

EXAMEN DE LICENȚĂ
Proba scrisă - iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. (3 puncte) Fie $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

- (a) Să se arate că \mathcal{A} este subinel al inelului $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- (b) Este \mathcal{A} , împreună cu operațiile induse de operațiile din $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, un inel comutativ?
- (c) Are inelul $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ divizori ai lui zero?

Justificați răspunsurile date.

2. (2 puncte) Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$ este subgrup în grupul $(\mathbb{Z}, +)$ dacă și numai dacă $m \mid n$ sau $n \mid m$. (Reamintim că pentru $n \in \mathbb{Z}$ se notează $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.)
3. (4 puncte) Considerăm sistemul cu necunoscutele $x, y, z \in \mathbb{R}$ și parametrul $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 3x + y + 2z = a, \\ x - y = 1, \\ x - 3y - z = -1. \end{cases}$$

- (a) Determinați rangul matricei sistemului.
- (b) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul nu are soluții.
- (c) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are mai mult de o soluție.
- (d) Rezolvați sistemul pentru $a = 7$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. (3 puncte) Fie

$$a_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \forall n \geq 1.$$

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, dar seria $\sum_{n \geq 1} a_n$ este divergentă.

2. (3 puncte) Determinați polinomul lui Taylor de rang arbitrar n , atașat funcției f și punctului $a = 0$, pentru

$$f : \left(-\frac{1}{2}, \infty \right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sqrt{2x+1}.$$

3. (3 puncte) Calculați

$$\int \frac{1}{\sin x(2 + \cos x)} dx, \quad x \in (0, \pi).$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(3 puncte)** Se dau dreptele de ecuații $d_1 : x - 2y - 1 = 0$ și $d_2 : 2x + y + 8 = 0$.
- (a) Să se demonstreze că dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.
 - (b) Să se determine punctul de intersecție a dreptelor.
 - (c) Dacă două laturi ale unui dreptunghi se află pe dreptele d_1 și d_2 , iar intersecția diagonalelor este în punctul $M(0, 2)$, atunci să se scrie ecuațiile celorlalte două laturi ale dreptunghiului.
2. **(2 puncte)** Se dă cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$.
- (a) Să se determine centrul A și raza r ale cercului.
 - (b) Să se determine coordonatele punctelor F_1 și F_2 în care se intersectează cercul \mathcal{C} cu axa Ox .
 - (c) Să se scrie ecuația canonică a acelei elipse ale cărei focare sunt punctele F_1, F_2 , iar elipsa trece prin centrul A al cercului \mathcal{C} .
3. **(4 puncte)** Se consideră, în spațiul \mathcal{P} raportat la un reper cartezian ortonormat, familiile de plane $\alpha_t : x - ty + z = t$ și $\beta_t : tx + y - tz = 1$ care depind de parametrul real t .
- (a) Să se arate că planele α_t și β_t sunt neparalele pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
 - (b) Să se determine un vector director al dreptei
- $$(d_t := \alpha_t \cap \beta_t) : \begin{cases} x - ty + z = t \\ tx + y - tz = 1 \end{cases}$$
- (c) Să se arate că $M_t(t, 1, t) \in d_t$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
 - (d) Să se arate că originea $O(0, 0, 0)$ este echidistantă față de toate dreptele $d_t, t \in \mathbb{R}$.

NOTĂ.

Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

EXAMEN DE LICENȚĂ
Proba scrisă - iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu1p

1. (a) Se verifică, folosind teorema de caracterizare a subinelului, că \mathcal{A} e subinel în $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ 2p

(i) $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(b) Din (iii) se deduce imediat că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci inelul $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ nu e comutativ0.5p

(c) Din exemplul dat la (b) pentru a arăta că \cdot nu e comutativă pe \mathcal{A} rezultă și că $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ are divizori ai lui zero 0.5p

2. Pentru $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ este mulțimea tuturor multiplilor lui n (i.e. $x \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid x$) și $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

Dacă $m \mid n$ atunci orice multiplu de n este și multiplu de m , prin urmare, $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ și atunci $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ (și, analog, $n \mid m \Rightarrow m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$)1p

Să considerăm că $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Cum $m \in m\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$ și $n \in n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$, avem $m+n \in m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$, adică $m+n \in m\mathbb{Z}$ sau $m+n \in n\mathbb{Z}$ 0.5p

Dacă $m+n \in m\mathbb{Z}$, cum $m \in m\mathbb{Z}$, avem $n = (m+n) - m \in m\mathbb{Z}$, prin urmare $m \mid n$ (și, analog, cazul $m+n \in n\mathbb{Z}$ conduce la $n \mid m$) 0.5p

3. Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, iar matricea extinsă este $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Avem $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, iar

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_2 - l_1 \\ l_3 + l_1 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_3 + l_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

deci $\text{rang } A = 2$ 1p

(b) Conform teoremei Kronecker-Capelli sistemul este incompatibil dacă și numai dacă

$$2 = \text{rang } A < \text{rang } \bar{A}$$

Există 2 minori de ordin 3 ai matricei \bar{A} ce se obțin din d prin bordare cu elemente din coloana termenilor liberi (minori caracteristici corespunzătorii lui d):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_2 + c_1 \\ c_3 - c_1 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_2 - l_1 \\ l_3 + l_1 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a-3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(a-7)$$

Deci $\text{rang } \bar{A} > 2$ dacă și numai dacă $2(a-7) \neq 0$, adică $a \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$ 1.5p

(c) Pentru ca sistemul să fie compatibil, trebuie ca $2 = \text{rang } A = \text{rang } \overline{A}$. În acest caz avem 2 necunoscute principale și o necunoscută secundară, deci sistemul e compatibil nedeterminat dacă și numai dacă $a = 7$ 0.5p

(d) Pentru $a = 7$ avem compatibilitate cu mai multe soluții (conform celor de mai sus). Rezolvarea se poate porni de la minorul nenul d sau, deoarece $\text{rang } A = 2$ și minorul $d' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (luat din prima și a treia linie din A) e principal, așadar putem păstra doar prima și a 3-a ecuație (ecuațiile principale) și considerăm x, z necunoscute principale, necunoscuta secundară y fiind tratată ca un parametru, iar sistemul devine

$$\begin{cases} x + z = 3 - y, \\ x = y + 1. \end{cases}$$

De aici obținem mulțimea soluțiilor $S = \{(y + 1, y, 2 - 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.

EXAMEN DE LICENȚĂ
Proba scrisă - iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu1p

1. Folosim teorema lui Cesaro-Stolz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

..... 1.5p

Avem

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot 1 = \infty.$$

..... 1.5p

2. Polinomului lui Taylor de rang n atașat unei funcții f și punctului $a = 0$ este funcția

$$T_{n;0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

având expresia

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funcția $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ este indefinit derivabilă pe $(-\frac{1}{2}, \infty)$ fiind o compunere de funcții elementare.

..... 0.5p

Folosim formula lui Leibniz pentru determinarea derivatei de ordinul n a produsului de funcții:

$$(gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)} h^{(n-k)}$$

Definim funcțiile auxiliare $g, h : (-\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = x \\ h(x) = (2x+1)^{1/2}$$

Constatăm că

$$g(x) = x, \quad g^{(1)}(x) = 1, \quad g^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

Astfel, pentru $n \geq 1$:

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 g(x) h^{(n)}(x) + C_n^1 g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) = x \cdot h^{(n)}(x) + n \cdot h^{(n-1)}(x)$$

..... 1p

Pentru funcția h :

$$h(x) = (2x+1)^{1/2}, \quad h^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \cdot 2 = (2x+1)^{-1/2}$$

$$h^{(2)}(x) = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-3/2} \cdot 2 = -(2x+1)^{-3/2}$$

$$h^{(3)}(x) = \frac{3}{2}(2x+1)^{-5/2} \cdot 2 = 3(2x+1)^{-5/2} = (-1)^{3-1}(2 \cdot 3 - 3)!!(2x+1)^{-5/2}$$

Se demonstrează prin inducție forma generală a derivatei de ordinul n pentru $n \geq 2$:

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(2n-3)!!(2x+1)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

Introducem expresiile derivatelor generale în ecuația simplificată obținută prin regula lui Leibniz:

$$f^{(n)}(x) = x \left[(-1)^{n-1}(2n-3)!!(2x+1)^{-\frac{2n-1}{2}} \right] + n \left[(-1)^{n-2}(2n-5)!!(2x+1)^{-\frac{2n-3}{2}} \right]$$

Pentru $n = 1$,

$$f'(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

Pentru $n = 2$

$$f''(x) = \frac{3\sqrt{2x+1} - (3x+1)\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1} = \frac{3x+2}{(2x+1)^{3/2}}$$

..... 1p

Pentru a construi polinomul Taylor centrat în $a = 0$, evaluăm derivata în punctul $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = n(-1)^{n-2}(2n-5)!!, \quad \forall n \geq 3.$$

și

$$f'(0) = 1 \quad \text{și} \quad f''(0) = 2.$$

Prin urmare, pentru un grad arbitrar $n \geq 1$, polinomul se scrie:

$$T_n(x) = x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{8}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-2}(2n-5)!!}{(n-1)!}x^n$$

Sau,

$$T_n(x) = x + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-2}(2k-5)!!}{(k-1)!}x^k$$

..... 0.5p

3. Calculul integralei prin substituție universală

Integrala

$$I = \int \frac{1}{\sin x(2 + \cos x)} dx, \quad x \in (0, \pi)$$

Pentru a transforma integrala trigonometrică într-o integrală rațională, folosim substituția:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Avem

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

..... 1p

Substituind obținem:

$$I = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

Aducem la același numitor în paranteza de la numitor:

$$I = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \left(\frac{2(1+t^2)+1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$
$$I = \int \frac{1}{\frac{2t(2+2t^2+1-t^2)}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2}{t(t^2+3)} dt$$

..... 0.5p

Pentru a putea integra, descompunem funcția rațională în fracții simple:

$$\frac{t^2+1}{t(t^2+3)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+3}$$

Aducând la același numitor, obținem:

$$t^2+1 = A(t^2+3) + (Bt+C)t = (A+B)t^2 + Ct + 3A$$

Prin identificarea coeficienților rezultă sistemul:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ 3A=1 \end{cases} \implies A=\frac{1}{3}, \quad B=\frac{2}{3}, \quad C=0$$

Integrala devine:

$$I = \int \left(\frac{1}{3t} + \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{t^2+3} \right) dt$$
$$I = \frac{1}{3} \ln|t| + \frac{1}{3} \ln(t^2+3) + C = \frac{1}{3} \ln|t(t^2+3)| + C$$

..... 1p

Revenind la variabila inițială, obținem forma finală:

$$I = \frac{1}{3} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \right) \right| + C$$

..... 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.

EXAMEN DE LICENȚĂ
Proba scrisă - iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu1p

1. a) Pantele dreptelor sunt $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$, deci dreptele sunt perpendiculare.

.....0.5p

b) Se rezolvă sistemul format din ecuațiile dreptelor d_1, d_2 .

$$\begin{cases} d_1 : x - 2y - 1 = 0 \\ d_2 : 2x + y + 8 = 0 \end{cases}$$

de unde $x = -3$, $y = -2$, deci $A(-3, -2)$

.....0.5p

c) Dacă se notează dreptunghiul cu $ABCD$, atunci A este vârful determinat în punctul b). Punctul M este mijlocul diagonalei AC , astfel

$$0 = x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 3$$

$$2 = y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 6.$$

.....1p

Laturile căutate ale dreptunghiului trec prin punctul $C(3, 6)$ și sunt paralele cu dreptele d_1 și d_2 . Astfel ecuațiile lor sunt de forma $d_3 : x - 2y + c_3 = 0$ respectiv $d_4 : 2x + y + c_4 = 0$0.5p

Valorile c_3 și c_4 se calculează înlocuind coordonatele punctului C în ecuații. Se obțin $c_3 = 9$ și $c_4 = -12$. Astfel ecuațiile celorlalte două laturi sunt

$$x - 2y + 9 = 0, \quad 2x + y - 12 = 0.$$

.....0.5p

2. a) Se scrie ecuația cercului sub forma $x^2 + (y + 1)^2 = 5$, de unde coordonatele centrului sunt $A(0, -1)$ și raza $r = \sqrt{5}$0.5 p

b) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$0.5p

c) Ecuația canonică a elipsei este

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

.....0.25p

Punctul $A(0, -1) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{0}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, adică $b^2 = 1$0.25p

F_1, F_2 fiind focare, $c = 2$. Se folosește relația $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 1 + 4 = 5$. Astfel ecuația elipsei este

$$\frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$$

.....0.5p

3. a) $\alpha_0 \not\parallel \beta_0$ deoarece vectorii normali $\vec{n}_1(1, 0, 1)$ și $\vec{n}_2(0, 1, 0)$ ai planelor $\alpha_0 : x + z = 0$ și $\beta_0 : y = 1$ sunt liniar independenți 0.25p

Pentru $t \neq 0$ avem $\alpha_t \parallel \beta_t \iff \frac{t}{1} = \frac{1}{-t} = \frac{-t}{1} \iff t^2 = -1$ și $t^2 = 1$, imposibil. Prin urmare $\alpha_t \not\parallel \beta_t$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ 0.75p

b) Un triplet de parametrii directori ai dreptei d_t este $p_t = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1$, $q_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -t & t \end{vmatrix} = 2t$, $r_t = \begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix} = t^2 + 1$ 1p

c) Coordonatele lui M_t verifică ecuațiile planelor α_t și β_t deoarece $t - t \cdot 1 + t = t$ și $t \cdot t + 1 - t \cdot t = 1$ 0.5p

d) Prin urmare $\text{dist}(O, d_t) = \frac{\|\vec{OM}_t \times \vec{d}_t\|}{\|\vec{d}_t\|}$, unde \vec{d}_t este vectorul de coordonate (p_t, q_t, r_t) 0.5p

$$\begin{aligned} \vec{OM}_t \times \vec{d}_t &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 1 & t \\ t^2 - 1 & 2t & t^2 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 2t & t^2 + 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} t & t \\ t^2 - 1 & t^2 + 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} t & 1 \\ t^2 - 1 & 2t \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (t^2 + 1 - 2t^2)\vec{i} - [t(t^2 + 1) - t(t^2 - 1)]\vec{j} + [2t^2 - (t^2 - 1)]\vec{k} \\ &= (1 - t^2)\vec{i} - 2t\vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k} = -p_t\vec{i} - q_t\vec{j} + r_t\vec{k}. \end{aligned}$$

..... 0.5p

$$\text{dist}(O, d_t) = \frac{\|\vec{OM}_t \times \vec{d}_t\|}{\|\vec{d}_t\|} = \frac{\sqrt{(-p_t)^2 + (-q_t)^2 + r_t^2}}{\sqrt{p_t^2 + q_t^2 + r_t^2}} = 1.$$

..... 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.