umkehrbar; die Bildelemente $\rho e_1, \sigma e_2$ in Q'' behalten die Eigenschaften von e_1, e_2 . In vorliegender Arbeit sollen wir die PEXIDERSche Funktionalgleichung unter anderen Bedingungen behandeln.

2. *Es sei $Q(*)$ eine Halbgruppe und $Q_0(\cdot)$ eine (nicht unbedingt ABELsche) Gruppe. Wir suchen die Lösungen der für die Halbgruppe Q geltenden Funktionalgleichung*

$$\alpha(x * y) = \beta x \cdot \gamma y \tag{1}$$

$$(x, y, x * y \in Q; \alpha, \beta, \gamma : Q \rightarrow Q_0).$$

Es gilt der

SATZ 1. *Gibt es ein festes Elementepaar $a, b \in Q$, so dass die Gleichungen*

$$a * x = u, \quad y * b = v \quad (u, v \in Q) \tag{2}$$

für beliebige u, v , (mindestens) je ein Lösungspaar in Q haben, dann ist die allgemeinste Lösung von (1)

$$\begin{aligned}\alpha x &= a_0 \cdot \delta x \cdot b_0, \\ \beta x &= a_0 \cdot \delta x \\ \gamma x &= \delta x \cdot b_0,\end{aligned}\tag{3}$$

wobei δ eine beliebige, der Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}\delta(x * y) &= \delta x \cdot \delta y \\ (x, y, x * y &\in Q; \delta : Q \rightarrow Q_0)\end{aligned}\tag{4}$$

genügende Funktion bezeichnet und $a_0, b_0 \in Q$ beliebige Konstanten sind; d. h. wir können die zwischen Q und Q_0 Homotopie erzeugenden Abbildungen α, β, γ durch die zwischen Q und Q_0 Homomorphie bestimmende Abbildung δ angeben.

Beweis. Laut (1) ist

$$\alpha(x * y * z) = \beta x \cdot \gamma(y * z) = \beta(x * y) \cdot \gamma z,\tag{5}$$

woraus wir wegen der Gruppeneigenschaft von Q_0 ($\cdot$) mit $x=x_0$ bzw. $z=z_0$ die Gleichungen

$$\gamma(y * z_0) \cdot (\gamma z_0)^{-1} = (\beta x_0)^{-1} \cdot \beta(x_0 y) = \delta y,\tag{6}$$

$$\gamma(y * z) = (\beta x_0)^{-1} \cdot \beta(x_0 * y) \cdot \gamma z = \delta y \cdot \gamma z,\tag{7}$$

$$\beta(x * y) = \beta x \cdot \gamma(y * z_0) \cdot (\gamma z_0)^{-1} = \beta x \cdot \delta y\tag{8}$$

erhalten. So wird aus (5)

$$\alpha(x * y * z) = \beta x \cdot \delta y \cdot \gamma z\tag{9}$$

Weiter folgt aus (8)

$$\beta x \cdot \delta(y * z) = \beta(x * y * z) = \beta(x * y) \cdot \delta z = \beta x \cdot \delta y \cdot \delta z,$$

also genügt δ tatsächlich der Gleichung (4).

Es seien nun in (8), (7) $x=a$ und $z=b$ feste Elemente mit der Eigenschaft (2), dann ergeben sich

$$\begin{aligned}\alpha(a * y) &= \beta a \cdot \delta y = \beta a \cdot [(\delta a)^{-1} \cdot \delta a] \cdot \delta y = [\beta a (\delta a)^{-1} (\delta a \cdot \delta y)] = a_0 \cdot \delta(a * y), \\ a_0 &= \beta \cdot (\delta a)^{-1}, \\ \gamma(y * b) &= \delta y \cdot \gamma b = \delta y \cdot [\delta b (\delta b)^{-1}] \cdot \gamma b = \delta y \cdot \delta b [(\delta b)^{-1} \cdot \gamma b] = \delta(y * b) \cdot b_0, \\ b_0 &= (\delta b)^{-1} \cdot \gamma b.\end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen folgt aus (9)

$$\begin{aligned}\alpha(n * v) &= (a * x * y * b) = \beta a \cdot \delta(x * y) \cdot \gamma b = \\ &= \beta a \cdot [(\delta a)^{-1} \delta a] \cdot \delta(x * y) \cdot [\delta b (\delta b)^{-1} \gamma b] = \\ &= [\beta a \cdot (\delta a)^{-1}] \cdot [\delta a \cdot \delta(x * y) \cdot \delta b] \cdot [(\delta b)^{-1} \gamma b] = \\ &= a_0 \cdot \delta(a * x * y * b) \cdot b_0 = a_0 \cdot \delta(u * v) \cdot b_0, \\ \alpha(u * v) &= a_0 \cdot \delta u \cdot \delta v \cdot b_0 = \beta u \cdot \gamma v.\end{aligned}$$

Also sind die Funktionen (3) und nur diese tatsächlich die Lösungen von (1). Damit ist der Satz bewiesen.

3. Wir erweitern jetzt die Gruppe Q_0 mit einem Nullelement und bezeichnen die neue Struktur mit $Q'_0(\cdot)$. Es gilt also für beliebige ξ, η

$$0\xi = \eta \cdot 0 = 0 \quad (\xi, \eta \in Q'_0). \quad (10)$$

Wir untersuchen, was für eine Lösung die Funktionalgleichung

$$\alpha(x * y) = \beta x \cdot \gamma y \quad (11)$$

$$(x, y, x * y \in Q; \alpha, \beta, \gamma : Q \rightarrow Q'_0)$$

hat. Die Lösung beginnen wir auch jetzt mit der Gleichung (5), aber zu dem Bestehen der Gleichungen (6), (7) bzw. (8) sind $\beta x_0 \neq 0$ und $\gamma z_0 \neq 0$ erforderlich. Wenn diese zwei Bedingungen erfüllt sind, ist der vorige Gedankengang unverändert gültig. Wenn dagegen keine solche x_0 und z_0 existieren, für die $\beta x_0 \neq 0$ bzw. $\gamma z_0 \neq 0$ bestehen, so sind die Lösungen

$$\beta x \equiv \alpha x \equiv 0 \text{ und } \gamma x \text{ beliebig,} \quad (12)$$

bzw.

$$\gamma x \equiv \alpha x \equiv 0 \text{ und } \beta x \text{ beliebig.}$$

Es gilt also der folgende

SATZ 2. *Gibt es ein festes Elementepaar $a, b \in Q$ bei denen die Gleichungen (2) für beliebige $u, v \in Q$ (mindestens) eine Lösung in Q haben, dann erfüllen unter den Funktionen α, β, γ , die Q in Q_0 abbilden, die von den Formen (3), (12) und (13) und nur diese die Gleichung (11).*

4. Schliesslich werfen wir das folgende ungelöste Problem auf.

PROBLEM. Ob die Gleichungen (1) und (im nichttrivialen Falle) (11) allgemeinere Lösung haben, wenn die Halbgruppe Q (d.h. der Definitionsbereich) die Eigenschaft (2) nicht besitzt. Wir haben den Spezialfall, wo Q eine additive Halbgruppe (nicht unbedingt mit Einselement) von reellen Zahlen ist, schon erledigt [4].

LITERATURVERZEICHNIS

1. J. A c z é l, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel und Stuttgart, 1961.
2. M. H o s s z ú, *Remarks on the Pexider's functional equation*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica-Physica“ I/1962.
3. W. P e x i d e r, *Notiz über Funktionaltheoreme*, „Monatsh. Math. Phys.“ 14 (1903), 293–301.
4. E. V i n c z e, *Verallgemeinerung eines Satzes über assoziative Funktionen von mehreren Veränderlichen*, „Publ. Math.“ Debrecen, 8 (1961), 68–74.

DESPRE O GENERALIZARE A ECUAȚIEI FUNCȚIONALE A LUI PEXIDER

(R e z u m a t)

Fie $Q(x)$ un semigrup și $Q_0(\cdot)$ un grup. Relativ la soluțiile ecuației funcționale (1) se demonstrează următoarea teoremă:

Dacă există elementele fixe $a, b \in Q$, astfel ca ecuațiile (2) să posedă pentru orice $u, v \in Q$ cel puțin cite o soluție în Q_0 atunci soluția generală a ecuației (1) este dată de formulele (3), unde δ este o funcție oarecare ce verifică ecuația funcțională (4) și $a_0, b_0 \in Q$ sînt constante arbitrare. Cu alte cuvinte, omotopia dintre Q și Q_0 , generată de aplicațiile α, β, γ , poate fi exprimată cu omomorfismul δ dintre Q și Q_0 .

Teorema a doua se referă la cazul în care grupului Q_0 i se adaugă un element nul.

Se ridică problema dacă ecuația (1) posedă sau nu și alte soluții, în cazul cînd proprietatea (2) nu este presupusă.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕКСИДЕРА

(Р е з ю м е)

Пусть $Q(x)$ — полугруппа и $Q_0(\cdot)$ — группа. Относительно решений функционального уравнения (1) доказывается следующая теорема:

Если существуют постоянные элементы $a, b \in Q$, так чтобы уравнения (2) имели бы для любого $u, v \in Q$ по крайней мере по одному решению от Q_0 , то общее решение уравнения (1) дается формулами, (3), где δ есть некоторая функция, проверяющая функциональное уравнение (4), и $a_0, b_0 \in Q$ являются произвольными постоянными. Другими словами, гомотопия между Q и Q_0 , образованная приложениями α, β, γ , может быть выражена гомоморфизмом δ между Q и Q_0 .

Вторая теорема относится к случаю, в котором к группе Q_0 прибавляется нулевой элемент.

Возникает вопрос, имеет ли уравнение (1) или не имеет и другие решения, в том случае, когда свойство (2) не является предполагаемым.

BINARA FOTOMETRICĂ V TRIANGULI

de

GHEORGHE CHIȘ și VASILE URECHE

Steaua variabilă V Trianguli este o binară fotometrică strânsă, de tipul β Lyrae.

A fost observată de J o r d a n [4], H o f f m e i s t e r [3], apoi de A. A. N i j l a n d [5] care deduce elementele:

Min. hel. = D. J. 2424474,302 + 0^h58^m2054E.

S. G a p o s c h k i n [1], calculează elementele sistemului în ipotezele U și D . Găsește că sistemul este o binară strânsă, formată din 2 corpuri elipsoidale, puțin diferite ca mărime, avînd distanța de la marginea unei componente la cealaltă $1 - a_1 - a_2 = 0,32-0,33$. În lipsa observațiilor spectroscopice, Gaposchkin pe baza relațiilor statistice deduse între elipticitate și tip spectral, precum și între raza componente strălucitoare și tip spectral, calculează pentru componenta strălucitoare tipul A_1 , iar pentru cea slabă $F_2 - F_5$.

P h. H. T a y l o r [11] din observațiile lui J o r d a n [4] deduce o ușoară asimetrie a curbei de lumină, pe care caută să o explice, fie prin așa numitul fenomen de „rezonanță”, fie prin schimbul de masă între componentele binarei de contact. Lipsa observațiilor spectroscopice nu permite determinarea elementelor absolute ale sistemului.

F i n d i n g L i s t [6] indică necesitatea observațiilor vizuale pentru stabilirea curbei de lumină și a asimetriei.

La Observatorul astronomic din Cluj, binara fotometrică V Trianguli, a fost inclusă în programul de observație, începînd din anul 1953. A fost observată fotovizual, cu ajutorul lunetei Prin ($D = 20$ cm, $F = 300$ cm) și a telescopului Newton ($D = 50$ cm, $F = 250$ cm), de la Observatorul din Cluj, pe plăci Isopan ISS și Isopan F cu un filtru Schott GG11, după ce în prealabil plăcile au fost sensibilizate cu o soluție de alcool. Prin expuneri de 10^m și 4^m s-au obținut pe o placă între 2 și 10 poze. De aci au rezultat: 183 poze fotovizuale la lunetă și 254 poze fotovizuale la telescop, adică în total 437 poze fotovizuale, efectuate de colectivul Observatorului.

Pentru determinarea magnitudinilor fotovizuale ale stelelor de comparație — stelele a, b, c, d, e , ale lui J o r d a n la care s-a mai adăugat

încă o stea notată cu f — s-a fotografiat pe 7 plăci secvența polară de Nord și regiunea binarei V Trianguli (fig. 1). Înnegririle stelelor de comparație s-au măsurat pe plăci cu ajutorul unui Schnellphotometer M2 Zeiss, al Catedrei de fizică a Institutului politehnic din Cluj. Curbele caracteristice ale plăcilor au fost trasate cu ajutorul a 19 stele standard din secvența polară de Nord, cu magnitudini fotovizuale precis determinate [2].

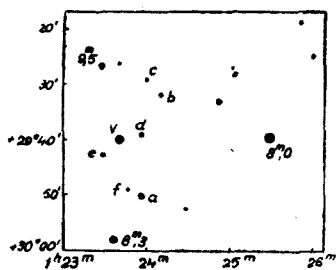


Fig. 1.

De aici au rezultat magnitudinile fotovizuale ale stelelor de comparație și erorile lor, care sînt date în tabelul stelelor de comparație (tabelul nr. 1). Magnitudinile variabilei au fost evaluate pe plăci, prin metoda lui Argelander și metoda lui Nijland. Observațiile au fost prelucrate separat, pe categorii de plăci și instrumente însă nu s-au obținut diferențe esențiale de la o categorie la alta. Din totalitatea observațiilor a fost dedusă următoarea formulă de trecere de la grade personale la magnitudini fotovizuale:

$$m_{pv} = 11^m,88 - 0^m,077 s$$

cu ajutorul căreia au fost determinate magnitudinile fotovizuale ale variabilei.

Din observații au rezultat momentele a 25 minime principale (tabel nr. 2) și momentele a 5 minime secundare (tabel nr. 3) precum și curba medie de lumină (tabel nr. 5). În primele două tabele, prima coloană cuprinde momentul minimului exprimat în zile juliene, a doua diferențele $O - C_1$ (observație — calcul) în raport cu elementele lui Nijland, a treia diferențele $O - C_2$ în raport cu elementele lui Prihodko [7] și a patra epoca. Prihodko deduce elemente medii ale variației de lumină, din care trage concluzia că perioada variabilei V Trianguli nu variază. Din tabelul nr. 2 se observă însă că elementele lui Prihodko nu verifică ultimele observații, acestea fiind verificate de elementele lui Nijland. În tabelul nr. 2, pe lângă cele 25 minime principale observate la Cluj, sînt trecute încă 39 minime date de diferiți autori [3, 5, 8, 9, 10].

Observațiile de minime, deși extinse pe un mare interval de timp — aproape 27 000 de perioade — sînt puține la număr. Cu excepția seriilor masive de observații ale lui Hoffmeister și Nijland, variabila a fost observată doar sporadic. Cele 64 minime principale au fost grupate în 22 minime normale, după perioadele de vizibilitate ale variabilei. În tabelul minimelor normale (tabel nr. 4) ultimele două coloane cuprind numărul n de minime individuale și ponderea p a minimului normal corespunzător, atribuită în funcție de numărul de observații și de eroarea cu care au fost determinate momentele minimelor.

Pentru fiecare minim normal s-a scris cîte o ecuație de forma

$$\Delta T + E \Delta P = O - C_1$$

Pe baza acestor ecuații s-au obținut elementele:

$$\text{Min hel.} = D.J.2424474,305 + 0,5852052 E$$

± 1
 ± 08

Aceste elemente verifică mai bine observațiile decât elementele lui N i j l a n d, după cum rezultă din diferențele $O - C_3$ din tabelul nr. 4, calculate cu aceste elemente.

Graficul diferențelor $O - C_3$ (fig. 2), pare că indică o variație a perioadei sistemului, fără a se putea pune în evidență modul de variație a perioadei din cauza lacunelor mari existente în șirul observațiilor.

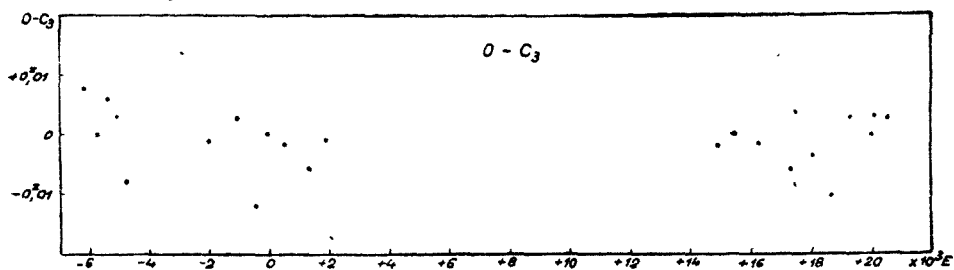


Fig. 2.

Pentru întocmirea curbei de lumină, observațiile au fost grupate în puncte normale după fazele calculate cu elementele lui N i j l a n d, cuprinse în tabelul nr. 5. Pe baza acestui tabel s-a construit curba medie de lumină (fig. 3). Din cercetarea curbei de lumină rezultă:

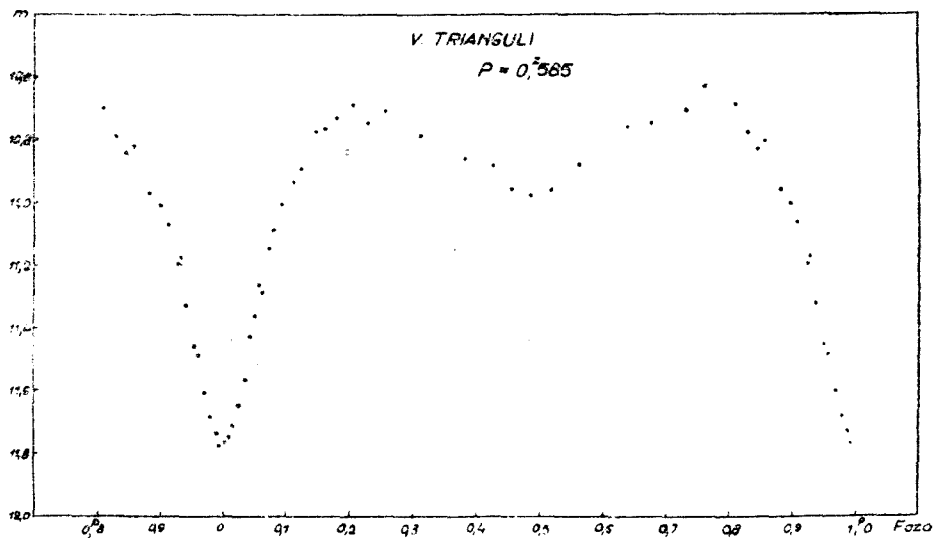


Fig. 3.

— magnitudinile în maxim și în minime

$$M = 10^m,7; \quad m_1 = 11^m,75; \quad m_2 = 11^m,0;$$

- eclipsă parțială, de acord cu constatările lui Hoffmeister.
- minimul secundar mai larg decît cel principal ($D_2 > D_1$).
- o ușoară asimetrie între fazele $0^p,040-0^p,060$. Ultimele două constatări pledează în favoarea existenței unei atmosfere comune celor două componente.

Tabel nr. 1

Steana	m_{pv}	Eroarea
a	10,64	$\pm 0,03$
b	10,70	$\pm 0,04$
c	10,99	$\pm 0,03$
d	11,05	$\pm 0,03$
f	11,59	$\pm 0,04$
e	11,88	$\pm 0,04$

Tabel nr. 2

Minime principale

D.J.hel. 24	$O - C_1$ 0 ^s ,0001	$O - C_2$ 0 ^s ,0001	E	Observatori și surse
20830,2400	+120	+ 79	- 6227	Hoffmeister [3]
845,4450	+ 17	- 21	- 6201	"
902,2270	+188	+147	- 6104	"
920,3650	+154	+114	- 6073	"
21106,4500	+ 51	- 12	- 5755	"
116,3950	+ 16	- 23	- 5738	"
117,5680	+ 42	- 3	- 5736	"
119,3260	+ 66	- 27	- 5733	"
130,4460	+ 77	- 38	- 5714	"
133,3650	+ 6	- 32	- 5709	"
250,4070	+ 15	- 22	- 5509	"
280,2670	+161	+123	- 5458	"
429,4840	+ 57	+ 21	- 5203	"
488,5920	+ 80	+ 44	- 5102	"
665,3120	- 41	- 75	- 4800	"
23287,5010	- 44	- 65	- 2028	Nijland [5]
294,5340	+ 61	+ 41	- 2016	"
805,4180	+ 58	+ 42	- 1143	"
24083,3760	- 88	-101	- 668	"
196,3200	- 94	-107	- 475	"
433,3420	+ 44	+ 33	- 70	"
474,3020	0	- 10	0	"
774,5100	- 24	- 31	+ 513	"
829,5300	+ 83	+ 76	+ 607	"
25234,4840	+ 2	- 2	+ 1299	"
214,4260	- 63	- 66	+ 1316	"
275,4450	- 32	- 35	1369	"
508,3600	+ 1	- 1	1767	"
515,3810	- 14	- 15	1779	"
532,3640	+106	+105	1808	"

Tabel nr. 2 (urmare)

Minime principale

D. J. hel. 24	$O - C_1$ 0 ² ,0001	$O - C_2$ 0 ² ,0001	E	Observatori și surse
571,5500	-121	-122	1875	„
590,2960	+ 73	+ 73	1907	„
33187,4240	- 12	+ 52	14889	Szczepanowska [8]
190,3490	- 22	+ 42	14894	„ [9]
517,4810	0	+ 67	15453	„ [8]
949,3610	- 16	+ 55	16191	„
34606,5340	-143	- 66	17314	„ [9]
623,5288	+ 95	+172	17343	Chiș-Ureche
35048,3742	- 42	+ 39	18069	„
367,3040	-113	- 30	18614	Szczepanowska [9]
742,4310	- 10	+ 77	19255	Chiș-Ureche
749,4565	+ 21	+107	19267	„
759,4039	+ 10	- 96	19284	„
763,5023	+ 29	+116	19291	„
773,4466	- 13	+ 74	19308	„
779,3110	+111	+197	19318	Szczepanowska [10]
790,4210	+ 22	+108	19337	Chiș-Ureche
36093,5565	+ 13	+102	19855	„
119,3025	- 18	+ 72	19899	„
137,4433	- 13	+ 76	19930	„
143,2963	- 14	+ 76	19940	„
157,3419	- 16	+ 74	19964	„
158,5120	- 10	+ 80	19966	„
165,5345	- 10	+ 80	19978	„
219,3835	+ 91	+182	20070	„
232,2488	- 1	+ 89	20092	„
484,4740	+ 16	+108	20523	„
490,3265	+ 20	+113	20533	„
36500,2733	+ 3	+ 96	20550	Chiș-Ureche
501,4451	+ 17	+110	20552	„
507,2978	+ 24	+116	20562	„
589,2233	- 9	+ 85	20702	„
610,2950	+ 34	+128	20738	„
620,2415	+ 14	+108	20755	„

Tabel nr. 3

Minime secundare

D. J. hel. 24	$O - C_1$ 0 ² ,0001	$O - C_2$ 0 ² ,0001	E	Observatori
36220,2555	+ 33	+123	20071,5	Chiș-Ureche
234,2957	- 14	+ 76	20095,5	„
513,4340	- 61	+ 32	20572,5	„
540,3566	- 29	+ 64	20618,5	„
595,3681	- 7	- 86	20712,5	„

Tabel nr. 4

Minime normale

D. J. hel. 24.	$O - C_1$ 0 ^z ,0001	$O - C_3$ 0 ^z ,0001	E	n	p
20845,4553	+120	+ 77	-- 6201	4	4
21119,3234	+ 40	-- 2	-- 5733	6	12
280,2612	+103	+ 62	-- 5458	2	2,5
488,5911	+ 71	+ 30	-- 5102	2	5
665,3120	-- 41	-- 80	-- 4800	1	3
23294,5305	-- 26	-- 8	-- 2016	2	3
805,4180	-- 58	+ 25	-- 1143	1	2
24196,3202	-- 92	--123	-- 475	2	3
433,3405	-- 29	-- 1	-- 70	2	3
774,5136	+ 12	-- 17	513	2	3
25234,4807	-- 31	-- 59	+ 1299	3	3
590,2904	+ 17	-- 9	+ 1907	5	7
33190,3495	-- 17	-- 17	+14894	2	4
517,4810	0	0	+15453	1	2
949,3610	-- 16	-- 14	+16191	1	2
34606,5419	-- 64	-- 59	+17314	2	1,5
35048,3742	-- 42	-- 36	+18069	1	2
367,3040	--113	--106	+18614	1	2
742,4338	+ 18	+ 27	+19255	7	12
36143,2965	-- 12	-- 2	+19940	7	14,5
232,2511	+ 22	+ 32	+20092	2	2
490,3261	+ 16	+ 27	+20533	8	14,5

Tabel nr. 5

Nr. pct. norm.	Nr. de obs.	Faza	m_{pv}	Nr. pct. norm.	Nr. de obs.	Faza	m_{pv}
1	10	0,0013	11,76	25	10	0,4874	10,98
2	10	0,0073	11,75	26	9	0,5204	10,96
3	10	0,0156	11,71	27	9	0,5650	10,88
4	10	0,0239	11,64	28	7	0,6388	10,76
5	10	0,0339	11,56	29	7	0,6811	10,75
6	10	0,0413	11,42	30	10	0,7350	10,71
7	10	0,0488	11,36	31	7	0,7644	10,63
8	9	0,0565	11,26	32	7	0,8128	10,69
9	10	0,0631	11,28	33	8	0,8331	10,78
10	10	0,0741	11,14	34	9	0,8476	10,83
11	10	0,0822	11,08	35	10	0,8594	10,81
12	10	0,0950	11,00	36	10	0,8853	10,96
13	10	0,1119	10,93	37	7	0,9024	11,00
14	10	0,1268	10,89	38	10	0,9121	11,06
15	10	0,1487	10,77	39	10	0,9272	11,19
16	10	0,1632	10,76	40	8	0,9326	11,17
17	10	0,1797	10,73	41	10	0,9395	11,32
18	9	0,2073	10,69	42	10	0,9526	11,45
19	11	0,2294	10,75	43	9	0,9589	11,48
20	7	0,2574	10,71	44	9	0,9711	11,60
21	10	0,3162	10,79	45	10	0,9781	11,68
22	7	0,3861	10,86	46	9	0,9877	11,73
23	10	0,4287	10,88	47	10	0,9936	11,77
24	9	0,4575	10,96				

Tabel nr. 6

Observații

D.J.hel. 243	m_{pv}	D.J.hel. 243	m_{pv}	D.J.hel. 243	m_{pv}	D.J.hel. 243	m_{pv}
4621,4076	10,70	5742,4900	10,95	5790,3838	11,31	6137,4763	11,31
623,4415	10,83	749,4018	11,03	6093,4399	10,64	4819	11,19
4592	10,88	4191	11,19	4503	10,72	4888	11,11
4974	11,34	4316	11,49	4558	10,75	4958	11,03
624,5126	10,67	4441	11,73	4628	10,80	5027	10,98
5307	10,64	4643	11,80	4704	10,83	5098	10,94
5460	10,61	4781	11,50	4836	10,87	5168	10,87
5599	10,53	4920	11,27	4907	10,95	5273	10,79
5724	10,57	5059	11,03	4975	10,99	5339	10,76
5862	10,64	5198	10,88	5044	11,03	5451	10,71
6001	10,72	5338	10,80	5114	11,16	5513	10,68
6105	10,77	759,3113	10,92	107,4696	10,68	5583	10,71
625,3988	10,77	3252	10,98	4765	10,66	5643	10,71
4127	10,72	3415	11,03	4835	10,64	5756	10,79
4266	10,64	3565	11,16	4904	10,68	143,2293	10,94
4453	10,72	3676	11,30	4973	10,72	2348	11,03
5037	10,79	3780	11,43	5043	10,75	2418	11,11
5183	10,87	3912	11,59	5114	10,80	2487	11,19
5041,5463	10,73	4016	11,66	5217	10,87	2557	11,27
4518	10,72	4127	11,70	119,2651	11,27	2619	11,32
4574	10,68	4224	11,50	2699	11,35	2675	11,40
4643	10,67	4419	11,30	2748	11,52	2730	11,46
4713	10,66	763,3007	10,77	2797	11,53	2786	11,59
4782	10,66	3146	10,72	2845	11,59	2841	11,67
4907	10,68	3264	10,70	2922	11,73	2911	11,75
4990	10,68	3389	10,68	2970	11,77	2953	11,79
5060	10,70	4681	11,34	3019	11,78	2994	11,79
5129	10,71	4820	11,50	3067	11,88	3036	11,71
5199	10,72	4952	11,67	3116	11,73	3078	11,67
048,3393	11,35	5091	11,67	3192	11,66	3147	11,59
3463	11,48	5223	11,34	3244	11,50	3189	11,43
3532	11,59	773,4025	11,03	3298	11,46	3234	11,35
3602	11,66	4150	11,27	3394	11,31	3286	11,31
3671	11,79	4218	11,42	3491	11,19	3334	11,19
3740	11,80	4288	11,59	3581	11,03	157,3299	11,67
3810	11,77	4357	11,73	3678	10,95	3341	11,71
3879	11,73	4448	11,77	3873	10,83	3381	11,79
3949	11,59	4503	11,76	3970	10,76	3424	11,80
4018	11,48	4635	11,59	4067	10,72	3464	11,75
4088	11,27	4718	11,34	137,3860	10,94	3507	11,71
4157	11,16	4774	11,19	3916	11,03	3549	11,63
054,2753	11,03	4847	11,11	3985	11,17	3591	11,59
742,4198	11,73	4914	11,03	4055	11,31	3799	11,27
4275	11,81	4983	10,95	4131	11,43	3911	11,19
4344	11,81	5115	10,95	4193	11,51	4036	10,94
4414	11,73	5191	10,90	4277	11,59	4105	10,87
4490	11,66	5250	10,81	4333	11,67	4209	10,87
5442	11,55	5420	10,72	4409	11,75	4279	10,79
4622	11,34	790,3491	10,87	4471	11,75	4348	10,66
4705	11,17	3634	10,95	4542	11,67	4417	10,71
4761	11,09	3700	11,03	4612	11,63	4494	10,67
4830	11,03	3784	11,19	4683	11,55	4556	10,67

Tabel nr. 6 (urmare)

Observații

D.J.hel. 243,	m_{pv}	D.J.hel. 243,	m_{pv}	D.J.hel. 243,	m_{pv}	D.J.hel. 243,	m_{pv}
6157 4685	10,71	6219,3467	11,29	6490,4024	10,88	6540,3530	11,04
4786	10,79	220,2069	10,83	4163	10,80	3669	11,00
4855	10,79	2181	10,87	4274	10,77	3822	10,92
4924	10,83	2292	10,91	4413	10,72	3961	10,88
158,4028	10,71	2389	10,95	4552	10,75	4127	10,85
4111	10,71	2493	11,03	4691	10,79	4301	10,83
4233	10,79	2604	11,03	494,2577	10,72	4482	10,80
4320	10,87	2708	10,95	2770	10,72	4586	10,72
4410	10,94	2806	10,92	2930	10,68	541,4515	10,88
4500	10,98	2924	10,88	500,3005	11,38	4654	10,92
4611	11,03	3014	10,84	3186	11,15	4793	10,94
4695	11,16	3125	10,80	3311	11,04	4932	10,96
4765	11,31	3222	10,72	3471	10,94	5070	10,99
4848	11,43	232,2271	11,41	3603	10,88	5209	11,04
4967	11,63	2521	11,66	501,4400	11,73	549,3856	11,19
5046	11,74	2729	11,38	4519	11,73	3974	11,35
5129	11,79	2889	11,16	4684	11,42	589,2076	11,58
5188	11,74	3028	11,03	4816	11,27	2166	11,73
5250	11,69	234,2572	10,80	4900	11,12	2257	11,76
5323	11,59	2801	10,87	4997	10,96	2347	11,65
5410	11,43	2878	10,91	5108	10,88	2437	11,58
5479	11,31	2954	10,95	5288	10,80	2541	11,38
5542	11,19	3030	10,92	5387	10,77	2653	11,27
5603	11,03	3107	10,87	5545	10,72	2778	11,04
5674	10,97	3197	10,84	504,3739	11,73	2916	10,95
5743	10,90	484,2731	10,79	507,2920	11,73	3062	10,88
165,4249	10,71	2912	10,71	3101	11,65	3208	10,80
4332	10,71	3011	10,71	3247	11,38	3333	10,72
4409	10,79	3120	10,67	3413	11,08	595,3255	10,88
4478	10,87	3792	10,79	3524	10,96	3369	10,93
4584	10,90	3889	10,87	3656	10,92	3480	10,95
4658	10,96	3983	10,91	3767	10,88	3591	10,99
4756	11,03	4108	10,95	513,3376	10,84	3696	11,01
4832	11,11	4184	10,99	3515	10,88	3890	10,95
4910	11,19	4255	11,03	3654	10,92	605,2905	10,88
4987	11,31	4323	11,19	3793	10,92	3169	11,04
5124	11,47	4399	11,35	3932	10,94	610,2562	11,27
182,3184	10,79	4531	11,59	4085	10,97	2707	11,42
3253	10,75	4594	11,75	4210	10,99	2798	11,58
3323	10,71	4698	11,82	4349	11,08	2903	11,73
3392	10,64	4781	11,79	4501	10,96	3006	11,65
3462	10,72	4948	11,59	4640	10,93	3110	11,58
3531	10,72	5010	11,51	4779	10,92	3214	11,42
183,3466	10,79	5087	11,34	4904	10,84	3318	11,23
3758	10,93	5156	11,15	5043	10,82	620,2214	11,50
208,3174	10,95	5260	11,03	527,3566	10,72	2308	11,65
3389	10,88	490,2691	11,04	3705	10,72	2388	11,73
3486	10,80	2837	11,27	3844	10,80	2513	11,65
3590	10,72	2955	11,42	4011	10,88	2634	11,48
3694	10,72	3073	11,58	4122	10,92	2756	11,27
3798	10,68	3191	11,73	528,2369	10,80	2874	11,12
3903	10,68	3316	11,73	2487	10,76	623,2623	10,84

Tabel nr. 6 (urmare)

Observații

D.J.hel. 243	m_{pv}	D.J.hel. 243	m_{pv}	D.J.hel. 243	m_{pv}	D.J.hel. 243	m_{pv}
6219,2835	10,72	6490,3441	11,58	6723,2626	10,86	6623,2765	10,72
3037	10,80	3580	11,42	2765	10,88	2907	10,72
3162	10,87	3684	11,24	530,3442	10,88	3046	10,68
3259	10,95	3788	11,09	3630	10,95	3185	10,68
3363	11,11	3906	10,95	540,3364	10,95	3324	10,72
						3463	10,80

BIBLIOGRAFIE

1. G a p o s c h k i n S., „Veröffentlichungen Berlin-Babelsberg”, 1931 t. IX, fasc. 5
2. * *Handbuch der Astrophysik*, J. Springer, Berlin, 1931 t. II, partea II, p. 495.
3. H o f f m e i s t e r C., „Astronomische Nachrichten”, 1919, **208**, p. 251.
4. J o r d a n F. C., „Publ. Allegheny Observatory”, 1927, **7**, fasc 2, p. 157.
5. N i j l a n d A. A., „Bull. Astronomical Institutes Netherlands”, 1930, **217**, p. 117.
6. P i e r c e N. L., „Contr. Princeton University Observatory”, 1947, nr. 22, p. 14.
7. P r i h o d k o A. E., „Astronomiceski Tirkuliar”, 1958, nr. 195, p. 15.
8. S z c z e p a n o w s k a A., „Acta astronomica seria C”, 1955, **5**, p. 74.
9. S z c z e p a n o w s k a A., „Acta Astronomica seria C” 1956, **6**, p. 144.
10. S z c z e p a n o w s k a A., „Acta Astronomica seria C” 1959, **9**, p. 46.
11. T a y l o r Ph. H., „The Astrophysical Journal”, 1941, **94**, p. 46.

ФОТОМЕТРИЧЕСКАЯ ДВОЙНАЯ V TRIANGULI

(Резюме)

В этой работе авторы передают 437 фотовизуальных наблюдений над фотометрической двойной V Trianguli, произведенных в Клужской-обсерватории в промежутке 31 августа 1953 г. — 23 февраля 1959 г.

Фотовизуальные магнитуды сравниваемых звезд были определены измерениями почернения пластинок, выполненными шнельфотометром M2 Цейсса, а магнитуды переменной — оценками на пластинках. Из этих наблюдений вывели 25 основных минимумов и 5 второстепенных минимумов. На основании этих минимумов и минимумов, полученных другими авторами, были определены элементы

$$\begin{aligned} \text{Min. hel} &= \text{D. J. } 2424474, 305 + 0^{\text{h}}58^{\text{m}}20^{\text{s}}52^{\text{E}} \\ &\quad \pm 1 \quad \quad \quad \pm 08 \end{aligned}$$

Кривая блеска, построенная при помощи 47 нормальных положений, имеет крайние магнитуды $M=10^{\text{m}}, 70$, $m_1=11^{\text{m}}, 75$, $m_2=11^{\text{m}}, 0$, и незначительную асимметрию между фазами $0^{\text{h}}040-0^{\text{h}}060$. График разностей O—C, вычисленных по отношению к новым элементам, повидимому, указывает на изменение периода.

LA BINAIRE PHOTOMÉTRIQUE V TRIANGULI

(R é s u m é)

Dans cet ouvrage, les auteurs présentent 437 observations photovisuelles de la binaire photométrique V Trianguli, obtenues dans l'intervalle 31 août 1953 – 25 février 1959 à l'Observatoire de Cluj.

On a déterminé les magnitudes photovisuelles des étoiles de comparaison par des mesures de noircissement sur les plaques, effectuées à l'aide d'un Schnellphotometer M_2 Zeiss, et les magnitudes de l'étoile variable par les estimations. De ces observations ont été déduites 25 minimums principaux et 5 minimums secondaires. De tous les minimums accessibles on a déduit les éléments

$$\begin{aligned} \text{Min. hel} &= \text{D. J. } 2424474,305 + 0^{\text{s}},5852052 \text{ E} \\ &\quad \pm 1 \qquad \qquad \qquad \pm 08 \end{aligned}$$

La courbe de lumière, basée sur 47 positions normales, a les magnitudes extrêmes $M = 10^{\text{m}},70$, $m_1 = 11^{\text{m}},75$, $m_2 = 11^{\text{m}},0$, et présente une légère asymétrie entre les phases $0^{\text{p}},040 - 0^{\text{p}},060$. Le graphique des différences $O-C$ calculées par rapport aux éléments nouveaux semble indiquer une variation de la période.

ASUPRA UNEI AXIOME DE STATICA SOLIDULUI RIGID

de

VICTOR VĂLCOVICI (București)

1. Să considerăm ecuațiile de mișcare ale unui solid rigid, liber (fără legături), raportate la un triedru trirectangular $T_1 (\equiv o_1 x_1 y_1 z_1)$ imobil și la altul $T (\equiv Oxyz)$ mobil, solidar legat cu solidul, originea $\bigcirc$ a triedrului mobil fiind însuși centrul de greutate al solidului. După cum se știe ecuațiile vectoriale de mișcare se pot pune sub forma¹

$$\begin{aligned} M \bar{v} &= \bar{R}, \\ \tau \bar{\omega} + \bar{\omega} \times (\tau \bar{\omega}) &= \bar{M}, \end{aligned} \quad (1)$$

cu următoarele notații:

- M , masa solidului;
- $\bar{v}$, viteza centrului de greutate $\bigcirc$ față de triedrul fix;
- $\dot{\bar{v}}$, derivata vectorului $\bar{v}$ în raport cu timpul, față de triedrul T_1 ;
- τ , tensorul de inerție în $\bigcirc$ al solidului;
- $\bar{\omega}$, vectorul rotație pentru triedrul T , în $\bigcirc$;
- $(\bar{R}, \bar{M})$, torsorul forțelor exterioare, socotit în $\bigcirc$.

Să presupunem că $\bar{R}$ și $\bar{M}$ sînt funcțiuni date, de poziția solidului în spațiu (s. ex. de vectorul de poziție $\bar{p}$ al centrului maselor $\bigcirc$ față de triedrul fix T_1 și de unghiurile lui Euler corespunzătoare) precum și de variabilele $\bar{v}$, $\bar{\omega}$, t . Sistemul de ecuații (1) la care am mai adăugat și ecuația $\dot{\bar{p}} = \bar{v}$, derivata $\dot{\bar{p}}$ fiind luată față de triedrul fix T_1 , admite, în virtutea teoremei Cauchy - K o w a l e w s k a i a, un sistem unic de soluții $(\bar{p}, \bar{v}, \bar{\omega})$ într-un anumit interval de timp $[t_0, t_1]$ $t_1 > t_0$ pentru necunoscutele $\bar{p}$, $\bar{v}$, $\bar{\omega}$ privite ca funcții de t , corespunzînd la valorile inițiale $\bar{p}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{\omega}_0$ în momentul $t = t_0$, dacă funcțiile $\bar{R}$, $\bar{M}$ satisfac anumite condiții de regularitate în intervalul de timp considerat.

¹) A se vedea s. ex. V. Vălcovici, Șt. Bălan, R. Voinea, *Mecanica teoretică*, Editura tehnică, București, 1959, p. 632.

Proprietatea de existență ($\exists$) și cea de unicitate ($\cup$) au consecințe mecanice importante. Vom enunța aceste consecințe într-un caz cu totul particular — caz care prezintă, de altfel, o deosebită însemnătate pentru Mecanică. Vom presupune anume că torsorul forțelor exterioare în centrul $\bigcirc$ al maselor este neconținut nul,

$$\bar{R} \equiv 0, \quad \bar{M} \equiv 0,$$

în tot intervalul de timp $[t_0, t_1]$.

Soluția sistemului (I) va fi deci

$$\bar{v} = \bar{v}_0, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}'(\bar{\omega}_0),$$

unde am notat cu $\bar{\omega}'$ soluția *Euler-Poinsot* corespunzând valorilor inițiale $\bar{\omega}_0, t_0$ pentru $\bar{\omega}, t$ respectiv, punctul fix fiind considerat în $\bigcirc$. Rezultă următoarea proprietate:

TEOREMĂ. *Mișcarea unui solid supus unui sistem de forțe de torsi nuli constă dintr-o translație rectilinie și uniformă, asociată cu o mișcare Euler-Poinsot față de centrul maselor considerat ca punct fix.*

Această proprietate se găsește adeseori incomplet enunțată; se menționează de multe ori numai mișcarea de translație rectilinie, uniformă, fără a se menționa și mișcarea Euler-Poinsot — ceea ce constituie, evident, o greșeală.

Dacă în particular mărimile inițiale $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}_0$ sînt egale cu zero, atunci mișcarea este total anulată, deoarece atît mișcarea de translație, cît și mișcarea Euler-Poinsot dispar în acest caz particular. Așadar:

COROLAR I. *Solidul supus unui sistem de forțe de torsi nuli rămîne neconținut în stare de repaus, dacă aceasta a fost starea sa inițială.*

Cazul special al sistemului alcătuit din două forțe egale, de sens opus și avînd același suport, sistemul aplicat solidului rigid, prezintă o importanță deosebită deoarece sistemul de forțe avînd torsi nuli va intra în condițiile corolarului I. Vom putea deci enunța următoarea proprietate:

COROLAR II. *Solidul supus acțiunii a două forțe de torsi nuli (egale, de sens opus și avînd același suport) își conservă starea inițială de repaus.*

Această ultimă proprietate se dă de obicei în statică sub forma unei axiome. După cum se vede, ea se poate deduce pe cale matematică din ecuațiile de mișcare ale solidului, așa încît nu este o „axiomă”, ci o „teoremă”.

2. Am demonstrat teorema de mai sus în cazul particular al torsiului identic nul în tot intervalul $[t_0, t_1]$. Ea însă poate fi extinsă la cazul mult mai general cînd vectorii $\bar{R}$ și $\bar{M}$ se prezintă ca niște funcțiuni (date) de variabile $\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{\omega}, t$, dacă aceste funcțiuni, $\bar{R}, \bar{M}$, îndeplinesc condițiile de regularitate cerute de teoremele ($\exists$) și ($\cup$) precum și condițiile

$$\bar{R}(\bar{\rho}', \bar{v}_0, \bar{\omega}', t) = 0, \quad \bar{M}(\bar{\rho}', \bar{v}_0, \bar{\omega}', t) = 0$$

pentru orice valoare a timpului t din intervalul considerat; am notat

$$\bar{\rho}' = \bar{\rho}_0 + \bar{v}_0(t - t_0).$$

În adevăr, în acest caz general ecuațiile de mișcare a solidului admit soluția

$$\bar{p} = \bar{p}', \bar{v} = \bar{v}_0, \bar{\omega} = \bar{\omega}',$$

după cum se vede introducând aceste funcțiuni în sistemul (1) de ecuații. Din cauza proprietății de unicitate (U) ea va fi soluția unică a sistemului în cazul general considerat, așa că teorema demonstrată mai sus va fi valabilă și în acest caz general.

3. Din cele stabilite mai sus se poate deduce o teoremă mai generală care include teorema I și care dă dreptul la aplicații de mare importanță în practică.

Să presupunem că asupra solidului lucrează un sistem de forțe ($\bar{F}'$) de torsor ($\bar{R}', \bar{M}'$) în O , diferit de zero. În virtutea acțiunii acestor forțe solidul ia mișcarea de rototranslație ($\bar{v}, \bar{\omega}$). La momentul $t = t_0$ un sistem de forțe $\bar{F}$ de torsor nul în O ,

$$\tau(\bar{F}) = 0,$$

se suprapune peste acțiunea sistemului ($\bar{F}'$) asupra solidului. Mișcarea de rototranslație ($\bar{v}, \bar{\omega}$) rămîne neschimbată, sau mai bine zis, funcțiile $\bar{v}$ și $\bar{\omega}$ de timp rămîn aceleași, ca și cum nu s-ar fi aplicat nici o forță nouă $\bar{F}$ asupra solidului. În adevăr, ecuațiile (1) care trebuie să determine funcțiile $\bar{v}$ și $\bar{\omega}$ rămîn aceleași, încît soluția lor în $\bar{v}$ și $\bar{\omega}$ va rămîne aceeași dacă nu s-au schimbat condițiile inițiale.

De aici se poate deduce un nou corolar care apare ca o generalizare a corolarului I și anume

COROLAR III. Dacă asupra unui solid avînd o mișcare generală de rototranslație ($\bar{v}, \bar{\omega}$), vectorii $\bar{v}$ și $\bar{\omega}$ fiind funcții de t , se aplică la un moment dat acțiunea unui sistem de forțe de torsor nul, mișcarea ($\bar{v}, \bar{\omega}$) rămîne neinfluențată de această nouă intervenție.

În particular

COROLAR IV. Se pot aplica totdeauna două forțe egale, de sens opus una alteia și avînd același suport—deci de torsor nul—fără ca mișcarea solidului să se resimtă de această suprapunere.

ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ АКСИОМЫ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

(Резюме)

Аксиому статики: „Твёрдое тело, подвергнутое действию двух сил кручения, обращаящегося в нуль (равных и противоположного направления и имеющих одну и ту же опору) сохраняет свое первоначальное состояние“ можно вывести как теорему из общих управлений движения свободного твердого тела.

$$M \dot{\bar{v}} = \bar{R}$$

$$\tau \bar{\omega} + \bar{\omega} \times (\tau \bar{\omega}) = \bar{M}$$

для случая, когда $\bar{R} = 0$ и $\bar{M} = 0$.

Также, в случае свободного твёрдого тела, на которое действует система сил кручения, обращающегося в нуль, наравне с равномерным прямолинейным движением перемещения выделяется и движение Эйлера — Пенсота, которое, обыкновенно, не упоминается.

SUR UN AXIOME DE STATIQUE DU SOLIDE RIGIDE

(R é s u m é)

L'axiome de statique : „Le solide soumis à l'action de deux forces de torseur nul (égales et de sens opposé et ayant le même support) conserve son état initial" peut être déduit comme un théorème des équations générales du mouvement d'un solide rigide libre

$$\begin{aligned} M\dot{\bar{v}} &= \bar{R} \\ \tau \bar{\omega} + \bar{\omega} \times (\tau \bar{\omega}) &= \bar{M} \end{aligned} \quad (1)$$

au cas où $\bar{R} = 0$ et $\bar{M} = 0$.

De même on met en évidence, dans le cas d'un solide rigide libre sur lequel actionne un système de forces de torseur nul, outre le mouvement de translation uniforme rectiligne, un mouvement Euler-Poinsot dont habituellement il n'est pas fait mention.

O EXTINDERE A TEOREMEI CERCULUI

de

ȘT. I. GHEORGHITA (București)

1. Pentru rezolvarea problemelor plane ale hidrodinamicii relative la exteriorul unui contur circular impermeabil se face apel uneori la teorema cercului, enunțată de L. M. Milne — Thomson ([1], [2]). Această teoremă a fost extinsă în cazul când ne interesează determinarea unei funcții în exteriorul cercului $r > a$ și a altei funcții pentru $r < a$, cu diverse condiții pentru $r = a$ (de ex. [3]). În particular, considerînd un mediu poros ce are coeficientul de filtrație $k = k_1$ pentru $r > a$ și $k = k_2$ pentru $r < a$, iar singularitățile mișcării toate în domeniul $r > a$, folosind planul complex $z = x + iy$ și notînd cu $f(z)$ potențialul complex al mișcării cînd $k_1 = k_2$, vom avea

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \overline{f_0\left(\frac{a^2}{z}\right)}, & |z| > a \\ \frac{2k_2}{k_1 + k_2} f_0(z) & , \quad |z| < a \end{cases} \quad (1)$$

În nota de față ne vom ocupa de o extindere a acestei teoreme, fixîndu-ne atenția tot asupra mișcărilor staționare plane orizontale în mediile poroase cînd fluidul e incompresibil. Vom presupune că mediul poros ocupă tot planul și pentru $|z| > r_1$ el este caracterizat prin coeficientul de filtrație constant k_1 , pentru $|z| < r_2$ ($r_2 < r_1$) el are același coeficient egal cu k_2 , iar pentru $r_2 < |z| < r_1$ el este armonic neomogen de un tip particular, în acest domeniu coeficientul de filtrație depinzînd numai de distanța pînă la centrul comun al celor două cercuri. În cazul cînd k e constant și pentru $r_2 < |z| < r_1$, obținem un rezultat care s-ar putea numi teorema celor două cercuri.

2. Conform definiției folosită anterior [4], urmează că vom avea

$$k^{1/2} = E_0 + E_1 \ln(r/r_0) \quad (2)$$

pentru $r_2 < |z| < r_1$, expresia fiind > 0 pentru orice $r \in [r_2, r_1]$.

Considerînd că toate singularitățile mișcării se află în domeniul $|z| > r_1$, dacă în tot planul vom avea coeficientul de filtrație egal cu k_1 , ur-

mează că mișcarea va fi descrisă printr-un potențial complex $f_0(z) = \varphi_0(x, y) + i\psi_0(x, y)$. În cazul mediului neomogen în modul indicat mai sus, mișcarea în cele trei domenii va fi descrisă de trei potențiale ale vitezelor. Având în vedere că mișcarea este orizontală, vom simplifica puțin scrierea fixându-ne atenția asupra presiunilor din cele trei domenii, astfel încît vom scrie

$$p = \begin{cases} p_0 + p & \text{în } D_1 \quad (r > r_1) \\ p_2 & \text{în } D_2 \quad (r_2 < r < r_1) \\ p_3 & \text{în } D_3 \quad (r_2 > r). \end{cases} \quad (3)$$

Funcția p_1^* va trebui să fie o funcție armonică regulată în D_1 și care se anulează la infinit, iar p_3 va fi tot o funcție armonică regulată în D_3 . Cît privește p_2 , ea va avea expresia, folosită și în alte lucrări [5],

$$p_2 = K + k_2^{-1/2} F \quad (4)$$

unde K este o constantă, funcția F este armonică și regulată în D_2 , iar prin k_2 am notat coeficientul de filtrație dat de (2).

Condițiile la limită ce vor trebui satisfăcute pentru $r = r_1$ și $r = r_2$ decurg din necesitatea ca presiunile și vitezele normale să fie continue la traversarea acestor frontiere, deci

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_2, \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial r} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial r} \text{ pentru } r = r_1 \\ p_2 &= p_3, \quad k_2 \frac{\partial p_2}{\partial r} = k_3 \frac{\partial p_3}{\partial r} \text{ pentru } r = r_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

În vecinătatea conturului $r = r_1$ expresia generală a funcției p_0 va fi

$$p_0 = a_0 + \sum_1^{\infty} (c_{0n} \cos n\theta - d_{0n} \sin n\theta) r^n \quad (6)$$

iar funcțiile necunoscute p_1^* , F și p_3 se vor scrie (de ex. [6])

$$\left. \begin{aligned} p_1^* &= \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^{-n} \\ F &= A_0 + \sum_1^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^{-n} + \sum_1^{\infty} (C_n \cos n\theta - D_n \sin n\theta) r^n \\ p_3 &= a_3 + \sum_1^{\infty} (c_n \cos n\theta - d_n \sin n\theta) r^n. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Din (5) vom obține astfel un sistem de ecuații pentru determinarea coeficienților necunoscuți și problema se reduce deci la rezolvarea acestui sistem.

3. Notînd

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 \ln \frac{r_1}{r_0} &= V, \quad E_0 + E_1 \ln \frac{r_2}{r_0} = W, \\ \frac{r_2}{r_1} &= R, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left(\frac{k_1}{V} + V - \frac{E_1}{n}\right) \left(\frac{k_3}{W} + W + \frac{E_1}{n}\right) + R^{2n} \left(\frac{k_1}{V} - V - \frac{E_1}{n}\right) \left(W - \frac{k_3}{W} - \frac{E_1}{n}\right) = H_n^{-1}$$

$$\left(\frac{k_3}{W} + W + \frac{E_1}{n}\right) \left(\frac{k_1}{V} - V + \frac{E_1}{n}\right) - R^{2n} \left(\frac{k_1}{V} + V + \frac{E_1}{n}\right) \left(\frac{k_3}{W} - W + \frac{E_1}{n}\right) = G_n$$

pentru fiecare $n \geq 1$ obținem următoarele expresii pentru cei 8 coeficienți căutați:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= c_{0n} r_1^{2n} H_n G_n \\ c_n &= 4k_1 H_n c_{0n} \\ A_n &= 2k_1 c_{0n} H_n r_2^{2n} (W - k_3 W^{-1} - E_1 n^{-1}) \\ C_n &= 2k_1 c_{0n} H_n (W + k_3 W^{-1} + E_1 n^{-1}) \\ B_n &= 2k_1 d_{0n} H_n r_2^{2n} (k_3 W^{-1} - W + E_1 n^{-1}) \\ D_n &= 2k_1 d_{0n} (W + k_3 W^{-1} + E_1 n^{-1}) \\ b_n &= -d_{0n} r_1^{2n} H_n G_n \\ d_n &= 4k_1 H_n d_{0n}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

iar pentru $n = 0$ vom avea:

$$A_0 = 0, \quad a_3 = a_0 = K. \quad (10)$$

În definitiv se găsește, notînd

$$U_n(\theta) = c_{0n} \cos n\theta - d_{0n} \sin n\theta, \quad (11)$$

$$p_1 = a_0 + \sum_1^{\infty} (r^n + H_n G_n r_1^{2n} r^{-n}) U_n(\theta)$$

$$\begin{aligned} p_2 = a_0 + 2k_1 \left(E_0 + E_1 \ln \frac{r}{r_0}\right)^{-1} \sum_1^{\infty} H_n U_n(\theta) &\left[\left(W - \frac{k_3}{W} - \frac{E_1}{n}\right) \frac{r_2^{2n}}{r^n} + \right. \\ &\left. + \left(W + \frac{k_3}{W} + \frac{E_1}{n}\right) r^n \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$p_3 = a_0 + 4k_1 \sum_1^{\infty} H_n U_n(\theta) r^n.$$

Se recunoaște ușor că p_1 și p_3 sînt părțile reale ale funcțiilor de variabilă complexă

$$\left. \begin{aligned} F_1(z) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z^n + H_n G_n r_1^{2n} \bar{z}^{-n}) \\ F_3(z) &= a_0 + 4k_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n H_n z^n \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

unde $\alpha_n = c_{0n} + id_{0n}$, abstracție făcînd de o constantă complexă neesențială.

În cazul particular $E_1 = 0$ și $k_2 = k_3$, deci $k_2 = E_0^2$, din (8) rezultă că $H_n G_n = (k_1 - k_2)(k_1 + k_2)^{-1}$, și atunci p_1 și p_2 se pot scrie ca partea reală a unei funcții analitice de forma (1), iar $p_2 = p_3$.

Pentru $E_1 = 0$, din (8) rezultă că

$$\begin{aligned} V = W = E_0 &= k_2^{1/2} \\ H_n^{-1} &= [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + R^{2n}(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)] k_2^{-1}, \\ G_n &= [(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + R^{2n}(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)] k_2^{-1}, \\ G_n H_n = J_n &= \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + R^{2n}(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + R^{2n}(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)}, \end{aligned} \quad (14)$$

și atunci:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n + J_n r_1^{2n} r^{-n}) U_n(\theta) \\ p_2 &= a_0 + 2k_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{k_3}{k_2}\right) \frac{r_2^{2n}}{r^n} + \left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right) r^n \right] H_n U_n(\theta) \\ p_3 &= a_0 + 4k_1 \sum_{n=1}^{\infty} H_n U_n(\theta) r^n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Funcțiile p_j se pot scrie imediat ca părți reale ale unor funcții de variabilă complexă, din care se poate obține în particular pentru $k_2 = k_3$ expresii de forma (1). Rezultatul exprimat prin formulele (15) se poate numi *teorema celor două cercuri*.

4. Alegînd diverse expresii pentru p_1 , ca și în [7], putem calcula ușor presiunile și vitezele în orice punct din plan. Astfel, dacă avem un curent uniform la mari distanțe, îndreptat spre x -ii pozitivi,

$$p_0 = -\rho g k_1^{-1} r \cos \theta, \quad (16)$$

deci

$$c_{01} = -\rho g k_1^{-1}; \quad c_{0j} = 0, \quad j = 2, 3, \dots; \quad d_{0n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

și seriile ce apar în (12) se reduc numai la primul termen, unde

$$U_1(\theta) = c_{01} \cos \theta,$$

$$H_1^{-1} = \left(\frac{k_1}{V} + V - E_1 \right) \left(\frac{k_3}{W} + W + E_1 \right) + R^2 \left(\frac{k_1}{V} - V - E_1 \right) \left(W - \frac{k_3}{W} - E_1 \right)$$

$$G_1 = \left(\frac{k_3}{W} + W + E_1 \right) \left(\frac{k_1}{V} - V + E_1 \right) - R^2 \left(\frac{k_1}{V} + V + E_1 \right) \left(\frac{k_3}{W} - W + E_1 \right) \quad (18)$$

În cazul unei surse Q de intensitate q la distanța d de centrul comun O al celor două cercuri ($d > r_1$), vom avea în vecinătatea conturului $r = r_1$, alegînd axele cu originea în O iar Q în punctul $(d, 0)$,

$$p_0 = -\frac{\rho g q}{2\pi k_1} \left[\ln d - \sum_1^\infty n^{-1} (r/d)^n \cos n\theta \right] \quad (19)$$

deci acum

$$a_0 = -\frac{\rho g q}{2\pi k_1} \ln d,$$

$$c_{0n} = \frac{\rho g q}{2\pi k_1 n d^n} \pi \quad (20)$$

$$d_{0n} = 0. \quad (21)$$

BIBLIOGRAFIE

1. L. M. Milne-Thomson, *Hydrodynamical images*, „Proc. Cam. Phil. Soc.”, **36** 1940, p. 246.
2. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical hydrodynamics*, ed. II-a, London, 1949, p. 149.
3. Caius Iacob, *Asupra unei extinderi a teoremei cercului*, „Com. Ac. R. P. R.”, **IX**, nr. 8, 1959, p. 759.
4. Șt. I. Gheorghită, *Flows in harmonically nonhomogeneous porous media*, „Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R.”, **250**, nr. 1, 1958, p. 19.
5. G. S. Salehov, *K opredeleniu davlenia b neodnorodnih plastah nefianih mestorojdenii*, „Izvestia Kazanskovo filiala Ak. Nauk SSSR”, nr. 9, 1956, p. 49.
6. T. H. Anghelută, *Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă*, ed. II, Editura tehnică, Buc. 1957, p. 170.
7. Șt. I. Gheorghită, *Cîteva mișcări în medii poroase neomogene*, „Bul. Șt. Ac. R. P. R., Secțiunea de Șt. Mat. și Fizice” **VI**, nr. 4, 1954, p. 823.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕОРЕМЫ КРУГА

(Резюме)

Рассматривается стационарное плоское движение в неограниченной пористой среде, коэффициент фильтрации которой имеет постоянные значения для $r > r_1$ и $r < r_2$, а для $r_2 < r < r_1$ дается выражением (2), причём особенности движения предполагаются в области $r > r_1$.

Исходя из разложения (6), решение задачи выражается формулами (12). Частный результат, когда $E_1 = 0$ можно назвать *теоремой двух кругов*.

UNE EXTENSION DU THÉORÈME DU CERCLE

(R é s u m é)

On considère le mouvement plan stationnaire dans un milieu poreux non limité où le coefficient de filtration a des valeurs constantes pour $r > r_1$ et $r < r_2$, ... pour $r_2 < r < r_1$ est donné par (2) les singularités du mouvement étant supposées dans la région $r > r_1$. A partir du développement (6), la solution du problème s'exprime par les formules (12). Le résultat particulier pour lequel on a $E_1 = 0$ peut être appelé le théorème des deux cercles.

PROPRIETĂȚILE SEMICONDUCTOARE ALE SISTEMULUI



de

I. URSU, F. PUSKÁS și V. CRISTEA

INTRODUCERE

Proprietățile semiconductoare ale oxidului de zinc și ale oxidului de aluminiu sînt bine cunoscute în literatură [1—11, 13, 16, 23—24]. Cercetarea acestor proprietăți a condus în scurt timp la numeroase aplicații practice deosebit de importante. Astfel din oxid de zinc s-au confecționat celule redresoare [14], din oxid de aluminiu s-au confecționat higrometre electrice de mare sensibilitate [12], iar mai recent tot din oxid de aluminiu s-au confecționat diode și triode semiconductoare [25] a căror funcționare se bazează pe efectul tunel. De asemenea, oxidul de aluminiu se folosește la confecționarea termistoarelor pentru explorarea temperaturilor înalte [13]. Prin funcționarea lor sigură, prin prețul de cost redus și prin calitățile lor, aceste termistoare pot înlocui în măsurătorile de temperatură de peste 900°C, termocuplele de Pt-PtRh.

Pe de altă parte în literatură se citează din ce în ce mai mult cercetarea sistemelor de oxizi semiconductori, care și ei au proprietăți semiconductoare remarcabile. Astfel, pe bază de oxid de zinc au fost studiate, din acest punct de vedere, următoarele sisteme binare: $\text{ZnO}-\text{Fe}_2\text{O}_3$ [15, 17, 20], $\text{ZnO}-\text{TiO}_2$ [19], $\text{ZnO}-\text{Bi}_2\text{O}_3$ [21], $\text{ZnO}-\text{Cu}_2\text{O}$ [22] și $\text{ZnO}-\text{Cr}_2\text{O}_3$, [18].

Datorită proprietăților semiconductoare ale oxidului de zinc și ale oxidului de aluminiu, precum și datorită proprietăților semiconductoare remarcabile ale sistemelor binare pe bază de oxid de zinc deja studiate, ne-am propus în această lucrare să facem studiul proprietăților semiconductoare ale sistemului $\text{ZnO}-\text{Al}_2\text{O}_3$.

PREPARAREA PROBELOR

Prepararea probelor sub formă de amestec s-a făcut din Al_2O_3 puriss. („Merk”) și ZnO p. a. („Analar”) sub formă de pulbere. Oxidul de zinc utilizat este spectroscopic pur, iar oxidul de aluminiu prezintă urme spectrale de impurități de cupru, calciu, fier și magneziu. (Analiza spectrală s-a făcut de Kovács K.).

Probele de cercetare sînt amestecuri de concentrații diferite de ZnO și Al_2O_3 . Concentrațiile componentelor sînt exprimate în moli, iar concentrația probelor variază în intervalul 0—100% ZnO respectiv 100—0% Al_2O_3 .

Probele s-au obținut prin presarea pulberii umezite la o presiune de cca. 10 tf/cm², sub formă de pastile cu diametrul de 10—15 mm și grosimea de 2—4 mm. Pastilele astfel obținute, după o prealabilă uscare lentă, au fost sinterizate timp de 6—8 ore, într-un cuptor de silită, la temperatură de 1200°C. După sinterizare probele au fost supuse unui proces de îmbătrînire, prin încălzire timp de cca. 12 ore, la temperatura de 900°C. Prin aceste condiții de tratament termic s-a asigurat reproductibilitatea preparării și după cum se va vedea, și reproductibilitatea datelor experimentale.

METODA DE LUCRU

Proprietățile semiconductoare ale probelor au fost studiate prin variația conductibilității electrice cu temperatura, în domeniul de temperatură 300—1100°C. În acest scop s-a utilizat un cuptor cu rezistență electrică. La măsurarea conductibilității au fost folosiți electrozi de platină. În scopul realizării unui contact intim, pastilă-electrod, probele au fost introduse, sub presiunea unui resort, într-un dispozitiv confecționat din porțelan (fig. 1). Contactul bun dintre electrozii de platină și pastile s-a verificat

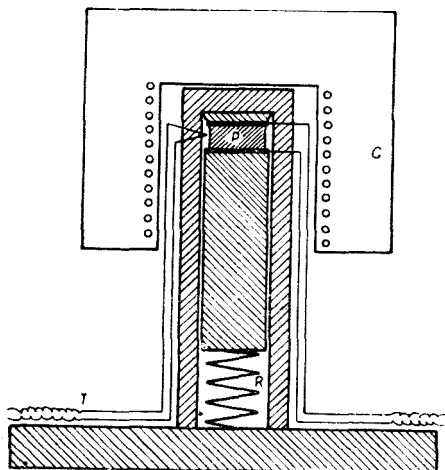


Fig. 1. T — termocuplu Pt — PtRh
 P — Proba (cu electrozii de platină)
 C — cuptor cu rezistență
 R — resort

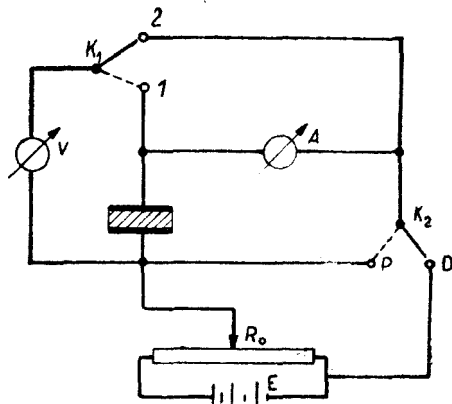


Fig. 2.

prin măsurarea unor probe argintate, pentru care s-au găsit rezultate similare cu cele de la probele neargintate. Temperatura s-a măsurat cu ajutorul unui termocuplu Pt—PtRh.

Conductibilitatea electrică a probelor s-a determinat din tensiunea și intensitatea curentului. Schema conexiunilor electrice este redată în figura 2. În funcție de ordinul de mărime al conductibilității electrice a probelor,

s-a lucrat în montaj aval (comutatorul K_1 în poziția 1) sau montaj amont (comutatorul K_1 în poziția 2). Cu comutatorul K_2 în poziția D se măsoară curentul de conducție iar cu comutatorul în poziția P se măsoară curentul de polarizare. Tensiunea de alimentare de 18 volți s-a folosit la măsurarea conductibilităților electrice mici (cca. $10^{-10} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$), iar 0,4 volți pentru măsurarea conductibilităților electrice mari (cca. $10^{-2} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$).

REZULTATELE EXPERIMENTALE

Variația conductibilității electrice în funcție de temperatură, pentru probe de diferite concentrații, este reprezentată în graficele din figurile 3a și 3b. Din aceste reprezentări rezultă că probele studiate sînt semicon-

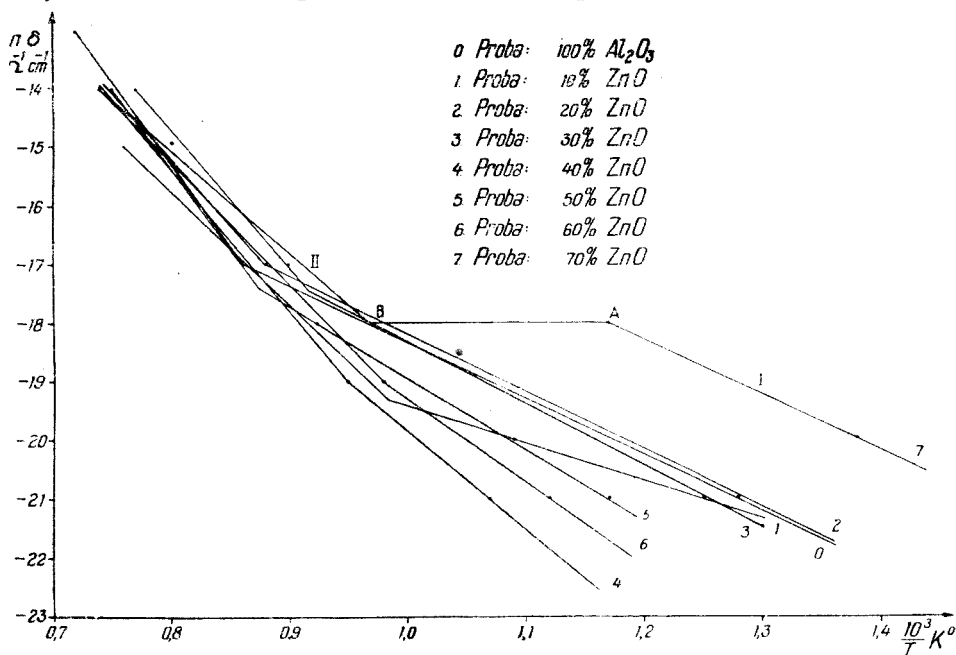


Fig. 3a.

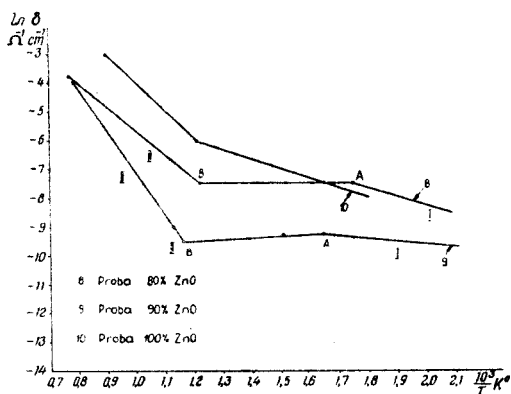


Fig. 3 b.

ductoare. Variația conductibilității lor electrice în funcție de temperatură verifică legea

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} + \sigma'_0 e^{-\frac{\varepsilon'}{kT}} \quad (1)$$

unde ε și ε' sînt energii de activare

σ_0 și σ'_0 sînt constante pentru semiconductorul intrinsec respectiv extrinsec

T este temperatura absolută

k este constanta lui Boltzmann iar

σ este conductibilitatea electrică la temperatura T .

Primul termen din membrul doi al relației (1) se referă la semiconductorul intrinsec, iar al doilea, la semiconductorul extrinsec.

Datele experimentale din figura 3 se așează pe două drepte distincte (I și II). Prima porțiune (I) reprezintă domeniul de conductibilitate extrinsecă, iar a doua porțiune (II), reprezintă domeniul de conductibilitate intrinsecă.

Măsurătorile au arătat că oxidul de zinc este un semiconductor cu rezistivitate mică. Energia de activare pentru oxidul de zinc găsită de noi este 0,65 eV și este în bună concordanță cu rezultatul (0,6 eV) găsit în lucrări anterioare [5—9, 11]. La probele pure de oxid de zinc precum și la cele cu un conținut de 90% ZnO respectiv 80% ZnO s-a pus în evidență și un efect termoelectric. Din semnul forței electromotoare s-a stabilit că, conductibilitatea electrică este de natură electronică.

Proprietățile electrice ale pastilelor cu un conținut de 30% Al_2O_3 și cele cu mai mult de 30% Al_2O_3 sînt asemănătoare cu cele ale oxidului de aluminiu. În cazul acestor probe ca și la oxidul de aluminiu probele au rezistivitate electrică mare și mai prezintă și un fenomen de polarizare. La aceste materiale curentul de polarizare poate să atingă o valoare de 50—60% din curentul direct și persistă chiar la temperaturi mai ridicate (1000°C). Prezența fenomenului de polarizare arată că, conductibilitatea electrică pentru acest caz este de natură ionică.

La pastilele cu un conținut de la 70 la 90% ZnO curba caracteristică

$\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ are trei părți distincte. Între domeniul de conducti-

bilitate extrinsecă (I) și domeniul de conductibilitate intrinsecă (II) apare un nou domeniu $A-B$, domeniul de epuizare, care se datorează epuizării resurselor de impurități. În acest domeniu $A-B$, unde conductibilitatea electrică scade cu creșterea temperaturii, coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura este pozitiv. În domeniul de epuizare, din rezultatele obținute, rezultă că semiconductorul se comportă ca și un conductor metalic.

Din rezultatele experimentale sub forma $\ln \sigma = f(1/T)$ se poate determina energia de activare ε a purtătorilor de curent. Graficul funcției

În $\sigma = f(1/T)$ pentru domeniul intrinsec este o dreaptă (II), al cărei coeficient unghiular este proporțional cu energia de activare ϵ . Astfel:

$$\epsilon = k \operatorname{tg} \alpha = k \frac{Ln\sigma_1 - Ln\sigma_2}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \quad (2)$$

unde σ_1 și σ_2 sînt conductibilitățile materialului la temperaturile T_1 respectiv T_2 .

Din rezultatele experimentale se observă că energia de activare a sistemului $\text{ZnO}-\text{Al}_2\text{O}_3$ variază cu concentrația componentelor. Urmînd variația energiei de activare în funcție de concentrație (fig. 4) se constată că energia de activare prezintă un maxim în cazul probei cu un conținut de 50% ZnO . Studiul roentgenografic, întreprins asupra tuturor amestecurilor, arată că probele cu un conținut de 50% ZnO manifestă o structură bine definită, diferită de cea a oxidului de zinc și a oxidului de aluminiu. În condițiile date, cum rezultă și din diagrama de fază a sistemului $\text{ZnO}-\text{Al}_2\text{O}_3$, se formează un compus spinelic de ZnAl_2O_4 , care este aluminatul de zinc. Datele experimentale arată că în cazul noului compus nu numai energia de activare ϵ ci și coeficientul de temperatură α a rezistenței prezintă un maxim (fig. 5). Acest rezultat se poate explica și din punct de

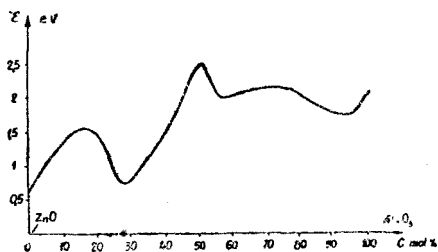


Fig. 4.

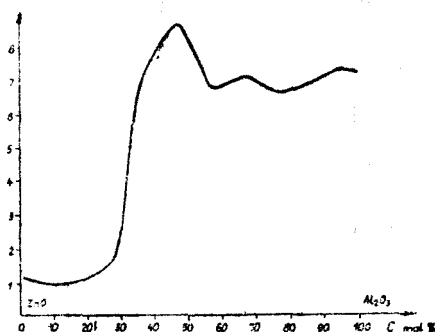


Fig. 5.

vedere teoretic, întrucît între energia de activare ϵ și coeficientul de temperatură α al rezistenței există relația:

$$\alpha = - \frac{\epsilon}{k T^2} \quad (3)$$

Energia de activare a acestui compus stabil în timp, după cum se vede, are o valoare mai mare decît cea a oxidului de aluminiu pur. De asemenea din figurile 6 a și 6 b, unde se reprezintă $\rho = f(T)$ se poate observa că pentru curba obținută la proba 50% ZnO panta este mai mare decît în toate celelalte cazuri. De aici rezultă că în cadrul sistemului binar studiat

$\text{ZnO}-\text{Al}_2\text{O}_3$ se poate găsi, pentru realizarea de termistori, un material cu mult mai adecvat decât oxidul de aluminiu pur indicat în literatură ca material pentru construcția de termistori de temperaturi înalte [13].

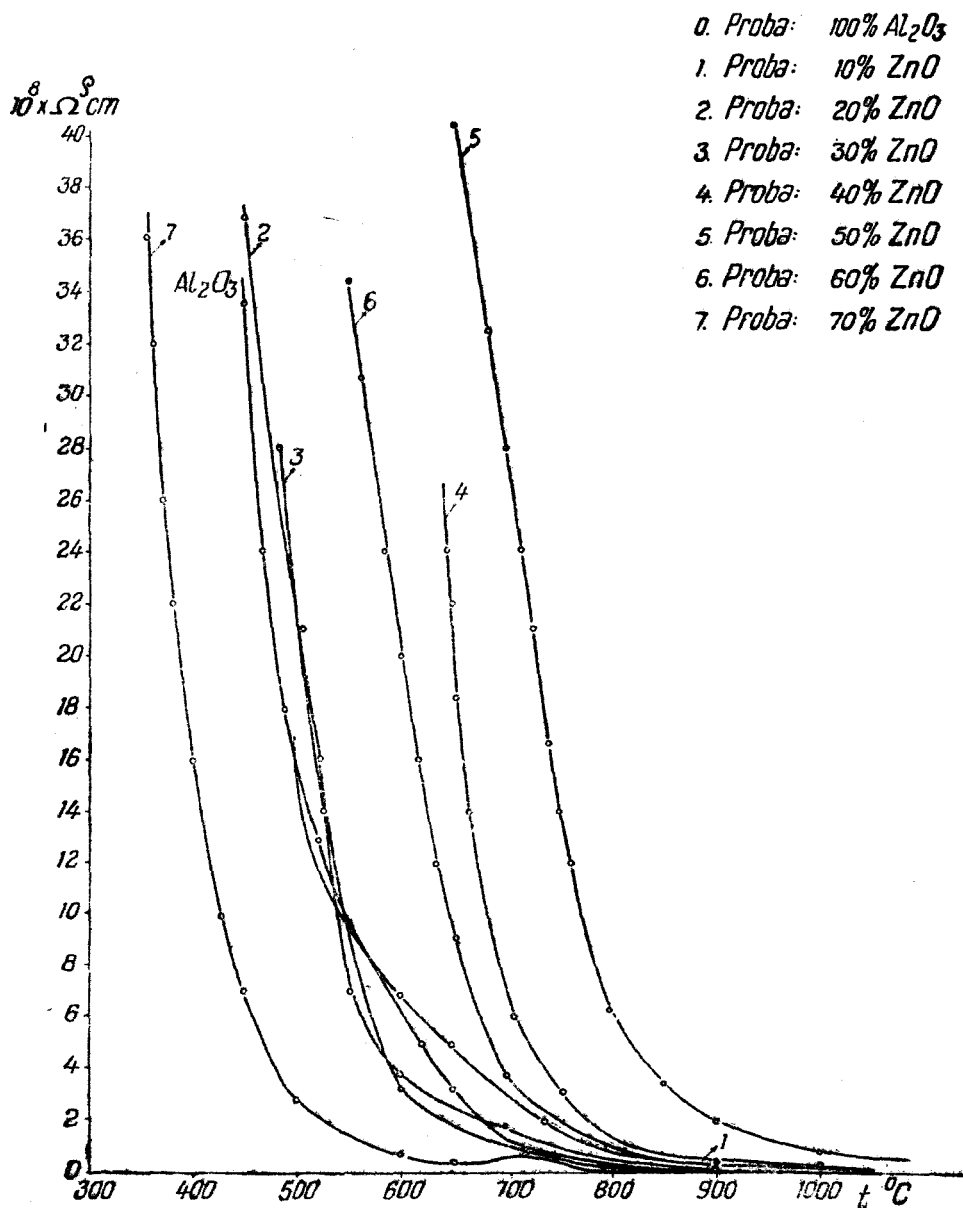


Fig. 6 a.

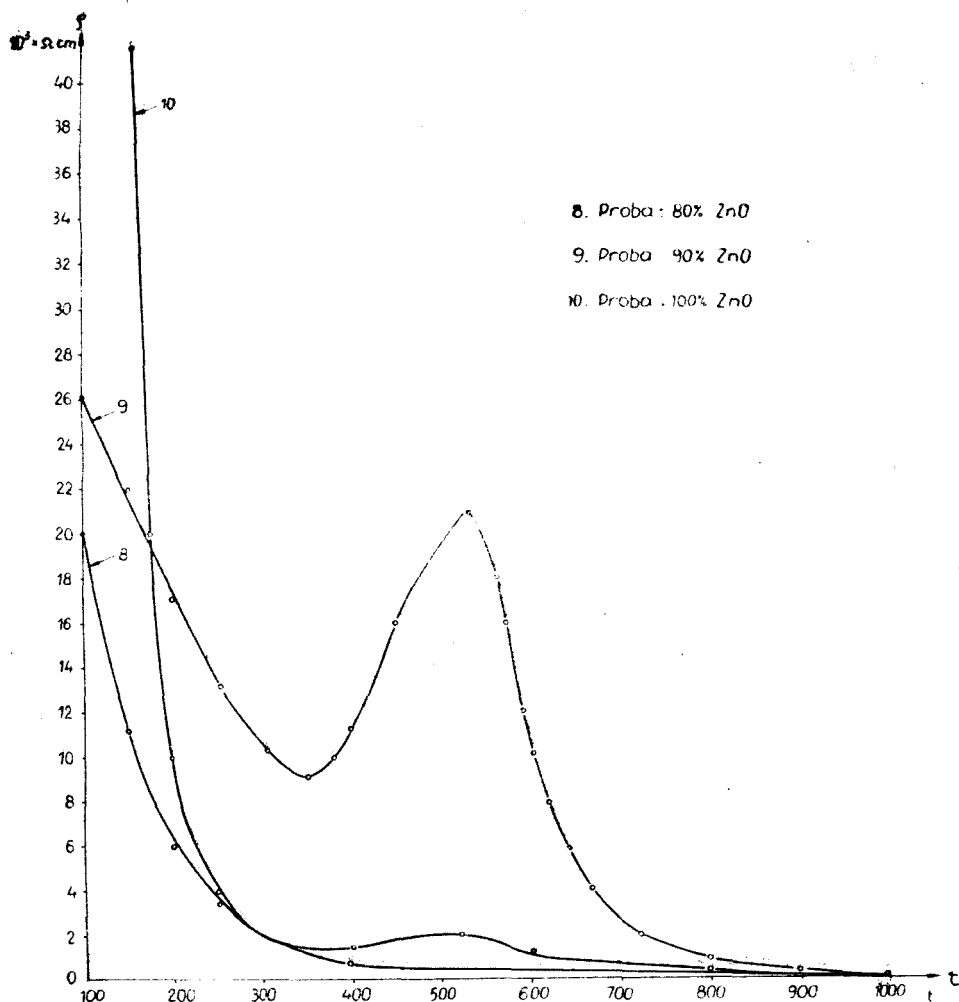


Fig. 6 b.

CONCLUZII

Din studiul experimental al proprietăților semiconductoare la sistemul $\text{ZnO}-\text{Al}_2\text{O}_3$ s-au obținut următoarele rezultate noi:

1. Rezistivitatea sistemului studiat variază între limite largi cu concentrația componentelor (de la 10^2 la $10^{11} \Omega \cdot \text{cm}$).
2. Sistemul binar studiat este adecvat preparării de materiale semiconductoare cu diferite rezistivități.

3. Probele cu ~~conținut de la 70 la 90%~~ ZnO prezintă un regim de unde rezistivitatea crește cu temperatura semiconductorului, manifestându-se în acest domeniu, ca un conductor metalic.

4. În cadrul sistemului binar studiat s-a obținut un aluminat de zinc (ZnAl_2O_4), care este și el semiconductor și prin proprietățile sale este mai potrivit pentru realizarea termistorilor de temperatură înaltă decât oxidul de aluminiu [13]].

BIBLIOGRAFIE

1. H. H. Bamburg u. C. Wagner, „Z. f. Phys. Chim.”, (22), 199, 1933.
2. O. Fritsch, „Ann. Phys.”, (22) 375, 1935.
3. W. Wartman „Z. f. Phys.”, (102), 709, 1936.
4. P. H. Miller, „Phys. Rev.”, (60), 890, 1941.
5. A. Lempick, „Proc. Phys. Soc.”, (66), 1281, 1950.
6. T. Stokmann, „Z. f. Phys.”, (127), 563, 1950.
7. J. Joung, „J. Appl. Phys.”, (23), 129, 1952.
8. E. Pell, „Phys. Rev.”, (87), 457, 1952.
9. K. Hauffe, L. Trockler, „Z. f. Phys.”, (136), 166, 1953.
10. A. И. Губанов, „Ж. Т. Ф.” (23), 675, 1953.
11. C. M. Brentano, C. Goldberg, „Phys. Rev.”, (94), 56, 1954.
12. C. L. Cutting, „J. Sci. Instr.” (32), 425, 1955.
13. П. Т. Орешкин, „Ж. Т. Ф.” (25), 2447, 1955.
14. J. Jamoguchi, „Technol. Repts. Osaka Univ.”, (5), 55, 1955.
15. A. Bielski, J. Deren, J. Haber, „Bull. Ac. Polon. (sci. cl. III.)” (3), 223, 1955.
16. M. R. F. Freymann, „J. phys. et radium” (17), 806, 1956.
17. A. Bielski, J. Deren, J. Haber, S. Morvec, „Bull. Ac. Polon. (Sci. cl. III)” (4) 533, 1956.
18. J. Deren, J. Heber, S. Morvec, „Bull. Ac. Polon. (Sci. cl. III)” (4), 107, 1956.
19. X. C. Валеев, М. Д. Машковец, „Ж. Т. Ф.” (27), 1649, 1957.
20. Koncz-Déri M., Millner J., Waldhauser I., „Acta chim. Acad. Hung.” (16), 71, 1958.
21. М. С. Косман, И. А. Тессе, „Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. Герцена”, 148, 85, 1958.
22. А. И. Андриевский, И. Д. Третьяк, „Научн. зап. Львовск. политех. ин-та”, 57, 42, 1958.
23. A. R. Huston „J. Phys. a. Chem. Solids.”, (8), 467, 1959.
24. J. Deren, „Z. f. Phys.”, (155), 453, 1959.
25. C. A. Med., „J. Appl. Phys.”, (32), 646, 1961.

СВОЙСТВА ПОЛУПРОВОДНИКА СИСТЕМЫ $\text{ZnO} - \text{Al}_2\text{O}_3$

(Резюме)

Авторы изучают свойства полупроводника смеси $\text{ZnO} - \text{Al}_2\text{O}_3$ с концентрациями, изменяющимися через каждые 10% от 0% Al_2O_3 , до 100% ZnO 100% Al_2O_3 — 0% ZnO в синтезированных из порошков образцах. Из изменений проводимости с температурой определяются энергии активации и прослеживается их изменение в зависимости от концентрации смесей. Получается аллюминат цинка, годный для изготовления термпаров с высокой температурой. Изменения выполнялись при температуре, изменявшейся от 300° до 1000°C.

LES PROPRIÉTÉS SEMICONDUCTRICES DU SYSTÈME $\text{ZnO}-\text{Al}_2\text{O}_3$

(R é s u m é)

Les auteurs étudient les propriétés semiconductrices du mélange $\text{ZnO} - \text{Al}_2\text{O}_3$ en concentrations variant de 10 en 10% depuis 0% Al_2O_3 100% ZnO jusqu'à 100% Al_2O_3 0% ZnO , pour des échantillons syntérisés de poudres. D'après la variation de la conductivité suivant la température on détermine les énergies d'activation et l'on observe leur variation en fonction de la concentration des mélanges. On obtient un aluminat de zinc adéquat pour la confection des thermistors de haute température. Les mesures ont été effectuées à des températures variant de 300 à 1000°C.

SEPARAREA ÎNTR-O COLOANĂ CU ANTRENARE CU VAPORI ÎN FUNCTIE DE CONCENTRAȚIA MEDIE A AMESTECULUI

de

V. MERCEA, E. FODOR, V. GRECU

Tratarea teoretică a funcționării coloanelor de separare prin antrenare cu vapori este o problemă complexă. Ea a fost rezolvată pentru coloana dreptunghiulară, introducând o serie de aproximări și simplificări, de către autorii [1, 2, 3] și generalizată apoi pentru coloana cu simetrie cilindrică. Rezultatele obținute permit calcularea separării în funcție de dimensiunile geometrice și de condițiile de lucru din coloană. Verificările experimentale au arătat că există o concordanță calitativă între rezultatele teoretice și cele experimentale. Alura dependenței separării de diferenți parametrii indicată de teorie este aceeași cu cea obținută prin experiență.

Lucrarea își propune un studiu cantitativ al dependenței separării de concentrația medie. Interpretarea rezultatelor teoretice și experimentale în regim cu extracție este dificilă; de aceea pentru verificarea cantitativă a datelor teoretice s-a ales cazul mai simplu al extracției nule.

Fie o coloană de separare dreptunghiulară, a cărei schemă de funcționare este dată de fig. 1.

Prin peretele poros OO' menținut la temperatura T_1 , difuzează în spațiul de separare de grosime x_p , lățime L și înălțime Z , un debit constant de vapori N_0 moli/cm² sec.; ei condensează pe peretele PP' răcit la temperatura T_2 . Datorită difuziei vaporilor în amestecul gazos, în interior are loc o separare a componentelor. La peretele OO' se condensează componenta mai difuzibilă — cea mai ușoară — iar la peretele PP' cea mai grea.

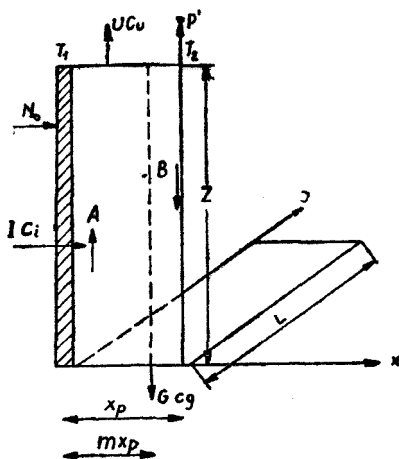


Fig. 1. Schema teoretică de funcționare a unei coloane de separare prin antrenare cu vapori.

Pe peretele PP' curge sub acțiunea propriei sale greutate un film de lichid care antrenează gazul din interior și produce o circulație în contracurent. În vecinătatea peretelui OO' se formează un curent ascendent de debit A , iar în vecinătatea peretelui PP' există un debit descendent B . Datorită circulației, separarea inițială este mărită și se produce un gradient de concentrație pe verticală. În partea superioară a coloanei este concentrată componenta ușoară, iar în partea inferioară cea grea. Sus se extrage debitul $\bar{U}$ de concentrație c_u iar jos, debitul G de concentrație c_g . Alimentarea se face în secțiunea de mijloc cu un debit I de concentrație c_i . Folosind pe de o parte ecuațiile de conservare a cantității de amestec și a cantității de componentă și pe de altă parte expresiile pentru debitele A și B calculate în funcție de dimensiunile geometrice și de condițiile de lucru, din ecuația fenomenului de separare pe orizontală se poate stabili ecuația diferențială a separării pe verticală, [1] care este:

$$U \cdot c_u = U \cdot c - (K + K_d) \frac{\partial c}{\partial z} + Hc(1 - c) \quad (1)$$

unde H , K și K_d sînt coeficienți ce pot fi calculați în funcție de condițiile de lucru și dimensiunile geometrice, și anume:

$$H = \frac{1}{2} (RTN_0 B h x_p) \quad (2)$$

$$K = \frac{RTB^2}{2PL} \left[\frac{1}{D_{12}} + \frac{\bar{P}_0}{P - P_0} d \right] x_p \quad (3)$$

$$K_d = \frac{LPx_p}{RT} \frac{1}{\frac{1}{D_{12}} + \bar{P}_0 / \frac{1}{P - P_0} - \frac{1}{D_{01}}} \quad (4)$$

În aceste expresii au fost folosite notațiile:

$$B = \frac{(\bar{P} - P_0)_B}{6 RT} \left[\frac{\bar{P} \Delta T}{12 \eta T} x_p^3 (m - 1)^2 (m + 1) + V(m + 2) \right] L(1 - m)x_p \quad (5)$$

$$\bar{P} - P_0 = (P - P_{0p}) \lambda^{-1} \quad (6)$$

$$(\bar{P} - P_0)_B = (P - P_{0p}) \lambda^{m-1} \quad (7)$$

$$\lambda = \exp \left(\frac{RTN_0 b}{2P} x_p \right) \quad (8)$$

$$h = \frac{1}{D_{02}} - \frac{1}{D_{01}} \quad (9)$$

$$d = \frac{1}{D_{01}} + h\bar{c} \quad (10)$$

$$b = \frac{1}{D_{02}} - h\bar{c} \quad (11)$$

unde :

D_{01} și D_{02} sînt coeficienții de difuzie a celor două componente în vapori ($D_{01} > D_{02}$)

D_{12} coeficientul de difuzie a unei componente în cealaltă

$T = \frac{T_1 + T_2}{2}$ temperatura medie

$\bar{c} = \frac{c_u + c_i}{2}$ concentrația medie în secțiunea de îmbogățire a coloanei

P — presiunea totală

P_0 — presiunea parțială a vaporilor

P_{0p} — presiunea parțială a vaporilor corespunzătoare temperaturii T_2

η — viscozitatea amestecului gazos

ρ — densitatea medie

V — viteza suprafeței filmului de lichid

m — fracțiunea din spațiul de separare ocupată de curentul ascendent

Aceste rezultate teoretice obținute pentru coloana dreptunghiulară, pot fi transpuse pentru cazul unei coloane cilindrice. Să considerăm o coloană formată din 2 cilindrii concentrice de raze R_1 și R_2 . În ipoteza că $R_2 - R_1 \ll R_1$ sau R_2 , ecuația separării pe verticală rămîne neschimbată, înlocuindu-se doar L (lățimea coloanei) prin $2\pi R_m$, unde R_m este raza medie egală cu $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$.

Modul de funcționare cel mai simplu de interpretat atît teoretic cît și experimental este cel fără extracție. Pentru $U = 0$ expresia (1) devine

$$\frac{dc}{dz} = \frac{H}{K + Kd} c(1 - c) \quad (12)$$

În regim staționar pentru $z = 0$ și $z = Z$ corespund concentrațiile c_i și c_u . Prin integrarea ecuației (12) se obține:

$$\frac{c_u}{1 - c_u} : \frac{c_i}{1 - c_i} = \exp\left(\frac{H}{K + Kd} Z\right) \quad (13)$$

Se definește factorul de separare total în coloană prin:

$$S = \frac{c_u}{1 - c_u} : \frac{c_i}{1 - c_i} \quad (14)$$

Atunci:

$$\ln S = \frac{H}{K + Kd} Z \quad (15)$$

Neglijind pe $K_d \ll K$ și înlocuind expresiile lui H și K din (2) și (3) avem:

$$\ln S = \frac{h N_0 L}{\left[\frac{1}{D_{12}} + (\bar{P}_0 / \bar{P} - \bar{P}) \cdot d \right] B} \quad (16)$$

Din (5) înlocuind expresia B , în care se neglijează termenul datorit diferenței de temperatură, se obține:

$$\ln S = \frac{6RT h N_0}{(\bar{P} - \bar{P}_0) B V (m + 2) (1 - m) x_p \left[\frac{1}{D_{12}} + (\bar{P}_0 / \bar{P} - \bar{P}_0) d \right]} \quad (17)$$

Această expresie se transformă pentru a pune în evidență partea dependentă de concentrația medie $\bar{c}$. Înlocuind expresiile lui $(\bar{P} - \bar{P}_0)$, $(\bar{P} - \bar{P}_0)_B$, b , d , λ și considerind m constant, aproximare justificată de mica modificare a lui m la mari schimbări ale condițiilor de lucru, se obține:

$$\ln S = \frac{6RT h N_0 \exp \left(\frac{1 - m}{2} \cdot \frac{RT N_0 x_p}{D_{01} P} \right)}{(1 - m)(m + 2) \cdot x_p (P - P_{0p})} \cdot \frac{e^{-\beta(1 - m)\bar{c}}}{\left(\frac{1}{D_{12}} - \frac{1}{D_{01}} \right) + \frac{E}{D_{01}} e^{-\beta\bar{c}} - h\bar{c} + E h \bar{c} e^{-\beta\bar{c}}} \quad (18)$$

unde au fost folosite notațiile:

$$\beta = \frac{RT N_0 x_p}{2P} h$$

$$E = \frac{P}{P - P_{0p}} \cdot \exp \left[\frac{RT N_0 x_p}{2D_{02} P} \right] \quad (19)$$

Cu ajutorul ecuației (18) s-a calculat numeric separarea pentru diferite concentrații, la amestecul $H_2 - CH_4$, într-o coloană cilindrică, agentul separator fiind vaporii de apă. Pentru acest amestec avem: $D_{01} = 1,11$; $D_{02} = 0,304$; $D_{12} = 0,807$.

Coloana are următoarele date constructive și de funcționare:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,7 \text{ cm} & R_2 &= 1,3 \text{ cm} & x_p &= R_2 - R_1 = 0,6 \text{ cm} \\ T_1 &= 105^\circ\text{C} & T_2 &= 15^\circ\text{C} \\ P &= 1 \text{ atm.} & P_{0p} &= 0,017 \text{ atm.} \\ N_0 &= 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^2 \cdot \text{s.} & V &= 60 \text{ cm/s} & m &= 0,7. \end{aligned}$$

Pentru aceste date se obține următoarea dependență a separării de concentrație medie $\bar{c}$. (Tabelul 1 și curba din figura 2).

Conform teoriei, separarea prezintă un minim la concentrații medii.

Dependența separării de concentrația inițială a mai fost studiată parțial în lucrarea [4] obținându-se pentru concentrații medii o separare

maximă. Aceste rezultate nu pot fi comparate cu indicațiile teoretice de mai sus, deoarece măsurătorile au fost făcute în regim cu extracție, și sînt insuficiente ca număr. În continuare se încearcă confruntarea datelor teoretice cu experiența.

Tabelul 1

$\bar{c}$	S	$1_n S$
0,1	63,5	4,152
0,2	50,3	3,917
0,3	43,5	3,770
0,4	40,0	3,684
0,5	39,0	3,666
0,6	42,3	3,739
0,7	43,6	3,776
0,8	49,5	3,909
0,9	61,0	4,110

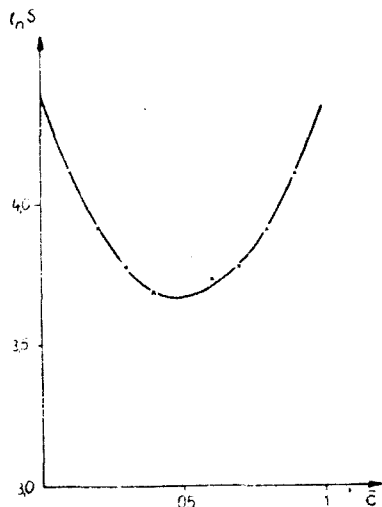


Fig. 2. Variația teoretică a separării în funcție de concentrația medie pentru amestecul $\text{CH}_4 - \text{H}_2$.

APARATURA

Măsurătorile au fost făcute pe o coloană proiectată și executată la I.F.A., Cluj. Fiind destinată verificării experimentale a rezultatelor teoretice construcția ei reproduce cât mai exact schema teoretică de funcționare. Schița de ansamblu este redată în fig. 3.

Coloana este formată dintr-un tub de alamă K_2 ($\varnothing 2,6$ cm) în interiorul căruia este așezat concentric un tub de sită metalică K_1 ($\varnothing 1,4$ cm), delimitînd între ele spațiul de separare. Filmul de lichid se formează în distribuitorul D așezat în partea superioară a coloanei, curge pe peretele cilindrului K_2 și se adună în partea inferioară, de unde prin sifonul S_1 iese în exterior fără a antrena gazul din coloană. Alimentarea distribuitorului se face printr-un sistem de preaplin asigurîndu-se debitul de film constant. Cilindrul exterior este răcit la temperatura T_2 cu o circulație continuă de apă în cămașa ce-l înconjoară C_2 .

Vaporii sînt produși în cazanul C , încălzit electric. Prin tubul Q ajung în interiorul cilindrului K_1 . Pentru a asigura distribuția uniformă a vaporilor în tot lungul coloanei, pe tubul K_1 sînt înfășurate trei straturi de pînză fină; aceasta reprezintă o rezistență suficient de mare la trecerea vaporilor. Vaporii la temperatura T_1 puțin supraîncălziți, difuzează prin peretele poros al cilindrului K_1 , prin spațiul de separare și condensează pe peretele

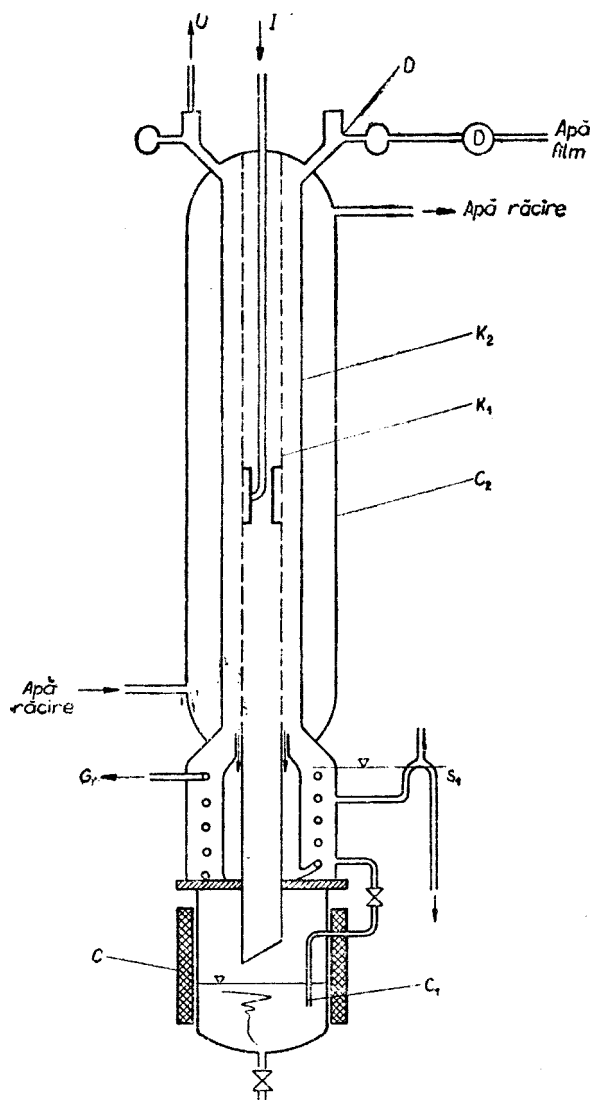


Fig. 3. Coloana de separare.

rece al tubului K_2 . Condensul se strânge împreună cu apa de film în partea inferioară R . Pentru a menține nivelul lichidului din cazan constant, prin conducta C_1 , este reciclată în cazan exact cantitatea evaporată.

Alimentarea cu amestecul gazos se face în partea de mijloc, iar la capete se extrag produsele îmbogățite în componenta ușoară și grea. Debitul introdus și cele extrase sînt reglate cu robinete cu ac și sînt urmărite la debitmetre de gaz, etalonate în prealabil pentru diferite compoziții ale amestecului de studiat.

Lungimea coloanei este de 45 cm; 20 cm secțiunea de îmbogățire, 5 cm zona de alimentare și 20 cm secțiunea de diluare.

S-a lucrat în condiții de circulație și alimentare constante și anume:

$$V = 60 \text{ cm/sec}$$

$$N_0 = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ moli/cm}^2 \cdot \text{s.}$$

$$I = 3,4 \text{ l/oră}$$

$$D = 0,81 \text{ l/min.} \quad D = \text{debitul de film.}$$

Gazele folosite pentru amestec au fost obținute astfel:

Hidrogenul, prin electroliză fiind purificat catalitic de O_2 și uscat pe silicagel. Metanul direct de la rețeaua orașului.

Schema de circulație a gazelor este redată în fig. 4.

Analiza probelor a fost făcută cu ajutorul unei coloane de cromatografie, ca detector fiind folosită o celulă de conductibilitate termică. Probele au fost luate sau cu un by-pass sau cu o seringă de gaz [5, 6].

Din cauză că apa de film și cea reciclată în cazan circulă în circuit deschis, vaporii aduc încontinuu în interiorul coloanei cantitatea de aer dizolvată în ei. Aceste impurități fiind mai grele decît componentele amestecului H_2-CH_4 se concentrează în partea inferioară a coloanei și reprezintă în medie 8% din componenta grea extrasă. Pericolul impurificării este cu atît mai mare cu cît volumul ocupat de gaz este mic, aproximativ 180 cm^3 .

Din această cauză nu s-au făcut măsurători cu coloana închisă la ambele capete. S-a lucrat cu coloana închisă la partea superioară și deschisă complet la cea inferioară, realizîndu-se jos un rezervor infinit de concentrație c_i . În aceste condiții secțiunea de diluare nu mai separă, dar asigură puritatea gazului în secțiunea de îmbogățire.

Măsurătorile pentru $U = 0$ nu au putut fi efectuate din cauza volumului mare al seringii care perturbă separarea. De aceea s-au făcut măsurători pentru diferiți U , iar din datele obținute s-a extrapolat rezultatul pentru

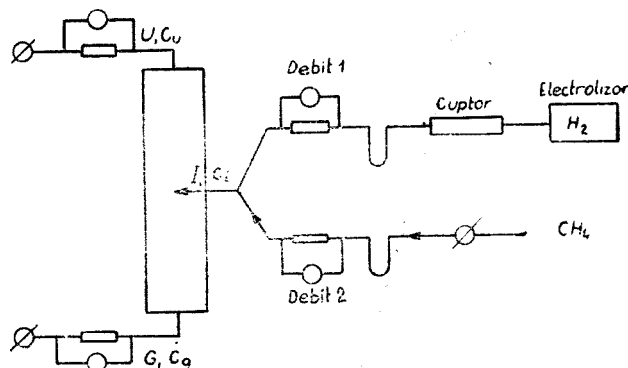


Fig. 4. Schema de circulație a fluidelor.

$U = 0$. S-a urmărit variația separării cu extracția pentru diferite concentrații inițiale și medii. Rezultatele experimentale sînt date în tabelul 2, iar reprezentările grafice corespunzătoare în fig. 5.

Tabelul 2

c_i	U	S	c_i	U	S
0,19	2,75	1,078	0,45	2,2	2,05
	1,6	2,57		1,6	5,35
	0,78	7,29		1,3	9,9
	0,42	17,92		1,1	13,7
	0	31,3		0,95	17
0,25	2,83	1,306	0,62	0	59,8
	1,88	1,95		1,99	11,65
	0,9	6,378		1,04	13
	0,4	22,85		0,45	19
	0,13	50,6		0,15	23,8
0,35	2,4	1,82	0,7	2,96	1,77
	2,2	3,49		0,88	12,88
	1,0	31,95		0,42	16,05
	0,3	95,8			

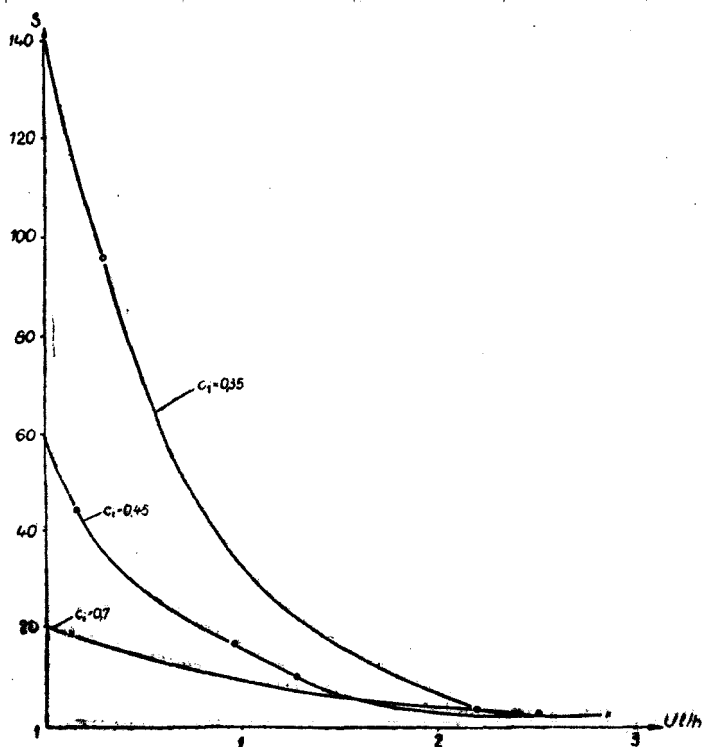


Fig. 5. Variația separării în funcție de debitul de extracție la diferite concentrații de intrare.

Se pot trage următoarele concluzii:

1. Separarea pentru $U = 0$ reprezintă separarea maximă ce poate fi obținută pentru concentrația respectivă. Acest rezultat este în concordanță cu teoria.

2. Separarea are valori maxime, pentru concentrații medii $c_i = 0,35$ și $\bar{c} = 0,66$ ceea ce contrazice rezultatele teoretice care cer un minim în acest domeniu. Acest fapt iese mai bine în evidență reprezentînd grafic $\ln S$ în funcție de c_i sau $\bar{c}$ pentru următoarele valori ale lui U ($U = 0; 0,2; 0,6; 1/h$). Datele obținute sînt trecute în tabelul nr. 3, iar reprezentarea grafică în fig. 6 și fig. 6 a.

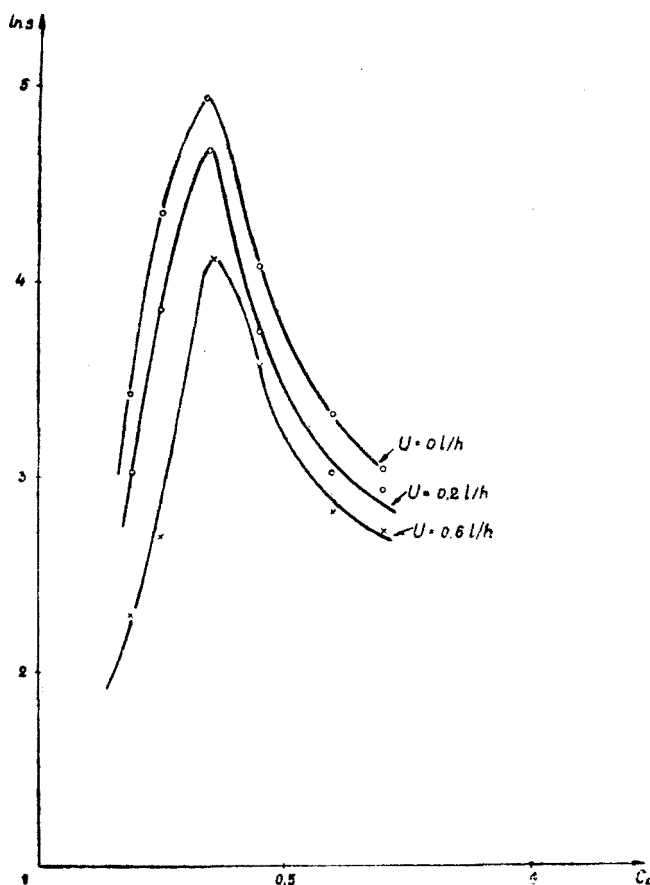
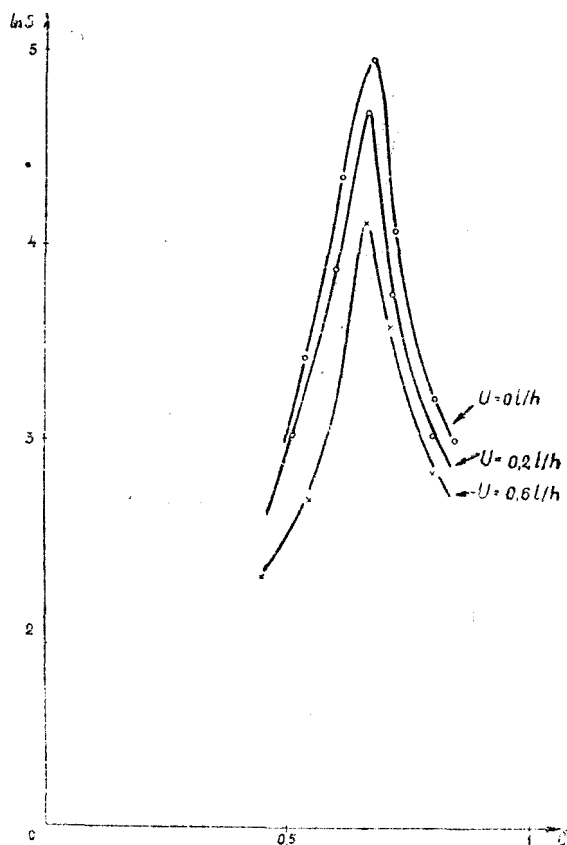


Fig. 6. Variația separării în funcție de concentrația inițială c_i pentru diferite extracții.

Tabelul 3

$U = 0$			$U = 0,2 \text{ l/h}$		$U = 0,6 \text{ l/h}$	
c_i	$\bar{c}$	$\ln S$	$\bar{c}$	$\ln S$	$\bar{c}$	$\ln S$
0,19	0,535	3,43	0,510	3,02	0,446	2,3
0,25	0,607	4,35	0,596	3,88	0,542	2,707
0,35	0,669	4,94	0,666	4,67	0,661	4,125
0,45	0,715	4,08	0,711	3,76	0,709	3,581
0,62	0,798	3,22	0,795	3,022	0,795	2,835
0,7	0,840	3,05	0,839	2,95	0,837	2,74

Fig. 6. a. Variația separării în funcție de concentrația medie $\bar{c}$ pentru diferite extracții.

Se constată că forma curbei pentru $U = 0$ nu diferă de aceea a curbelor corespunzătoare cu extracție. De asemenea, se observă că pe măsură ce extracția crește, separarea scade. Rezultă că datele experimentale nu concordă cu teoria, în locul minimumului teoretic apare un maxim de separare pentru concentrații medii.

Din instalația existentă și din datele obținute cu ea nu se pot trage concluzii asupra valorii separării pentru concentrații extreme.

BIBLIOGRAFIE

1. Cichelli M., Weatherford W., Bowman I. „Chem. Eng. Progr.” **47**, nr. 2, pag. 63 (1951)
2. Benedict M., Baas A. „Chem. Eng. Progr.” 1. **41** (1947), 2. **47** (1951).
3. Mercea V., Grecu E., Mercea I., Gherman O. Protocol (1953): Separarea gazelor din amestecuri binare prin difuzie și antrenare cu vapori (I).
4. Mercea V., Grecu E., Mercea I., Gherman O., Ursu I., Fodor E., Cristea L. Protocol (1953): Coloana de separare (III).
5. Szentgyörgyi P., Bologa M. „Studii și Cercetări” 1960, 1, 221.
6. Bucur R., Fodor Tr., Mercea I., „Studii și cercetări” 1960, 1, 221.
7. Heymann D., Kistemaker I.I. „Journ. Chem. Phys.” **24** 165. (1956)
8. Rozen A. M. *Teoria razdelenia izotopov v kolonah*. Moskva (1960).

ВЫДЕЛЕНИЕ В КОЛОННЕ С ВОВЛЕЧЕНИЕМ ПАРОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СРЕДНЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ СМЕСИ

(Резюме)

В настоящей работе экспериментально изучается зависимость выделения бинарной смеси газов $H_2 - CH_4$ в выделительной колонне с вовлечением паров при средней концентрации смеси. Сравнивая экспериментальные результаты с результатами, полученными вычислением, устанавливают между ними несоответствие, теоретическая зависимость выделения средней концентрации представляет минимум для средних концентраций в 0,6—0,7, а экспериментально получается для этих концентраций заметный максимум.

LA SÉPARATION DANS UNE COLONNE D'ENTRAÎNEMENT PAR VAPEURS EN FONCTION DE LA CONCENTRATION MOYENNE DU MÉLANGE

(Résumé)

Les auteurs étudient expérimentalement la dépendance entre la séparation d'un mélange binaire de gaz $H_2 - CH_4$, dans une colonne à séparation par entraînement de vapeurs, et d'autre part la concentration moyenne du mélange. En comparant les résultats expérimentaux aux résultats obtenus par le calcul, on constate une discordance entre eux, la dépendance théorique de la séparation de concentration moyenne présentant un minimum pour les concentrations moyennes entre 0,6—0,7, alors qu'on obtient expérimentalement un maximum prononcé pour ces concentrations.

ERRATA — ОПЕЧАТКИ

Pag. Стр. Page	Rîndul Строка Ligne	În loc de : Напечатано: Au lieu de :	Se va citi : Следует читать: Lisez :	Greșeala s-a făcut din vina :
4	4 сверху	логической разности	разности логики	redacției
	5 сверху	Круга	круга	„
	2 d'en haut	sa	son	„
14	2 de sus	Dp	Dp_1	tipografiei
18	11 de jos	$R\phi\phi$	$R\phi\phi$	redacției
	8 de jos	A	PA	
			P_n^2	„
	7 de jos	A^3	PA^2	
			P_n^3	„
		A^{n-1}	PA^{n-1}	
			P_n^n	„
30	6 de sus	I_{mm}	I_{mm}	tipografiei
32	12 de sus	ușoară	ușurată	„
46	form. (1),(1'), (2),(5),(7)	1	l	redacției
58	22 de sus	1926	1962	tipografiei
89	4 de sus	p n u	pentru	„
98	17 сверху	$G($	$G(M,P)$	„
117	form. (1)	$\overline{v}$	$\overline{v}$	redacției
138	form. (2)	2	$2P$	autorilor
140	form. (16),(17)	$(\overline{P}_o \overline{P-P})$	$(\overline{P}_o P-P_o)$	„
	form. (18)	x_p	$V.x_p$	„
143	13 de sus	$N_o = 333.10^{-5}$	$N_o = 3,33.10^{-5}$	tipografiei



