

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2026
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. (2 puncte)

- (a) Daţi definiţia grupului.
- (b) Daţi un exemplu de parte stabilă T a lui $(\mathbb{Z}, +)$ care conţine elementul neutru din $(\mathbb{Z}, +)$ şi nu este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$. Justificaţi răspunsul dat.

2. (2 puncte) Pentru $n \in \mathbb{Z}$ se notează $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- (a) Găsiţi un $d \in \mathbb{N}$ astfel încât $d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$.
- (b) Câte numere naturale d există astfel încât $d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$? Justificaţi răspunsul dat.

3. (5 puncte) Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o transformare $\mathbb{R}$ -liniară cu proprietatea că

$$f(1, 0, 0) = (1, 2, 2), \quad f(0, 1, 0) = (-1, 1, 2), \quad f(0, 0, 1) = (-3, 0, 3).$$

- (a) Să se determine $f(x, y, z)$ când $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- (b) Să se scrie matricea lui f în baza canonică a lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.
- (c) Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru $\text{Ker } f$ şi $\text{Im } f$.
- (d) Este f $\mathbb{R}$ -izomorfism? Justificaţi răspunsul dat.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. (3 puncte) Fie

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right), \quad \forall n \geq 1.$$

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, dar seria $\sum_{n \geq 1} a_n$ este divergentă.

2. (3 puncte) Determinaţi polinomul lui Taylor de rang arbitrar n , ataşat funcţiei f şi punctului $a = 0$, pentru

$$f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sqrt{x+1}.$$

3. (3 puncte) Calculaţi

$$\int \frac{1}{2 \sin x + \cos x + 3} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(4 puncte)** Capetele ipotenuzei unui triunghi dreptunghic sunt $A(-2, 4)$ și $B(9, 2)$. Cateta AC este paralelă cu dreapta de ecuație $2x + y = 2$.
 - (a) Să se scrie ecuațiile dreptelor suport ale laturilor triunghiului ABC .
 - (b) Să se determine aria triunghiului ABC .
 - (c) Să se scrie ecuația bisectoarei unghiului $\widehat{BCA}$.
2. **(2 puncte)** Se dă hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
 - (a) Să se determine coordonatele focarelor F_1 și F_2 .
 - (b) Să se determine un punct M de pe hiperbolă pentru care aria triunghiului MF_1F_2 este egală cu 15.
3. **(3 puncte)** Se consideră punctele $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ și $D(0, 0, 1)$ față de un reper cartezian ortonormat.
 - (a) Să se arate că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
 - (b) Scrieți ecuațiile dreptelor AC și BD și arătați că ele sunt perpendiculare.
 - (c) Arătați că dreptele AC și BD sunt concurente.
 - (d) Găsiți punctul de intersecție al dreptelor AC și BD .
 - (e) Să se scrie ecuația planului determinat de punctele A, B, C .

NOTĂ.

Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2026
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

- Oficiu1p
1. (a) Definiţia grupului 1p
(b) Exemplu de submulţime T 1p
Un exemplu ar putea fi $\mathbb{N}$, care e parte stabilă în $(\mathbb{Z}, +)$, conţine pe 0, dar nu e subgrup ($2 \in \mathbb{N}$, dar $-2 \notin \mathbb{N}$).
2. Pentru $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ este mulţimea tuturor multiplilor lui n (i.e. $x \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid x$).
- (a) Se poate observa că orice multiplu al lui 60 este multiplu de 12, deci $60\mathbb{Z} \subseteq 12\mathbb{Z}$, prin urmare, dacă luăm $d = 60$, avem $d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$ 1p
(b) $x \in d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} \Leftrightarrow d \mid x$ şi $12 \mid x \Leftrightarrow [d, 12] \mid x \Leftrightarrow x \in [d, 12]\mathbb{Z}$ (cu $[d, 12]$ am notat c.m.m.m.c. al numerelor d şi 12) 0.5p
Astfel, $d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z} \Leftrightarrow [d, 12] = 60 \Leftrightarrow [d, 2^2 \cdot 3] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \Leftrightarrow d \in \{5, 2 \cdot 5, 2^2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5\}$, deci d poate lua 6 valori 0.5p
3. Se observă că $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ sunt chiar elementele bazei canonice $e = (e_1, e_2, e_3)$ a lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. Prin urmare avem:
- (a) $f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(1, 2, 2) + y(-1, 1, 2) + z(-3, 0, 3) = (x - y - 3z, 2x + y, 2x + 2y + 3z)$ 1p
(b) Matricea $[f]_e$ a lui f în baza canonică are ca şi coloane pe $f(e_1), f(e_2)$ şi $f(e_3)$, deci

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
 1p
(c) $\text{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \text{Im} f = \text{rang}[f]_e = 3$ şi $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ e o bază în ${}_{\mathbb{R}}\text{Im} f$.. 1p
 $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker} f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im} f = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \text{Ker} f = \{(0, 0, 0)\}$ şi are $\emptyset$ ca bază.....1p
(d) $\text{Ker} f = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow f$ injectivă, iar cum domeniul şi codomeniul au ambele dimensiunea 3, rezultă că f este izomorfism1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2026
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu (1p)

1. Folosim teorema lui Cesaro-Stolz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{n+1} = 0.$$

..... 1.5p

Avem

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \geq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty.$$

..... 1.5p

2. Polinomului lui Taylor de rang n ataşat unei funcţii f şi punctului $a = 0$ este funcţia

$$T_{n;0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

având expresia

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funcţia f este indefinit derivabilă pe $(-1, \infty)$ fiind o compunere de funcţii elementare. 0.5p

Folosim formula lui Leibniz pentru determinarea derivatei de ordinul n a produsului de funcţii:

$$(gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)} h^{(n-k)}$$

Definim funcţiile auxiliare $g, h : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = x, \quad \forall x \in (-1, \infty)$$

$$h(x) = (x+1)^{1/2} \quad \forall x \in (-1, \infty)$$

Constatăm că

$$g(x) = x, \quad g^{(1)}(x) = 1, \quad g^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

Astfel:

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 g(x) h^{(n)}(x) + C_n^1 g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) = x \cdot h^{(n)}(x) + n \cdot h^{(n-1)}(x)$$

..... 1p

Pentru funcţia h

$$h(x) = (x+1)^{1/2} \quad h^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$$

$$h^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (x+1)^{-3/2} = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$$

$$h^{(3)}(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) (x+1)^{-5/2} = (-1)^{3-1} \frac{3}{2^3} (x+1)^{-5/2}$$

Se demonstrează prin inducție forma generală a derivatei de ordinul n pentru $n > 2$:

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} (x+1)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

Introducem expresiile derivatelor generale în ecuația simplificată obținută prin regula lui Leibniz, $\forall n \geq 3$:

$$f^{(n)}(x) = x \left[(-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} (x+1)^{-\frac{2n-1}{2}} \right] + n \left[(-1)^{n-2} \frac{(2n-5)!!}{2^{n-1}} (x+1)^{-\frac{2n-3}{2}} \right]$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot h^{(1)}(x) + 1 \cdot h(x) = x(2x+1)^{-1/2} + (2x+1)^{1/2}, \\ f''(x) &= x \cdot h^{(2)}(x) + 2 \cdot h^{(1)}(x) = x \cdot (-2x+1)^{-3/2} + 2 \cdot (2x+1)^{-1/2} = -x(2x+1)^{-3/2} + 2(2x+1)^{-1/2}, \end{aligned}$$

.....1p

Pentru a construi polinomul Taylor centrat în $a = 0$, evaluăm derivata în punctul $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1, \\ f''(0) &= 2, \\ f^{(n)}(0) &= n(-1)^{n-2} (2n-5)!! \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

Prin urmare, pentru un grad arbitrar $n \geq 1$,

$$T_n(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{128}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-2} (2n-5)!!}{2^{n-1} (n-1)!} x^n$$

Sau

$$T_n(x) = x + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-2} (2k-5)!!}{2^{k-1} (k-1)!} x^k$$

.....0.5p

3. Integrala

$$I = \int \frac{1}{2 \sin x + \cos x + 3} dx, \quad \forall x > 1$$

Pentru a transforma integrala trigonometrică într-o integrală rațională, folosim substituția:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Avem

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

.....1p

Substituind obținem:

$$I = \int \frac{1}{2 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$I = \int \frac{1}{\frac{4t+(1-t^2)+3(1+t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{4t+1-t^2+3+3t^2} dt = \int \frac{1}{t^2+2t+2} dt$$

.....1.5p

Pentru a putea integra, descompunem numitorul formând un pătrat perfect:

$$t^2 + 2t + 2 = (t^2 + 2t + 1) + 1 = (t + 1)^2 + 1$$

Integrala devine:

$$I = \int \frac{1}{(t + 1)^2 + 1} dt = \arctan(t + 1) + C = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + C$$

..... 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2026
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu1p

1. a) $AB : \frac{x+2}{9+2} = \frac{y-4}{2-4} \Leftrightarrow -2(x+2) = 11(y-4) \Leftrightarrow AB : 2x + 11y - 40 = 0$ 0.5p

Cateta AC este paralelă cu $d : 2x + y = 2 \Rightarrow AC : 2x + y = c$. $A(-2, 4) \in AC \Rightarrow c = 0$, deci

$$AC : 2x + y = 0.$$

..... 0.5p

Cateta BC este perpendiculară pe cateta $AC \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$. $m_{AC} = -2 \Rightarrow m_{BC} = \frac{1}{2}$. Dreapta BC şi trece prin $B(9, 2)$. Astfel

$$BC : y - 2 = \frac{1}{2}(x - 9) \Leftrightarrow BC : x - 2y - 5 = 0.$$

.....0.5p.

b) Coordonatele punctului C se obţin intersectând catetele. Astfel $C(1, -2)$ 0.5p

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{(-2-1)^2 + (4+2)^2} \cdot \sqrt{(9-1)^2 + (2+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{80}}{2} = \frac{3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 30.$$

.....0.5 p

Alternativ,

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = 30.$$

c) Măsura unghiului $\widehat{BCA}$ este 90° , deci bisectoarea unghiului face 45° cu cateta AC .

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{m_{bis} - m_{AC}}{1 + m_{bis} \cdot m_{AC}} \right| = \left| \frac{m_{bis} + 2}{1 - 2 \cdot m_{bis}} \right| \Leftrightarrow m_{bis} + 2 = \pm(1 - 2m_{bis}).$$

..... 1p

Se obţin valorile $m_{bis} \in \{3, -\frac{1}{3}\}$. Dar bisectoarea este în interiorul unghiului $\widehat{BCA}$, de aceea panta ei este $m_{bis} = 3$ şi ecuaţia ei: $y + 2 = 3(x - 1) \Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$.

..... 0.5p

Alternativ, ecuaţia bisectoarei se poate scrie cu ajutorul formulei bisectoarelor interioare şi exterioare (folosind că punctele bisectoarei sunt echidistante faţă de laturile AC, BC):

$$bis_{1,2} : \frac{|2x + y|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{1 + 4}} \Leftrightarrow 2x + y = \pm(x - 2y - 5).$$

De aici se obţin dreptele $bis_1 : x + 3y + 5 = 0$ şi $bis_2 : 3x - y - 5 = 0$. Deoarece căutăm bisectoarea interioară, se alege ecuaţia $3x - y - 5 = 0$. Justificarea se poate face geometric (grafic), analitic (prin panta dreptei) sau prin verificarea poziţiei relative a punctelor A şi B faţă de dreaptă (coordoanatele lor introduse în ecuaţia bisectoarei trebuie să dea rezultate cu semne opuse).

2. a) Din ecuația canonică a hiperbolei avem

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5.$$

Astfel focarele sunt

$$F_1(-5, 0), \quad F_2(5, 0).$$

..... 1p

b) Fie punctul M cu coordonatele (x_0, y_0) . Aria triunghiului MF_1F_2 este $\frac{|F_1F_2| \cdot h_M}{2}$, unde am notat cu h_M lungimea înălțimii duse din punctul M pe latura F_1F_2 . Dar $h_M = \text{dist}(M, F_1F_2) = \text{dist}(M, Ox) = |y_0|$.

Astfel

$$\mathcal{A}_{MF_1F_2} = \frac{|F_1F_2| \cdot |y_0|}{2} = 15 \Leftrightarrow \frac{10 \cdot |y_0|}{2} = 15 \Leftrightarrow |y_0| = 3.$$

..... 0.5p

Dar punctul $M(x_0, y_0)$ aparține hiperbolei, deci

$$\frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{16} - 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 32 \Leftrightarrow |x_0| = 4\sqrt{2}.$$

Astfel putem alege oricare punct dintre punctele

$$M_1(-4\sqrt{2}, -3), M_2(-4\sqrt{2}, 3), M_3(4\sqrt{2}, -3), M_4(4\sqrt{2}, 3).$$

..... 0.5p

3. a) $\overrightarrow{AB}(1, 1, 0) = \overrightarrow{DC}(1, 1, 0)$ 0.5p

b) Ecuațiile dreptelor $AC: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ și $BD: x=0, \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ 0.5p

Vectori directori $\overrightarrow{AC}(2, 1, 1)$ și $\overrightarrow{BD}(0, -1, 1)$ 0.25p

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ deducem că $AC \perp BD$ 0.25p

c) Întrucât $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ deducem că $ABCD$ este paralelogram. Dreptele AC și BD sunt dreptele suport ale diagonalelor acestui paralelogram și deci ele sunt concurente. 0.5p

d) Punctul de intersecție al dreptelor AC și BD este mijlocul comun al diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$ al paralelogramului $ABCD$, iar coordonatele sale sunt

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 = \frac{0 + 0}{2} = \frac{x_B + x_D}{2}$$

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}.$$

..... 0.5p

e) Ecuația planului (ABC) este

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 0-(-1) & 1-0 & 0-0 \\ 1-(-1) & 1-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 1 = 0.$$

..... 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.