

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2026 június-július
Matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(3 pont)** Legyen $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

- (a) Igazoljuk, hogy \mathcal{A} az $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ gyűrű részgyűrűje.
- (b) Kommutatív gyűrű-e az \mathcal{A} a $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ műveletei által indukált műveletekkel?
- (c) Vannak-e a $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ gyűrűnek zérusosztói?

Indokoljuk meg a válaszokat.

2. **(2 pont)** Legyen $m, n \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$ akkor és csakis akkor részcsoporthja a $(\mathbb{Z}, +)$ csoportnak, ha $m \mid n$ vagy $n \mid m$. (Itt $n \in \mathbb{Z}$ esetén, $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.)
3. **(4 pont)** Tekintsük az $a \in \mathbb{R}$ paramétert és az alábbi egyenletrendszert az $x, y, z \in \mathbb{R}$ ismeretlenekkel:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 3x + y + 2z = a, \\ x - y = 1, \\ x - 3y - z = -1. \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg az egyenletrendszer mátrixának rangját.
- (b) Határozzuk meg azon $a \in \mathbb{R}$ értékeket, amelyekre az egyenletrendszernek nincs megoldása.
- (c) Határozzuk meg azon $a \in \mathbb{R}$ értékeket, amelyekre az egyenletrendszernek egynél több megoldása van.
- (d) Oldjuk meg az egyenletrendszert $a = 7$ esetén.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tekintük a következő sorozatot:

$$a_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \forall n \geq 1.$$

Igazoljuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, viszont a $\sum_{n \geq 1} a_n$ sor divergens!

2. **(3 pont)** Határozzuk meg az $f : (-\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó, n -ed rendű Taylor-polinomját (általános $n \geq 1$ esetén), ahol

$$f(x) = x\sqrt{2x+1}.$$

3. **(3 pont)** Számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int \frac{1}{\sin x(2 + \cos x)} dx, \quad x \in (0, \pi).$$

III. TÉTEL. Geometria

1. **(3 pont)** Adottak a $d_1 : x - 2y - 1 = 0$ és $d_2 : 2x + y + 8 = 0$ egyenletű egyenesek.
 - (a) Igazoljuk, hogy a d_1 és d_2 egyenesek merőlegesek egymásra!
 - (b) Határozzuk meg a két egyenes metszéspontját!
 - (c) Ha egy téglalap két oldala a d_1 és d_2 egyeneseken található, az átlóinak metszéspontja pedig az $M(0, 2)$ pont, írjuk fel a téglalap másik két oldalának egyenletét!
2. **(2 pont)** Tekintsük a $C : x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$ egyenletű kört.
 - (a) Határozzuk meg a kör A középpontját és r sugarát!
 - (b) Határozzuk meg azon F_1 és F_2 pontok koordinátáit, amelyekben a C kör metszi az Ox tengelyt!
 - (c) Írjuk fel annak az ellipszisnek a kanonikus egyenletét, amelynek fókuszpontjai az F_1 és F_2 pontok, és amely áthalad a C kör A középpontján!
3. **(4 pont)** Egy ortonormált derékszögű koordináta-rendszerhez viszonyított \mathcal{P} térben tekintsük az $\alpha_t : x - ty + z = t$ és $\beta_t : tx + y - tz = 1$ síkcsaládokat, amelyek a t valós paramétertől függenek.
 - (a) Mutassuk meg, hogy az α_t és β_t síkok egyetlen $t \in \mathbb{R}$ esetén sem párhuzamosak!
 - (b) Határozzuk meg a következő metszésvonal (egyenes) egy irányvektorát:

$$(d_t := \alpha_t \cap \beta_t) : \begin{cases} x - ty + z = t \\ tx + y - tz = 1 \end{cases}$$

- (c) Mutassuk meg, hogy $M_t(t, 1, t) \in d_t$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén!
- (d) Mutassuk meg, hogy az $O(0, 0, 0)$ origó egyenlő távolságra van az összes d_t egyenestől, bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén!

MEGJEGYZÉSEK:

Minden tétel kötelező. A tételekre teljesen kidolgozott megoldást kell adni.

Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A minimális átmenőjegy 5,00.

Munkaidő 3 óra.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2026 június-július
Matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. (a) A részgyűrű jellemzési tétele alapján \mathcal{A} részgyűrű a $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ -ban, hiszen 2p

(i) $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(b) A (iii)-ből azonnal következik, hogy $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tehát az $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ gyűrű nem kommutatív 0.5p

(c) A (b) pontban megadott példa mátrixai egyben $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ gyűrűbeli zérusosztók is 0.5p

2. $n \in \mathbb{Z}$ esetén $n\mathbb{Z}$ az n összes többszörösének halmaza (azaz $x \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid x$) és $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

Ha $m \mid n$, akkor az n minden többszöröse egyben m -nek is többszöröse, következésképpen $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$, és ekkor $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ (és analóg módon, $n \mid m \Rightarrow m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$) 1p

Tegyük fel, hogy $m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Mivel $m \in m\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$ és $n \in n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$, azt kapjuk, hogy $m+n \in m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z}$, azaz $m+n \in m\mathbb{Z}$ vagy $m+n \in n\mathbb{Z}$ 0.5p

Ha $m+n \in m\mathbb{Z}$, mivel $m \in m\mathbb{Z}$, következik, hogy $n = (m+n) - m \in m\mathbb{Z}$, azaz $m \mid n$ (és analóg módon az $m+n \in n\mathbb{Z}$ implikálja, hogy $n \mid m$) 0.5p

3. Az egyenletrendszer mátrixa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, a bővített mátrix pedig $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Látszik, hogy $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, és a szegélyező aldeterminások

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ és } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

tehát $\text{rang } A = 2$ 1p

(b) A Kronecker-Capelli-tétel szerint az egyenletrendszer akkor és csak akkor inkompatibilis (megoldhatatlan), ha $2 = \text{rang } A < \text{rang } \bar{A}$

Az \bar{A} mátrixnak 2 olyan harmadrendű aldeterminánusa létezik, amely a d -ből a szabadtagok oszlopának elemeivel való szegélyezéssel kapható (a d -hez tartozó karakterisztikus aldeterminánsok):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2+c_1 \\ c_3-c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ és } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_2-l_1 \\ l_3+l_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a-3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(a-7)$$

Tehát $\text{rang } \bar{A} > 2$ pontosan akkor, ha $2(a-7) \neq 0$, azaz $a \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$ 1.5p

(c) Ahhoz, hogy az egyenletrendszer kompatibilis (megoldható) legyen, szükséges, hogy $2 = \text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$. Ebben az esetben 2 főismeretlenünk és egy mellékismeretlenünk van, tehát az egyenletrendszer pontosan akkor megoldható és határozatlan, ha $a = 7$ 0.5p

- (d) Az $a = 7$ esetben a rendszer (a fentiek alapján) megoldható és határozatlan. A megoldást indíthatjuk a nemnulla d aldeterminánsból. De egyszerűbb a 2 rangú A mátrix első és harmadik sorából vett $d' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ aldeterminánsból kiindulni, ezért az első és a 3. egyenlet főegyenlet (csak ezeket tartjuk meg), illetve x, z főismeretlen, y pedig mellékismeretlen (tehát y -t paraméternek tekintjük). Így az egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$\begin{cases} x + z = 3 - y, \\ x = y + 1. \end{cases}$$

Ebből megkapjuk a megoldáshalmazt: $S = \{(y + 1, y, 2 - 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2026 június-július
Matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból 1p

1. Használjuk a Cesaro-Stolz-tételt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

..... 1.5p

Ekkor teljesül, hogy

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot 1 = \infty.$$

..... 1.5p

2. Az f függvényhez és az $a = 0$ ponthoz rendelt n -edfokú Taylor-polinom $T_{n;0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ahol

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ függvény végtelen sokszor deriválható az $(-\frac{1}{2}, \infty)$ halmazon, mivel elemi függvények összetétele. 0.5p

A Leibniz-képletet használjuk a szorzat n -ed rendű deriváltjának meghatározásához:

$$(gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)} h^{(n-k)}$$

Definiáljuk az $g, h : (-\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ segédfüggvényeket, ahol

$$g(x) = x \quad \text{és} \quad h(x) = (2x+1)^{1/2}.$$

Mivel

$$g(x) = x, \quad g^{(1)}(x) = 1, \quad g^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 2,$$

ezért minden $n \geq 1$ esetén:

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 g(x) h^{(n)}(x) + C_n^1 g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) = x \cdot h^{(n)}(x) + n \cdot h^{(n-1)}(x)$$

..... 1p

A h függvény esetén:

$$\begin{aligned} h(x) &= (2x+1)^{1/2}, \\ h^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \cdot 2 = (2x+1)^{-1/2}, \\ h^{(2)}(x) &= -\frac{1}{2}(2x+1)^{-3/2} \cdot 2 = -(2x+1)^{-3/2}, \\ h^{(3)}(x) &= \frac{3}{2}(2x+1)^{-5/2} \cdot 2 = 3(2x+1)^{-5/2} = (-1)^{3-1} (2 \cdot 3 - 3)!! (2x+1)^{-5/2} \end{aligned}$$

Indukcióval igazoljuk az n -edik derivált általános alakját minden $n \geq 3$ esetén:

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(2n-3)!!(2x+1)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

Behelyettesítünk Leibniz-szabállyal kapott egyenletbe:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot h^{(1)}(x) + 1 \cdot h(x) = x(2x+1)^{-1/2} + (2x+1)^{1/2}, \\ f''(x) &= x \cdot h^{(2)}(x) + 2 \cdot h^{(1)}(x) = -x(2x+1)^{-3/2} + 2(2x+1)^{-1/2}, \\ f^{(n)}(x) &= x \left[(-1)^{n-1}(2n-3)!!(2x+1)^{-\frac{2n-1}{2}} \right] + n \left[(-1)^{n-2}(2n-5)!!(2x+1)^{-\frac{2n-3}{2}} \right], \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

A Taylor-polinom meghatározásához az $a = 0$ pontban, vegyük észre, hogy:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1, \\ f''(0) &= 2, \\ f^{(n)}(0) &= n(-1)^{n-2}(2n-5)!!, \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

.....1p
Következésképpen, minden $n \geq 1$ esetén,

$$T_n(x) = x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{8}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-2}(2n-5)!!}{(n-1)!}x^n,$$

vagyis

$$T_n(x) = x + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-2}(2k-5)!!}{(k-1)!}x^k.$$

.....0.5p

3. Az

$$I = \int \frac{1}{\sin x(2 + \cos x)} dx \quad \text{for } x \in (0, \pi)$$

integrál kiszámításához használjuk a következő helyettesítést:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ekkor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

.....1p

Elvégezve a helyettesítést, kapjuk, hogy

$$I = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Közös nevezőre hozva a nevezőben szereplő kifejezést, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(\frac{2(1+t^2)+1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{\frac{2t(2+2t^2+1-t^2)}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2}{t(t^2+3)} dt. \end{aligned}$$

.....0.5p

Az integrálás elvégzéséhez a racionális függvényt egyszerű törtekre bontjuk:

$$\frac{t^2 + 1}{t(t^2 + 3)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 3}.$$

Közös nevezőre hozva, kapjuk, hogy

$$t^2 + 1 = A(t^2 + 3) + (Bt + C)t = (A + B)t^2 + Ct + 3A.$$

Az együtthatók egyenlőségéből a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ C = 0 \\ 3A = 1 \end{cases} \implies A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = 0.$$

Ekkor az integrál a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{3t} + \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{t^2 + 3} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \ln |t| + \frac{1}{3} \ln(t^2 + 3) + C = \frac{1}{3} \ln |t(t^2 + 3)| + C. \end{aligned}$$

..... 1p

Visszatérve az eredeti változóhoz, kapjuk, hogy

$$I = \frac{1}{3} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \left(\tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 3 \right) \right| + C.$$

..... 0.5p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2026 június-július
Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) Az egyenesek meredeksége $m_1 = \frac{1}{2}$ és $m_2 = -2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$, vagyis az egyenesek merőlegesek egymásra. 0.5p

b) Megoldjuk a d_1, d_2 egyenesek egyenleteiből álló egyenletrendszert

$$\begin{cases} d_1 : x - 2y - 1 = 0 \\ d_2 : 2x + y + 8 = 0 \end{cases}$$

ahonnan $x = -3, y = -2$, tehát $A(-3, -2)$

..... 0.5p

c) Ha a téglalapot $ABCD$ -vel jelöljük, akkor A a b) alpontban meghatározott csúcspont. Az M pont az AC átló felezőpontja, így

$$0 = x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 3$$

$$2 = y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 6.$$

..... 1p

A téglalap keresett oldalai áthaladnak a $C(3, 6)$ ponton, és párhuzamosak a d_1 és d_2 egyenesekkel. Így az egyenleteik $d_3 : x - 2y + c_3 = 0$, illetve $d_4 : 2x + y + c_4 = 0$ alakúak. 0.5p

A c_3 és c_4 értékeket úgy számítjuk ki, hogy a C pont koordinátáit behelyettesítjük az egyenletekbe. Így $c_3 = 9$ és $c_4 = -12$ adódik. Tehát a másik két oldal egyenlete

$$x - 2y + 9 = 0, \quad 2x + y - 12 = 0.$$

..... 0.5p

2. a) A kör egyenletét $x^2 + (y + 1)^2 = 5$ alakban írjuk fel, ahonnan a középpont koordinátái $A(0, -1)$, a sugár pedig $r = \sqrt{5}$ 0.5 p

b) $F_1(-2, 0)$ és $F_2(2, 0)$ 0.5p

c) Az ellipszis kanonikus egyenlete

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

..... 0.25p

Mivel $A(0, -1) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{0}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, vagyis $b^2 = 1$ 0.25p

Mivel F_1, F_2 a fókuszpontok, így $c = 2$. A $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 1 + 4 = 5$ összefüggést használva megkapjuk az ellipszis egyenletét:

$$\frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$$

..... 0.5p

3. a) $\alpha_0 \not\parallel \beta_0$, mivel az $\alpha_0 : x + z = 0$ és $\beta_0 : y = 1$ síkok $\vec{n}_1(1, 0, 1)$ és $\vec{n}_2(0, 1, 0)$ normálvektorai lineárisan függetlenek (nem párhuzamosak).0.25p

Ha $t \neq 0$, akkor $\alpha_t \parallel \beta_t \iff \frac{t}{1} = \frac{1}{-t} = \frac{-t}{1} \iff t^2 = -1$ és $t^2 = 1$, ami lehetetlen. Következésképpen $\alpha_t \not\parallel \beta_t$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. 0.75p

b) A d_t egyenes irányvonal-paramétereinek egy hármasa (az irányvektor koordinátái): $p_t = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1$, $q_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -t & t \end{vmatrix} = 2t$, $r_t = \begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix} = t^2 + 1$1p

c) Az M_t koordinátái teljesítik az α_t és β_t síkok egyenleteit, mivel $t - t \cdot 1 + t = t$ és $t \cdot t + 1 - t \cdot t = 1$ 0.5p

d) Ezért $d(O, d_t) = \frac{\|\overrightarrow{OM_t} \times \vec{d}_t\|}{\|\vec{d}_t\|}$, ahol $\vec{d}_t(p_t, q_t, r_t)$ a d_t egyenes egy irányvektora. 0.5p

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_t} \times \vec{d}_t &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 1 & t \\ t^2 - 1 & 2t & t^2 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 2t & t^2 + 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} t & t \\ t^2 - 1 & t^2 + 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} t & 1 \\ t^2 - 1 & 2t \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (t^2 + 1 - 2t^2)\vec{i} - [t(t^2 + 1) - t(t^2 - 1)]\vec{j} + [2t^2 - (t^2 - 1)]\vec{k} \\ &= (1 - t^2)\vec{i} - 2t\vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k} = -p_t\vec{i} - q_t\vec{j} + r_t\vec{k}. \end{aligned}$$

..... 0.5p

$$\text{dist}(O, d_t) = \frac{\|\overrightarrow{OM_t} \times \vec{d}_t\|}{\|\vec{d}_t\|} = \frac{\sqrt{(-p_t)^2 + (-q_t)^2 + r_t^2}}{\sqrt{p_t^2 + q_t^2 + r_t^2}} = 1.$$

..... 0.5p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.