

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2026 szeptember
Matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(2 pont)**

- (a) Adjuk meg a csoport definícióját.
- (b) Adjunk példát a $(\mathbb{Z}, +)$ olyan T zárt részhalmazára, amely tartalmazza a $(\mathbb{Z}, +)$ semleges elemét, de nem részcsoportja a $(\mathbb{Z}, +)$ -nak. Indokoljuk meg a választ.

2. **(2 pont)** Legyen $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

- (a) Találjunk egy $d \in \mathbb{N}$ számot úgy, hogy $d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$ teljesüljön.
- (b) Hány olyan d természetes szám létezik, amelyre $d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$? Indokoljuk meg a választ.

3. **(5 pont)** Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy $\mathbb{R}$ -lineáris leképezés, amelyre

$$f(1, 0, 0) = (1, 2, 2), \quad f(0, 1, 0) = (-1, 1, 2), \quad f(0, 0, 1) = (-3, 0, 3).$$

- (a) Határozzuk meg az $f(x, y, z)$ értékét, ha $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- (b) Írjuk fel az f mátrixát az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisában.
- (c) Határozzuk meg a $\text{Ker } f$ és $\text{Im } f$ egy-egy bázisát és dimenzióját.
- (d) Izomorfizmus-e az f az $\mathbb{R}$ felett? Indokoljuk meg a választ.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tekintük a következő sorozatot:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right), \quad \forall n \geq 1.$$

Igazoljuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, viszont a $\sum_{n \geq 1} a_n$ sor divergens!

2. **(3 pont)** Határozzuk meg az $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó, n -ed rendű Taylor-polinomját (általános $n \geq 1$ esetén), ahol

$$f(x) = x\sqrt{x+1}.$$

3. **(3 pont)** Számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int \frac{1}{2 \sin x + \cos x + 3} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

III. TÉTEL. Geometria

1. **(4 pont)** Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai $A(-2, 4)$ és $B(9, 2)$. Az AC befogó párhuzamos a $2x + y = 2$ egyenletű egyenessel.
 - (a) Határozzuk meg az ABC háromszög oldalainak egyenleteit!
 - (b) Határozzuk meg az ABC háromszög területét!
 - (c) Írjuk fel a $\widehat{BCA}$ szög szögfelezőjének az egyenletét!
2. **(2 pont)** Tekintsük a $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletű hiperbolát.
 - (a) Határozzuk meg az F_1 és F_2 fókuszpontok koordinátáit!
 - (b) Határozzunk meg egy olyan M pontot a hiperbolán, amelyre az MF_1F_2 háromszög területe 15 egység!
3. **(3 pont)** Egy ortonormált derékszögű koordináta-rendszerben tekintsük az $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ és $D(0, 0, 1)$ pontokat.
 - (a) Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$!
 - (b) Írjuk fel az AC és BD egyenesek egyenletét, és mutassuk meg, hogy azok merőlegesek egymásra!
 - (c) Igazoljuk, hogy az AC és BD egyenesek metszik egymást!
 - (d) Határozzuk meg az AC és BD egyenesek metszéspontját!
 - (e) Írjuk fel az A, B, C pontok által meghatározott sík egyenletét!

MEGJEGYZÉSEK:

Minden tétel kötelező. A tételekre teljesen kidolgozott megoldást kell adni.
Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A minimális átmenőjegy 5,00.
Munkaidő 3 óra.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2026 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

- Hivatalból 1p
1. (a) A csoport definíciója 1p
 (b) Példa a T részhalmazra 1p
 Egy példa lehet az $\mathbb{N}$, amely stabil részhalmaz a $(\mathbb{Z}, +)$ -ban, tartalmazza a 0-t, de nem részcsoport ($2 \in \mathbb{N}$, de $-2 \notin \mathbb{N}$).
2. $n \in \mathbb{Z}$ esetén $n\mathbb{Z}$ az n összes többszörösének halmaza (azaz $x \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid x$).
- (a) Észrevehető, hogy a 60 minden többszöröse a 12-nek is többszöröse, tehát $60\mathbb{Z} \subseteq 12\mathbb{Z}$, következésképpen, ha $d = 60$ -at választunk, akkor $d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$ 1p
 (b) $x \in d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} \Leftrightarrow d \mid x$ és $12 \mid x \Leftrightarrow [d, 12] \mid x \Leftrightarrow x \in [d, 12]\mathbb{Z}$ (ahol $[d, 12]$ -vel a d és 12 l.k.k.t.-jét jelöltük)..... 0.5p
 Így, $d\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z} \Leftrightarrow [d, 12] = 60 \Leftrightarrow [d, 2^2 \cdot 3] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \Leftrightarrow d \in \{5, 2 \cdot 5, 2^2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5\}$, tehát d 6 értéket vehet fel 0.5p
3. Mivel $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ az $\mathbb{R}^3$ kanonikus $e = (e_1, e_2, e_3)$ bázisának elemei, azt kapjuk, hogy:
- (a) $f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(1, 2, 2) + y(-1, 1, 2) + z(-3, 0, 3) = (x - y - 3z, 2x + y, 2x + 2y + 3z)$ 1p
 (b) Az f mátrixának, vagyis $[f]_e$ -nek oszlopai a kanonikus bázisban $f(e_1), f(e_2)$ és $f(e_3)$, tehát

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
 1p
 (c) $\text{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \text{Im} f = \text{rang}[f]_e = 3$
 és $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ egy bázis az $_{\mathbb{R}}\text{Im} f$ -ben..... 1p
 $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker} f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im} f = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \text{Ker} f = \{(0, 0, 0)\}$, vagyis a bázisa $\emptyset$ 1p
 (d) $\text{Ker} f = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow f$ injektív, és mivel az értelmezési tartomány és az értékkészlet is 3 dimenziós, következik, hogy f izomorfizmus 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2026 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból 1p

1. Használjuk a Cesaro-Stolz-tételt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{n+1} = 0.$$

..... 1.5p

Ekkor teljesül, hogy

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \geq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty.$$

..... 1.5p

2. Az f függvényhez és az $a = 0$ ponthoz rendelt n -edfokú Taylor-polinom $T_{n;0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ahol

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x) = x\sqrt{x+1}$ függvény végtelen sokszor deriválható az $(-1, \infty)$ halmazon, mivel elemi függvények összetétele. 0.5p

A Leibniz-képletet használjuk a szorzat n -ed rendű deriváltjának meghatározásához:

$$(gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)} h^{(n-k)}$$

Definiáljuk az $g, h : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ segédfüggvényeket, ahol

$$g(x) = x \quad \text{és} \quad h(x) = (x+1)^{1/2}.$$

Mivel

$$g(x) = x, \quad g^{(1)}(x) = 1, \quad g^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 2,$$

zért minden $n \geq 1$ esetén:

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 g(x) h^{(n)}(x) + C_n^1 g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) = x \cdot h^{(n)}(x) + n \cdot h^{(n-1)}(x)$$

..... 1p

A h függvény esetén:

$$\begin{aligned} h(x) &= (x+1)^{1/2}, \\ h^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}, \\ h^{(2)}(x) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (x+1)^{-3/2} = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}, \\ h^{(3)}(x) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) (x+1)^{-5/2} = (-1)^{3-1} \frac{3}{2^3} (x+1)^{-5/2}. \end{aligned}$$

Indukcióval igazoljuk az n -edik derivált általános alakját minden $n \geq 3$ esetén:

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} (x+1)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

Behelyettesítünk Leibniz-szabállyal kapott egyenletbe:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot h^{(1)}(x) + 1 \cdot h(x) = x \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} + (x+1)^{1/2}, \\ f''(x) &= x \cdot h^{(2)}(x) + 2 \cdot h^{(1)}(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}, \\ f^{(n)}(x) &= x \left[(-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} (x+1)^{-\frac{2n-1}{2}} \right] + n \left[(-1)^{n-2} \frac{(2n-5)!!}{2^{n-1}} (x+1)^{-\frac{2n-3}{2}} \right], \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

A Taylor-polinom meghatározásához az $a = 0$ pontban, vegyük észre, hogy:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0 \cdot \frac{1}{2}(1) + (1)^{1/2} = 1, \\ f''(0) &= 0 \cdot \left(-\frac{1}{4}(1)^{-3/2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}(1)^{-1/2} = 1, \\ f^{(n)}(0) &= n(-1)^{n-2} \frac{(2n-5)!!}{2^{n-1}} \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

..... 1p

Következésképpen, minden $n \geq 1$ esetén,

$$T_n(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{128}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-2}(2n-5)!!}{2^{n-1}(n-1)!}x^n,$$

vagyis

$$T_n(x) = x + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-2}(2k-5)!!}{2^{k-1}(k-1)!}x^k.$$

..... 0.5p

3. Az

$$I = \int \frac{1}{2 \sin x + \cos x + 3} dx, \quad \forall x > 1$$

integrál kiszámításához használjuk a következő helyettesítést:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ekkor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

..... 1p

Elvégezve a helyettesítést, kapjuk, hogy

$$I = \int \frac{1}{2 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$I = \int \frac{1}{\frac{4t+(1-t^2)+3(1+t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{4t+1-t^2+3+3t^2} dt = \int \frac{1}{t^2+2t+2} dt.$$

..... 1.5p

Felbontjuk a nevezőben szereplő másodfokú kifejezést:

$$t^2 + 2t + 2 = (t^2 + 2t + 1) + 1 = (t + 1)^2 + 1.$$

Ekkor az integrál a következő alakot ölti:

$$I = \int \frac{1}{(t + 1)^2 + 1} dt = \arctan(t + 1) + C = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + C.$$

..... 0.5p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2026 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) $AB : \frac{x+2}{9+2} = \frac{y-4}{2-4} \Leftrightarrow -2(x+2) = 11(y-4) \Leftrightarrow AB : 2x + 11y - 40 = 0$ 0.5p

Az AC befogó párhuzamos a $d : 2x + y = 2$ egyenessel $\Rightarrow AC : 2x + y = c$. Mivel $A(-2, 4) \in AC \Rightarrow c = 0$, így

$$AC : 2x + y = 0.$$

..... 0.5p

Az BC befogó merőleges az AC befogóra $\Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$. Mivel $m_{AC} = -2 \Rightarrow m_{BC} = \frac{1}{2}$. A BC egyenes áthalad a $B(9, 2)$ ponton, így

$$BC : y - 2 = \frac{1}{2}(x - 9) \Leftrightarrow BC : x - 2y - 5 = 0.$$

..... 0.5p.

b) A C pont koordinátáit a két befogó egyenesének metszeteleként kapjuk meg. Így $C(1, -2)$ 0.5p

$$\mathcal{T}[ABC] = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{(-2-1)^2 + (4+2)^2} \cdot \sqrt{(9-1)^2 + (2+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{80}}{2} = \frac{3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 30.$$

..... 0.5 p

Másképp:

$$\mathcal{T}[ABC] = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = 30.$$

c) A $\widehat{BCA}$ szög mértéke 90° , így a szögfelezője 45° -os szöget zár be az AC befogóval.

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{m_{sz.f.} - m_{AC}}{1 + m_{sz.f.} \cdot m_{AC}} \right| = \left| \frac{m_{sz.f.} + 2}{1 - 2 \cdot m_{sz.f.}} \right| \Leftrightarrow m_{sz.f.} + 2 = \pm(1 - 2m_{sz.f.}).$$

..... 1p

Innen az $m_{sz.f.} \in \{3, -\frac{1}{3}\}$ értékeket kapjuk. De mivel a szögfelező a $\widehat{BCA}$ szög belsejében található, az irányítványozója $m_{sz.f.} = 3$, az egyenlete pedig: $y + 2 = 3(x - 1) \Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$.

..... 0.5p

Alternatív megoldásként a szögfelező egyenlete felírható a belső és külső szögfelezők képletével is (kihasználva, hogy a szögfelező pontjai egyenlő távolságra vannak az AC és BC szárakotól):

$$sz.f_{1,2} : \frac{|2x + y|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{1 + 4}} \Leftrightarrow 2x + y = \pm(x - 2y - 5).$$

Innen kapjuk a $sz.f_1 : x + 3y + 5 = 0$ és $sz.f_2 : 3x - y - 5 = 0$ egyeneseket. Mivel a belső szögfelezőt keressük, a $3x - y - 5 = 0$ egyenletet választjuk. Az indoklás történhet geometriai úton (grafikusan), analitikusan (az egyenes meredeksége alapján), vagy az A és B pontok egyeneshez viszonyított relatív helyzetének ellenőrzésével (koordinátáikat a szögfelező egyenletébe behelyettesítve ellentétes előjelű eredményeket kell kapnunk).

2. a) A hiperbola kanonikus egyenletéből kapjuk, hogy

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5.$$

Így a fókuszpontok

$$F_1(-5, 0), \quad F_2(5, 0)$$

..... 1p

b) Legyen az M pont koordinátája (x_0, y_0) . Az MF_1F_2 háromszög területe $\frac{|F_1F_2| \cdot h_M}{2}$, ahol h_M -mel jelöltük az M pontból az F_1F_2 oldalra bocsátott magasság hosszát. Ekkor

$$h_M = d(M, F_1F_2) = d(M, Ox) = |y_0|.$$

Így

$$\text{Ter}[MF_1F_2] = \frac{|F_1F_2| \cdot |y_0|}{2} = 15 \Leftrightarrow \frac{10 \cdot |y_0|}{2} = 15 \Leftrightarrow |y_0| = 3.$$

..... 0.5p

Mivel az $M(x_0, y_0)$ pont a hiperbolán található, ezért:

$$\frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{16} - 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 32 \Leftrightarrow |x_0| = 4\sqrt{2}.$$

Így az $M_1(-4\sqrt{2}, -3), M_2(-4\sqrt{2}, 3), M_3(4\sqrt{2}, -3), M_4(4\sqrt{2}, 3)$ pontok bármelyikét választhatjuk.

..... 0.5p

3. a) $\overrightarrow{AB}(1, 1, 0) = \overrightarrow{DC}(1, 1, 0)$ 0.5p

b) Az AC és BD egyenesek egyenletei: $AC : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ és $BD : x = 0, \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ 0.5p

Az irányvektorok $\overrightarrow{AC}(2, 1, 1)$ és $\overrightarrow{BD}(0, -1, 1)$ 0.25p

Mivel $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, következik, hogy $AC \perp BD$ 0.25p

c) Mivel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, következik, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Az AC és BD egyenesek ezen paralelogramma átlóinak tartóegyenesei, így azok metszik egymást. 0.5p

d) Az AC és BD egyenesek metszéspontja az $ABCD$ paralelogramma $[AC]$ és $[BD]$ átlóinak közös felezőpontja, amelynek koordinátái:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 = \frac{0 + 0}{2} = \frac{x_B + x_D}{2}$$

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}.$$

..... 0.5p

e) Az (ABC) sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 0-(-1) & 1-0 & 0-0 \\ 1-(-1) & 1-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 1 = 0.$$

..... 0.5p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.