Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică informatică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(3 puncte)** Fie $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   a) Arătaţi că V este subinel cu unitate al inelului $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

   b) Definim $\psi : V \to \mathbb{R}$, $\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = a$. Arătaţi că ψ este morfism de inele.

2. **(6 puncte)** Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, 2x + y + z, 2x + 2z)$.

   a) Să se arate că f este o transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale.

   b) Să se scrie matricea lui f în baza canonică a lui ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

   c) Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru $\mathrm{Ker} f$ şi $\mathrm{Im} f$.

   d) Este f $\mathbb{R}$-izomorfism? Justificaţi răspunsul dat.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Să se determine forma generală a sumei parţiale de rang n, apoi să se calculeze suma şi să se specifice natura seriei:

$$\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n(n+2)^2}{(n+1)^3}\right).$$

2. **(3 puncte)** Scrieţi polinomul lui Taylor de rang arbitrar n, ataşat funcţiei f şi punctului $a = 0$, pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin x \cos(2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   Notă: pentru determinarea derivatei de ordinul n se poate folosi fie formula lui Leibniz, fie identitatea trigonometrică $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.

3. **(3 puncte)** Calculaţi $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} dx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(5 puncte)** În triunghiul ABC se cunosc coordonatele punctelor $A(3, 4)$ şi $B(4, -3)$ şi ale centrului cercului circumscris $O(0, 0)$. Se ştie că al treilea vârf C este în cadranul III şi aparţine dreptei $d : x - y = 1$.

   a) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC.

   b) Să se determine coordonatele punctului C.

   c) Să se scrie ecuaţiile dreptelor AB şi BC.

   d) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. **(4 puncte)** Se consideră hiperbola

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

   Notăm cu F_1 şi F_2 focarele sale.

   a) Să se determine coordonatele focarelor şi ecuaţiile asimptotelor hiperbolei.

   b) Fie familia de drepte $d_t : \ x = t$, unde $t > 3$. Să se determine, în funcţie de parametrul $t > 3$ fixat, punctele de intersecţie dintre $\mathcal{H}$ şi d_t.

   c) Să se determine $t > 3$ astfel încât pe dreapta $d_t : x = t$ există două puncte M_1, M_2 cu proprietatea că $|M_iF_1 - M_iF_2| = 6$, oricare ar fi $i \in \{1, 2\}$ şi $M_1M_2 = 6$.

Subiectul IV. Informatică

Pentru rezolvarea problemelor 1 și 2 poate fi folosit unul din limbajele de programare C++, Python, Java sau C#.
Se va indica limbajul de programare folosit.
Pentru soluțiile oferite se pot folosi biblioteci existente (Python, C++, Java, C#).

1. **(2p)** Scrieți un program care:
   a) Implementează o clasă ***Event*** cu următoarele atribute protejate:
      - ***title*** de tip string,
      - ***duration*** de tip întreg (durata în minute).

   Adăugaţi clasei:
      - un ***constructor*** cu parametri,
      - metodele ***get/set*** pentru toate atributele,
      - o metodă ***toString*** care returnează un string format din titlul evenimentului și durata acestuia separate prin spațiu.

   b) Derivaţi clasa ***CriticalEvent*** din clasa ***Event*** care are toate atributele clasei ***Event*** și adaugă atributul privat ***severity*** de tip string (ex: "low", "medium", "high"). Adăugaţi metodele ***get/set*** pentru atributul nou adăugat. Metoda ***toString*** în cazul clasei ***CriticalEvent*** va returna conţinutul metodei ***toString*** din clasa ***Event*** la care va concatena un spațiu și nivelul de severitate.

2. (**2p**) Creaţi un vector cu două obiecte de tip ***Event*** și un obiect de tip ***CriticalEvent***. Scrieţi o funcție care primește vectorul creat ca parametru și returnează durata totală a tuturor evenimentelor din vector.

3. (**2p**) Scrieţi liniile de cod lipsă din următoarea funcție astfel încât aceasta să returneze titlul evenimentului cu durata maximă din vector. Dacă există mai multe evenimente cu aceeași durată maximă, se va returna titlul primului găsit.

```
string maxDuration(const vector<Event*>& events){
        ...
}
```

4. (**2p**) Precizaţi ce se afişează în urma executării secvenţei de instrucţiuni de mai jos.

```
vector<Event*> v = {new Event("Conference", 60), new CriticalEvent("Earthquake", 120, "high"),
new CriticalEvent("Flood", 30, "medium"), new Event("Seminar", 45)};
for (int i = 0; i < v.size(); i++) {
        Event ev = *v[i];
        if (ev.getDuration() > 50)
           cout << ev.toString() << endl;
}
```

5. (**1p**) Care este complexitatea algoritmului QuickSort în cazul mediu, respectiv în cazul cel mai favorabil?

NOTĂ.
Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. (a) Se verifică, folosind teorema de caracterizare a subinelului, că V e subinel în $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

   (i) $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$ 0.5p

   (ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ 0 & a-a' \end{pmatrix} \in V,\ \forall a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ 0.5p

   (iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix} \in V,\ \forall a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ 0.5p

   Elementul unitate din $M_2(\mathbb{R})$ este matricea unitate $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$ 0.5p

   (b) ψ este morfism de inele pentru că pentru orice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \in V$ avem

   $\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix}\right) = a + a' = \psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) + \psi\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\right)$ .. 0.5p

   $\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} aa' & ab'+ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix}\right) = aa' = \psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\psi\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\right)$ 0.5p

2. (a) Linearitatea lui f rezultă din
   aditivitate, ... 0.5p
   adică pentru orice $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + (x',y',z')) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= (x+x'+y+y', 2(x+x')+y+y'+z+z', 2(x+x')+2(z+z')) \\ &= (x+y, 2x+y+z, 2x+2z) + (x'+y', 2x'+y'+z', 2x'+2z') = f(x,y,z) + f(x',y',z') \end{aligned}$$

   şi omogenitate, ... 0.5p
   adică pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (\alpha x + \alpha y, 2\alpha x + \alpha y + \alpha z, 2\alpha x + 2\alpha z) = \alpha(x+y, 2x+y+z, 2x+2z) = \alpha f(x,y,z) \end{aligned}$$

   Observaţie: Se poate arăta şi faptul că pentru orice $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$f(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')) = \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y',z')$$

   (b) Matricea $[f]_e$ a lui f în baza canonică are ca şi coloane pe
   $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,2,2), f(e_2) = f(0,1,0) = (1,1,0)$ şi $f(e_3) = f(0,0,1) = (0,1,2)$, deci
   $[f]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 1p

   (c) Avem $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases}\}$

   $= \{(x, -x, -x) | x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, -1, -1)\rangle$

Evident, vectorul $(1,-1,-1)$, nefiind nul, este liniar independent, deci o bază în $\operatorname{Ker} f$ este $\{(1,-1,-1)\}$ şi $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f = 1$ 1.5p

Avem $\operatorname{Im} f = \{f(x,y,z) | (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3)\rangle = \langle (1,2,2),(1,1,0),(0,1,2)\rangle$.

Dar ştim că $3 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f$, de unde $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 2$, adică ajunge să alegem dintre $(1,2,2),(1,1,0),(0,1,2)$ doi vectori liniar independenţi pentru a obţine o bază a imaginii. Un exemplu ar fi $(1,2,2),(1,1,0)$, căci rang $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Deci o bază în $\operatorname{Im} f$ este $\{(1,2,2),(1,1,0)\}$ 1.5p

Observaţie: Se poate folosi şi faptul că $2 = \operatorname{rang}[f]_e = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f$, de aici se deduce că dimensiunea nucleului este 1, iar o bază a nucleului este dată de un element nenul al său care poate fi gasit dacă se observă că în $[f]_e$ avem $c_1 = c_2 + c_3$, deoarece aceasta înseamnă că $f(e_1) = f(e_2) + f(e_3)$ şi implică $f(e_1 - e_2 - e_3) = (0,0,0)$, adică $(1,-1,-1) = e_1 - e_2 - e_3 \in \operatorname{Ker} f$.

(d) f nu este $\mathbb{R}$-izomorfism, căci nu este injectivă, din cauză că $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f = 1 \neq 0$ 1p

Observaţie: Se poate vedea că f nu este nici surjectivă, căci $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 2 < 3$. De asemenea f nu poate fi izomorfism şi din cauză că $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = \operatorname{rang}[f]_e = 2$, adică $\det[f]_e = 0$.

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu 1p

1. Avem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k(k+2)^2}{(k+1)^3}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)^2}{(k+1)^3}\right) = \ln\left(\frac{1\cdot 3^2}{2^3}\cdot\frac{2\cdot 4^2}{3^3}\cdot \ldots \cdot \frac{n(n+2)^2}{(n+1)^3}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{n(n+2)^2}{2^2(n+1)}\right).$$

.... 2p

Calculăm limita:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n(n+2)^2}{2^2(n+1)}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)^2}{2^2(n+1)}\right) = \ln(\infty) = +\infty.$$

Astfel seria are suma ∞ şi este divergentă. 1p

2. Polinomului lui Taylor de rang n ataşat unei funcţii f şi punctului $a = 0$ este funcţia

$$T_{n;0}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

având expresia

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funcţia $f(x) = \sin x \cos(2x)$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind o compunere şi produs de funcţii elementare. 0.5p

Pentru a determina derivata de ordinul n, transformăm mai întâi produsul într-o sumă folosind formula trigonometrică:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

Obţinem astfel, ţinând cont de imparitatea funcţiei sinus ($\sin(-x) = -\sin x$):

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+2x) + \sin(x-2x)\right] = \frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{2}\sin(-x) = \frac{1}{2}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin x$$

Prin inducţie se demonstrează pentru un $k \in \mathbb{R}^*$ că:

$$(\sin(kx))^{(n)} = k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Aplicând liniaritatea derivatei, obţinem expresia derivatei de ordinul n:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\cdot 3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

.... 1.5p

Pentru a construi polinomul Taylor centrat în $a = 0$, evaluăm derivata de ordin k în punctul $x = 0$:

$$f^{(k)}(0) = \frac{3^k - 1}{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Observăm că valoarea depinde de paritatea lui k:

- Dacă $k = 2m$ (par), atunci $\sin(m\pi) = 0 \implies f^{(2m)}(0) = 0$
- Dacă $k = 2m+1$ (impar), atunci $\sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m \implies f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m \frac{3^{2m+1}-1}{2}$

Prin urmare, toţi termenii cu puteri pare dispar (inclusiv $f(0) = 0$), iar polinomul Taylor conţine doar puteri impare:

$$T_n(x) = x - \frac{13}{3!}x^3 + \frac{121}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^m(3^{2m+1}-1)}{2\cdot(2m+1)!}x^{2m+1}$$

unde $2m+1 \leq n$. 1p

3. Integrala

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+10}}\,dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Observăm că, $(x^2-6x+10)' = 2x-6$. 0.5p

Atunci

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+10}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)+6}{\sqrt{x^2-6x+10}}\,dx$$

Despărţim fracţia în două integrale distincte:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+10}}\,dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+10}}\,dx$$

.... 0.5p

Folosind $\int \frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx = 2\sqrt{u}$ şi $\int \frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}}\,dy = \ln\left|y + \sqrt{y^2+a^2}\right|$, obţinem:

$$I = \sqrt{x^2-6x+10} + 3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right| + \mathcal{C},$$

.... 2p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Avem

$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \qquad OB = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Cercul circumscris are centrul $O(0,0)$ şi raza $R = 5$, deci

$$x^2 + y^2 = 25.$$

.... 1p

b) Din condiţia $C(x,y) \in d$ rezultă $y = x - 1$. Cum C aparţine cercului, avem

$$x^2 + (x-1)^2 = 25 \Longleftrightarrow x^2 - x - 12 = 0,$$

deci $x \in \{4, -3\}$. 1p

Punctele de intersecţie sunt $(4,3)$ şi $(-3,-4)$. Deoarece C este în cadranul III, rezultă

$$C(-3,-4).$$

.... 0,5p

c) Dreapta AB trece prin $A(3,4)$ şi $B(4,-3)$; prin formula dreptei prin două puncte obţinem

$$AB: \ 7x + y - 25 = 0.$$

.... 0,75p

Dreapta BC trece prin $B(4,-3)$ şi $C(-3,-4)$; prin formula dreptei prin două puncte obţinem

$$BC: \ x - 7y - 25 = 0.$$

.... 0,75p

d) Aria triunghiului se calculează prin determinant:

$$\text{Aria}(ABC) = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{array}\right| = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25.$$

.... 1p

2. a) Pentru hiperbola $\mathcal{H}$ avem

$$a^2 = 9, \qquad b^2 = 16,$$

deci $a = 3$, $b = 4$. Deoarece $c^2 = a^2 + b^2$, rezultă $c^2 = 25$, deci $c = 5$. 0,5p

Focarele hiperbolei sunt

$$F_1(-5,0), \qquad F_2(5,0).$$

.... 0,5p

Ecuaţiile asimptotelor sunt

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

adică

$$y = \pm \frac{4}{3} x.$$

.... 0,5p

b) Pentru $M(x,y) \in d_t \cap \mathcal{H}$ avem $x = t$, deci $y^2 = 16\left(\frac{t^2}{9} - 1\right)$. 0,75p

Punctele de intersecţie sunt

$$M_1\left(t, 4\sqrt{\left(\frac{t^2}{9} - 1\right)}\right) \text{ şi } M_2\left(t, -4\sqrt{\left(\frac{t^2}{9} - 1\right)}\right)$$

.... 0,25p

c) Cum $6 = 2a$, condiţia

$$|MF_1 - MF_2| = 6$$

arată, prin definiţia hiperbolei ca loc geometric, că punctele căutate aparţin hiperbolei $\mathcal{H}$. 0,5p

Folosind punctul $b)$ avem că

$$M_1M_2 = 8\sqrt{\left(\frac{t^2}{9} - 1\right)}$$

.... 0,5p

Condiţia $M_1M_2 = 6$ implică $t^2 = \frac{9\cdot 25}{16}$, iar cum $t > 3$ avem $t = \frac{15}{4}$. Opţional, punctele corespunzătoare sunt

$$M_1\left(\frac{15}{4}, 3\right), \text{ şi } M_2\left(\frac{15}{4}, -3\right).$$

.... 0,5p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ -BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoştinţelor fundamentale şi de specialitate, examen licenţă iunie-iulie 2026
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1. a) Definiție clasa Event (constructor, metode, acces la date).................... b) Definiție clasa derivată CriticalEvent (mostenire, metoda)..................	**2p** 1p 1p
2. Creare vector... Calcul durata totala ……….. Returnare durata totala …………..…………………………………………..	**2p** 0.5p 1p 0.5p
3. Iterare elemente……………………………………………………………… Determinare maxim ……………………………………………………. Actualizare rezultat ………………………………………………………..	**2p** 0.5p 1p 0.5p
4. Identificarea corectă a obiectului afișat……………………………………. Indicarea corectă a reprezentării ca string a obiectului afișat……………….	**2p** 1p 1p
5. Indicarea corecta a complexității în ambele cazuri	**1p** 1p

Notă:
(1p) Oficiu