

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2026
Specializarea Matematică informatică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(3 puncte)** Fie mulţimea $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
- (a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este un subinel cu unitate al inelului $(M_2(\mathbb{Q}), +, \cdot)$.
- (b) Este inelul $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ ($+$ şi $\cdot$ sunt operaţiile induse pe $\mathcal{A}$ de operaţiile din $M_2(\mathbb{Q})$) un corp? Justificaţi răspunsul dat.
2. **(6 puncte)** Considerăm sistemul cu necunoscutele $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi parametrul $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 3y + az = 1, \\ x + ay + 3z = 2. \end{cases}$$

- a) Rezolvaţi sistemul pentru $a = 2$.
- b) Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.
- c) Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul nu are soluţie.
- d) Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are mai mult de o soluţie.
- e) Rezolvaţi sistemul pentru $a = 0$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Să se determine forma generală a sumei parţiale de rang n , apoi să se calculeze suma şi să se specifice natura seriei:

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right).$$

2. **(3 puncte)** Scrieţi polinomul lui Taylor de rang arbitrar n , ataşat funcţiei f şi punctului $a = 0$, pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin(2x) \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notă: pentru determinarea derivatei de ordinul n se poate folosi fie formula lui Leibniz, fie identitatea trigonometrică $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

3. **(3 puncte)** Calculaţi $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(5 puncte)** În dreptunghiul $ABCD$ se cunosc $A(0,0)$, $C(6,2)$, iar latura AB este paralelă cu dreapta $y = x + 1$.

- a) Să se scrie ecuaţia diagonalei AC şi să se determine coordonatele centrului M al dreptunghiului.
- b) Să se determine ecuaţiile dreptelor suport ale laturilor AB şi BC .
- c) Să se determine coordonatele vârfurilor B şi D .
- d) Să se calculeze aria dreptunghiului $ABCD$.

2. **(4 puncte)** Se consideră parabola $\mathcal{P}$ cu axa de simetrie Ox , vârful în origine şi care trece prin punctul $A(4,4)$. Se notează cu F focarul parabolei.

- a) Să se determine ecuaţia parabolei $\mathcal{P}$ şi coordonatele punctului F .
- b) Să se scrie ecuaţia unei drepte care trece prin F şi este paralelă cu dreapta $d : 4x + 3y = 0$.
- c) Să se determine toate punctele $M \in \mathcal{P}$ în care o rază incidentă paralelă cu axa Ox se poate reflecta astfel încât raza reflectată să fie paralelă cu dreapta $d : 4x + 3y = 0$.

SUBIECTUL IV. Informatică

Pentru rezolvarea problemelor 1 și 2 poate fi folosit unul din limbajele de programare C++, Python, Java sau C#.

Se va indica limbajul de programare folosit.

Pentru soluțiile oferite se pot folosi biblioteci existente (Python, C++, Java, C#).

1. (2p) Scrieți un program care:

- a) Implementează o clasă **Employee** cu următoarele atribute protejate:
- **name** de tip string,
 - **salary** de tip întreg.

Adăugați clasei:

- un **constructor** cu parametri,
- metodele **get/set** pentru toate atributele,
- o metodă **toString** care returnează un string format din numele și salariul angajatului separate prin spațiu.

- b) Derivați clasa **Manager** din clasa **Employee** care are toate atributele clasei **Employee** și adaugă atributul privat **department** de tip string. Adăugați metodele **get/set** pentru atributul nou adăugat. Metoda **toString** în cazul clasei **Manager** va apela metoda **toString** din clasa **Employee** și va concatena la valoarea returnată un spațiu și numele departamentului.

2. (2p) Creați un vector cu două obiecte de tip **Employee** și un obiect de tip **Manager**. Scrieți o funcție care primește vectorul creat ca parametru și returnează angajatul cu salariul minim din vector.

3. (2p) Scrieți liniile de cod lipsă din următoarea funcție pentru a determina obiectele din vectorul **team** care au salariul mai mare decât **specificSalary**. Se poate folosi funcția **push_back** care inserează un element la finalul vectorului.

```
vector<Employee> filter(const vector<Employee>& team, int specificSalary){  
    vector<Employee> rez;  
    ....  
    return rez;} 
```

4. (2p) Precizați ce se afișează în urma executării secvenței de instrucțiuni de mai jos. Funcția **push_back** inserează un element la finalul vectorului, funcția **pop_back** șterge ultimul element al vectorului, iar funcția **back** returnează o referință la ultimul element din vector.

```
vector<Employee> staff;  
staff.push_back(Employee("John", 5000));  
staff.push_back(Manager("Alice", 8500, "IT"));  
staff.push_back(Manager("Bob", 4000, "HR"));  
staff.push_back(Manager("Elena", 9000, "HR"));  
staff.pop_back();  
staff.push_back(Employee("Michael", 4500));  
staff.pop_back();  
cout<<staff.back().toString()<<endl ;
```

5. (1p) Explicați ce este încapsularea.

NOTĂ.

Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.

Timpu efectiv de lucru este de 3 ore.

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2026
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu1p

1. (a) Se verifică, folosind teorema de caracterizare a subinelului, că $\mathcal{A}$ e subinel în $(M_2(\mathbb{Q}), +, \cdot)$

(i) $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ 0.5p

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ 7b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ 7(b-b') & a-a' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, \forall a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ 0.5p

(iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 7b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + 7bb' & ab' + ba' \\ 7(ab' + ba') & aa' + 7bb' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, \forall a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ 0.5p

Elementul unitate din $M_2(\mathbb{Q})$ este matricea unitate $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 \cdot 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ 0.5p

- (b) Dacă $\mathcal{A}$ ar fi corp, atunci pentru orice element nenul din $\mathcal{A}$ inversul în monoidul $(M_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ ar fi tot din $\mathcal{A}$. Dar, de exemplu, matricea nenulă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2 \in \mathcal{A}$ e inversabilă în inelul $M_2(\mathbb{Q})$ şi

$A^{-1} = \frac{1}{2}I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin \mathcal{A}$ deoarece $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Deci $\mathcal{A}$ nu este corp. 1p

2. Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$, iar matricea extinsă este $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Pentru $a = 2$ avem $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

iar $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 \leftarrow c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(3-2) = 2 \neq 0$, prin urmare sistemul este compatibil determinat, iar unica sa soluţie este dată de regula lui Cramer: 0.5p

$x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{c_2 \leftarrow c_1}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1,$

$y = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 \leftarrow c_1}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1,$

$z = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 \leftarrow c_2}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$ 1p

- (b) Sistemul dat este compatibil determinat dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.

Cum $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \stackrel{c_2 \leftarrow c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a-2 \\ 1 & a-1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 \leftarrow c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a-2 \\ 1 & a-1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - a^2 + 3a - 2 = -a(a-3)$, sistemul e compatibil determinat pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ 1p

- (c),(d) Dacă $a \in \{0, 3\}$ atunci $\text{rang } A = 2$ deoarece minorul $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ de ordinul 2 al lui A este nenul (deci este un minor principal al sistemului) 0.5p

Dacă $a = 0$ atunci $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi singurul minor caracteristic corespunzător lui d este

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 \leftarrow 2c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ 0.5p

Dacă $a = 3$ atunci $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și singurul minor caracteristic corespunzător lui d este

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \dots\dots\dots 0.5p$$

Folosind teorema lui Rouché se deduce imediat că răspunsul la (c) este $a = 3$, $\dots\dots\dots 0.5p$

iar răspunsul la (d) este $a = 0$. $\dots\dots\dots 0.5p$

- (e) Din cele de mai sus rezultă că în cazul $a = 0$, deoarece minorul $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, putem considera ecuații principale prima și ultima ecuație, necunoscute principale pe x, y , iar necunoscuta z fiind necunoscută secundară, o tratăm ca pe un parametru. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} x + y = 1 - z, \\ x = 2 - 3z. \end{cases}$$

De aici obținem mulțimea soluțiilor $S = \{(2 - 3z, -1 + 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \dots\dots\dots 1p$

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.

EXAMEN DE LICENȚĂ
Proba scrisă - septembrie 2026
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu1p

1. Avem

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \right) = \ln \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right) = \ln \left(\frac{n+2}{2(n+1)} \right). \end{aligned}$$

.....2p

Calculăm limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+2}{2(n+1)} \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2.$$

Astfel suma seriei este $-\ln 2$ și seria este convergentă.1p

2. Polinomului lui Taylor de rang n atașat unei funcții f și punctului $a = 0$ este funcția

$$T_{n;0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

având expresia

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funcția $f(x) = \sin(2x) \cos x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind o compunere și produs de funcții elementare.0.5p

Pentru a determina derivata de ordinul n , transformăm mai întâi produsul într-o sumă folosind formula trigonometrică:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

Obținem astfel:

$$f(x) = \frac{1}{2} [\sin(2x+x) + \sin(2x-x)] = \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{2} \sin x$$

Prin inducție se demonstrează pentru un $k \in \mathbb{N}^*$ că:

$$(\sin(kx))^{(n)} = k^n \sin \left(kx + \frac{n\pi}{2} \right)$$

Aplicând liniaritatea derivatei, obținem expresia derivatei de ordinul n :

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^n \sin \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

.....1.5p

Pentru a construi polinomul Taylor centrat în $a = 0$, evaluăm derivata de ordin k în punctul $x = 0$:

$$f^{(k)}(0) = \frac{3^k + 1}{2} \sin \left(\frac{k\pi}{2} \right)$$

Observăm că valoarea depinde de paritatea lui k :

- Dacă $k = 2m$ (par), atunci $\sin(m\pi) = 0 \implies f^{(2m)}(0) = 0$
- Dacă $k = 2m + 1$ (impar), atunci $\sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m \implies f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m \frac{3^{2m+1} + 1}{2}$

Prin urmare, toți termenii cu puteri pare dispar (inclusiv $f(0) = 0$), iar polinomul Taylor conține doar puteri impare:

$$T_n(x) = 2x - \frac{14}{3!}x^3 + \frac{122}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^m(3^{2m+1} + 1)}{2 \cdot (2m + 1)!}x^{2m+1}$$

unde $2m + 1 \leq n$ 1p

3. Integrala

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Observăm că, $(x^2 - 4x + 5)' = 2x - 4$ 0.5p

Atunci

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x - 4) + 4}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx$$

Despărțim fracția în două integrale distincte:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx$$

..... 0.5p

Folosind $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = 2\sqrt{u}$ și $\int \frac{1}{\sqrt{y^2 + a^2}} dy = \ln|y + \sqrt{y^2 + a^2}|$, obținem:

$$I = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2 \ln|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}| + C,$$

..... 2p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2026
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu1p

1. a) Dreapta AC trece prin $A(0, 0)$ şi $C(6, 2)$, deci are panta $m_{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Prin urmare

$$AC : y = \frac{1}{3}x \iff x - 3y = 0.$$

.....0,5p

Diagonalele dreptunghiului se înjumătăţesc, deci centrul dreptunghiului este mijlocul segmentului $[AC]$:

$$M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = M(3, 1).$$

.....0,5p

- b) Deoarece AB este paralelă cu $y = x + 1$ şi $A(0, 0) \in AB$, rezultă

$$AB : y = x.$$

.....0,75p

Într-un dreptunghi, $BC \perp AB$. Cum panta lui AB este 1, panta lui BC este -1 , iar $C(6, 2) \in BC$. Astfel

$$BC : y - 2 = -(x - 6) \iff x + y - 8 = 0.$$

.....0,75p

- c) Vârful B se află la intersecţia dreptelor AB şi BC :

$$\begin{cases} y = x, \\ x + y - 8 = 0, \end{cases}$$

de unde $x = 4$, $y = 4$, deci $B(4, 4)$0,75p

Deoarece M este mijlocul segmentului $[BD]$, avem

$$D = (2, -2).$$

.....0,75p

- d) Avem

$$AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{(6-4)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Rezultă

$$\text{Aria}(ABCD) = AB \cdot BC = 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 16.$$

.....1p

2. a) Deoarece parabola are vârful în origine şi axa de simetrie Ox , ecuaţia ei este de forma

$$P : y^2 = 2px.$$

.....0,75p

Cum $A(4, 4) \in P$, obţinem

$$16 = 2p \cdot 4 \iff p = 2,$$

deci ecuaţia parabolei este

$$P : y^2 = 4x.$$

.....0,75p

Pentru parabola $y^2 = 2px$, focarul are coordonatele $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Prin urmare $F(1, 0)$0,5p

b) Dreapta căutată trece prin $F(1, 0)$ și este paralelă cu d , așadar are ecuația

$$r : 4x + 3y - 4 = 0$$

.....0,5p

c) Raza reflectată trebuie să fie paralelă cu dreapta $4x + 3y = 0$ și, prin proprietatea optică, trebuie să treacă prin focarul $F(1, 0)$. Prin urmare ea se află pe dreapta determinată anterior,

$$r : 4x + 3y - 4 = 0.$$

.....0,5p

Punctele de reflexie sunt intersecțiile dreptei r cu parabola P :

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ 4x + 3y - 4 = 0. \end{cases}$$

Înlocuind $4x = y^2$ în a doua ecuație, obținem

$$y^2 + 3y - 4 = 0 \iff y \in \{1, -4\}.$$

.....0,75p

Pentru $y = 1$ avem $x = \frac{1}{4}$, iar pentru $y = -4$ avem $x = 4$. Deci punctele cerute sunt

$$M_1\left(\frac{1}{4}, 1\right), \quad M_2(4, -4).$$

.....0,25p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEȘ -BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică

**Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licență
septembrie 2026
Specializarea Matematică Informatică**

Subiect Informatică

1. a) Definiție clasa Employee (constructor, metode, acces la date)..... b) Definiție clasa derivată Manager (mostenire, constructor, metoda).....	2p 1p 1p
2. Creare vector..... Calcul valoare minima salariu..... Returnare angajat cu salariu minim.....	2p 0.5p 1p 0.5p
3. Iterare elemente..... Comparare elemente..... Actualizare rezultat.....	2p 0.5p 1p 0.5p
4. Identificarea corectă a obiectului afișat..... Indicarea corectă a reprezentării ca string a obiectului afișat.....	2p 1p 1p
5. Explicarea teoretică.....	1p 1p

Notă:
(1p) Oficiu