

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 szeptember
Informatikai matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(4 pont)** Tekintjük a $GL_2(\mathbb{Z}_2) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_2) \mid \det A \neq \hat{0}\}$ halmazt.
 - a) Igazoljuk, hogy $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ zárt részhalmaza $M_2(\mathbb{Z}_2)$ -nek a mátrixok szorzására nézve és $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ az indukált művelettel csoport.
 - b) Hány eleme van $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ -nek? Indokoljuk meg a választ.
 - c) A $(GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ csoportnak van-e 2 elemű részcsoportja? Indoklás.
2. **(5 pont)** Legyen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy valós lineáris függvény úgy, hogy
$$f(1, 1, 1) = (1, -1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 1) \text{ és } f(1, 0, 0) = (0, 1).$$
 - a) Igazoljuk, hogy az $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ vektorok egy B bázist alkotnak az $\mathbb{R}^3$ vektortérben és írjuk fel f mátrixát a (B, E) bázispárra nézve (ahol E az $\mathbb{R}^2$ vektortér kanonikus bázisa).
 - b) Határozzuk meg $f(x, y, z)$ -t (ahol $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).
 - c) Határozzuk meg f magjának és f képének a dimenzióját (valós vektortereknek tekintve őket).

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tanulmányozzuk a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3))^\alpha}{(3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1))^\beta}$$

sor természetét az α és β valós paraméterek szerint.

2. **(3 pont)** Adjuk meg az

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x+4}{x^2+3x+2}$$

függvény $a=0$ ponthban felírt n -ed rendű Taylor-féle polinomját.

3. **(3 pont)** Számítsuk ki:

$$\int \frac{\sin x}{3 + \cos x + \cos^2 x} dx.$$

III. TÉTEL. Geometria

1. **(5 pont)** Az $ABCD$ négyzet egyik csúcsa $A(3, -2)$, az átlóinak metszéspontja pedig $M(1, 1)$.
 - a) Írjuk fel az AM egyenes egyenletét és határozzuk meg a C csúcs koordinátáit.
 - b) Írjuk fel a BM egyenes egyenletét.
 - c) Írjuk fel a négyzet köré írt kör egyenletét és határozzuk meg a négyzet többi csúcsának koordinátáit.
2. **(4 pont)** Egy parabola szimmetriatengelye az Ox tengely, csúcsa pedig az origó.
 - a) Határozzuk meg az egyenletét, ha tudjuk, hogy áthalad az $A(2, 4)$ ponton.
 - b) Írjuk fel a parabola azon érintőjének az egyenletét amely párhuzamos az $y = 2x$ egyenessel.

IV. TÉTEL. Informatika

Az informatika tételre vonatkozó megjegyzés:

Az 1. és 2. feladat megoldásához a C++, Python, Java és C# programozási nyelvek egyike használható.

Meg kell adni a használt programozási nyelvet.

A megoldásokhoz használhatóak a meglévő könyvtárak (Python, C++, Java, C#).

1. **(2p)** Írjunk programot, amelyben:

- a) bevezetjük a **Person** osztályt az alábbi védelemmel rendelkező attribútumokkal:

- **name**, amely karakterlánc (string) típusú;
- **age**, amely egész típusú.

Adjunk hozzá az osztályhoz:

- egy paraméteres **konstruktort**,
- **get/set** metódusokat az összes attribútumra,
- egy **toString** metódust, amely egy olyan karakterláncot térít vissza, amely a személy nevét és életkorát tartalmazza szóközzel elválasztva.

- b) Hozzuk létre a **Person** osztály **Student** származtatott osztályát, amely a **Person** osztály összes attribútumát tartalmazza, valamint a karakterlánc típusú **faculty** privát attribútumot. Vezessük be az új attribútumhoz hozzárendelt **get/set** metódusokat is. A **Student** osztály esetén a **toString** metódus azt a karakterláncot téríti vissza, amely a **Person** osztály **toString** metódusa által visszaadott értékhez hozzáfűz egy szóközt, majd ezt követően a kar nevét (a **faculty** attribútum tartalmát).

2. **(2p)** Hozzunk létre egy vektort, amely két **Person** típusú és egy **Student** típusú objektumot tartalmaz. Írjunk egy függvényt, amely az így létrehozott vektort kapja paraméterként és a vektorbeli személyek átlagéletkorát téríti vissza.

3. **(2p)** Írjuk meg az alábbi függvényből hiányzó kódrészletet annak érdekében, hogy a **stud** vektor azon elemeit (**Student** típusú objektumait) határozzuk meg, akik a **specificFaculty** karon tanulnak. Lehet használni a **push_back** függvényt, amely egy elemet szűr be a vektor végére.

```
vector<Student> filter(const vector<Student>& stud, const string& specificFaculty){
    vector<Student> rez;
    ....
    return rez;}
```

4. **(2p)** Adjuk meg, hogy mi jelenik meg a kimeneten az alábbi kódrészlet végrehajtásakor. A **push_back** függvény egy elemet szűr be a vektor végére, a **pop_back** függvény kitörli a vektor utolsó elemét és a **back** függvény egy referenciát térít vissza a vektor utolsó elemére.

```
vector<Person> v;
v.push_back(Person("Alexandru", 23));
v.push_back(Student("Tudor", 19, "Istorie"));
v.push_back(Person("Ana", 19));
v.push_back(Student("Maria", 20, "Chimie"));
v.pop_back();
v.pop_back();
cout<<v.back().toString()<<endl;
```

5. **(1p)** Magyarázzuk el, hogy mit értünk dinamikus kötés alatt.

MEGJEGYZÉS.

Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.

Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A legkisebb átmenő jegy: 5,00.

Munkaidő: 3 óra.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 szeptember
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. a) Ha $A, B \in GL_2(\mathbb{Z}_2)$, akkor $\det A, \det B \neq \hat{0}$. Mivel $\mathbb{Z}_2$ test, tehát zérusosztómentes, azt kapjuk, hogy $\det(AB) = \det A \det B \neq \hat{0}$, vagyis $AB \in GL_2(\mathbb{Z}_2)$ 0.5p
($GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot$) csoport az alábbiak alapján:

Mivel $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ zárt részhalmaza az $(M_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ monoidnak, öröklí a mátrixok szorzásának asszociativitását 0.5p

Nyilván $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_2)$ (mivel $\det I_2 = \hat{1} \neq \hat{0}$), vagyis van egységelemünk.....0.5p

Mivel $\mathbb{Z}_2$ test, minden $A \in GL_2(\mathbb{Z}_2)$ invertálható $M_2(\mathbb{Z}_2)$ -ben és $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \neq \hat{0}$, tehát $A^{-1} \in GL_2(\mathbb{Z}_2)$0.5p

- b) Nyilván $|M_2(\mathbb{Z}_2)| = 2^4 = 16$. Másrészt $M_2(\mathbb{Z}_2) \setminus GL_2(\mathbb{Z}_2) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_2) \mid \det A = \hat{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \right\}$,
tehát $|GL_2(\mathbb{Z}_2)| = 16 - 10 = 6$1p

Alternatív módon, direkt úton is megkereshetjük azon mátrixokat $M_2(\mathbb{Z}_2)$ -ben, melyek determinánsa $\hat{1}$. Így

$$GL_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \right\}, \text{ tehát } |GL_2(\mathbb{Z}_2)| = 6.$$

- c) $H = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix} \right\}$ 2 elemű részcsoporth a $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ csoportban, hiszen $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}^2 = I_2$, tehát zárt, $I_2 \in H$ és $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix} \in H$ 1p

2. a) Az áttérési mátrix $\mathbb{R}\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisából a B vektorrendszerbe $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ami invertálható, hiszen $\det T = -1 \neq 0$. Tehát B bázis $\mathbb{R}\mathbb{R}^3$ -ben.....1p

A lineáris függvény mátrixának értelmezése alapján $[f]_{B,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

- b) Meghatározzuk (x, y, z) -nek a B bázisra vonatkozó $x', y', z' \in \mathbb{R}$ koordinátáit:

$$(x, y, z) = x'(1, 1, 1) + y'(1, 1, 0) + z'(1, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' + z' = x \\ x' + y' = y \\ x' = z \end{cases}$$

A megoldás $x' = z, y' = y - z, z' = x - y$ 1p

(*Alternatív módon*, áttérési mátrix használatával $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix}$.)

Innen, felhasználva f linearitását, $f(x, y, z) = f(x'(1, 1, 1) + y'(1, 1, 0) + z'(1, 0, 0)) =$
 $= x'f(1, 1, 1) + y'f(1, 1, 0) + z'f(1, 0, 0) = z(1, -1) + (y - z)(1, 1) + (x - y)(0, 1) = (y, x - 2z) \dots 1\text{p}$
Alternatív módon az egész b) alpontra, ha E' a ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ -beli kanonikus bázis, akkor

$$[f]_{E', E} = [f]_{B, E} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{tehát } f(x, y, z)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - 2z \end{pmatrix}.$$

- c) $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (y, x - 2z) = (0, 0)\} = \{(2t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 0, 1) \rangle$, tehát a $(2, 0, 1)$
vektor egyedül alkot bázist a ${}_{\mathbb{R}}\text{Ker } f$ magban és ezért $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } f = 1 \dots\dots\dots 0.5\text{p}$
 $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } f = 3 - 1 = 2 \dots\dots\dots 0.5\text{p}$
Alternatív módon:

ha $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (1, 0, 0)$, akkor $\text{Im } f = f(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle) = \langle f(b_1), f(b_2), f(b_3) \rangle$,

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } f = \dim \langle f(b_1), f(b_2), f(b_3) \rangle = \text{rang}[f]_{B, E} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \dots\dots\dots 0.5\text{p}$$

$$\text{és } \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } f = 3 - 2 = 1 \dots\dots\dots 0.5\text{p}$$

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 szeptember
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból 1p

1. Alkalmazzuk a Raabe-Duhamel-féle kritériumot: legyen $\sum_{n \geq 1} a_n$ pozitív tagú sor. Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda,$$

akkor 1) $\lambda > 1$ esetén a sor konvergens; 2) $\lambda < 1$ esetén a sor divergens.

..... 0.25p

Jelölje

$$a_n = \frac{(1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3))^\alpha}{(3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1))^\beta}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(4n+3)^\beta}{(4n+1)^\alpha} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n^{\beta-\alpha} \frac{(4+\frac{3}{n})^\beta}{(4+\frac{1}{n})^\alpha} - 1 \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \beta > \alpha \\ -\infty, & \text{ha } \beta < \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

..... 0.75p

Ezért a $\sum_{n \geq 1} a_n$ sor konvergens, ha $\alpha < \beta$, illetve a $\sum_{n \geq 1} a_n$ sor divergens, ha $\alpha > \beta$.

..... 0.25p

Az $\alpha = \beta$ eset: a L'Hospital szabály alapján

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(4n+3)^\alpha}{(4n+1)^\alpha} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4+\frac{3}{n}}{4+\frac{1}{n}} \right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{x \searrow 0} \frac{\left(\frac{4+3x}{4+x} \right)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \searrow 0} \alpha \left(\frac{4+3x}{4+x} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{8}{(4+x)^2} = \frac{8\alpha}{16} = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

..... 0.75p

Ekkor a Raabe-Duhamel-féle kritérium miatt a $\sum_{n \geq 1} a_n$ sor konvergens, ha $\alpha = \beta > 2$, illetve a $\sum_{n \geq 1} a_n$ sor divergens, ha $\alpha = \beta < 2$.

..... 0.25p

Ha $\alpha = \beta = 2$, akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{4n+1}{4n+3} \right)^2 > \frac{n}{n+1},$$

minden $n \geq 1$ esetén. Ezért az $(na_n)_{n \geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő, tehát $na_n \geq a_1$, minden $n \geq 1$ esetén, vagyis $a_n \geq \frac{1}{9n}$, ahol $n \geq 1$ tetszőleges.

..... 0.50p

Mivel a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, ezért a $\sum_{n \geq 1} a_n$ sor szintén divergens.

..... 0.25p

2. Az f függvényhez és az $a = 0$ ponthoz rendelt n -ed rendű Taylor-féle polinom a következő függvény:

$$T_{n;0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

..... 0.25p

Az f függvény végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ halmazon, mint elemi függvények összetett függvénye.

..... 0.25p

Az $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ esetén az elemi törtekre való bontás miatt

$$\frac{x+4}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}.$$

..... 0.25p

A $b \in \mathbb{R}$ állandó esetén, matematikai indukcióval kiszámítható a

$$g : \mathbb{R} \setminus \{-b\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x+b} = (x+b)^{-1}$$

függvény tetszőleges rendű deriváltja:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-1)(x+b)^{-2}, \\ g''(x) &= (-1)(-2)(x+b)^{-3}, \quad \dots\dots\dots, \\ g^{(n)}(x) &= (-1)(-2)\dots(-n)(x+b)^{-(n+1)} = (-1)^n n! (x+b)^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

..... 0.75p

Alkalmazva ezt az eredményt az f függvényre kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = 3(-1)^n n! (x+1)^{-(n+1)} - 2 \cdot (-1)^n n! (x+2)^{-(n+1)} = (-1)^n n! \cdot \left(\frac{3}{(x+1)^{n+1}} - \frac{2}{(x+2)^{n+1}} \right).$$

Innen

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \cdot \left(\frac{3}{(0+1)^{n+1}} - \frac{2}{(0+2)^{n+1}} \right) = (-1)^n n! \cdot (3 - 2^{-n}).$$

..... 1p

Következésképp

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k k! \cdot (3 - 2^{-k})}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (3 - 2^{-k}) x^k = \sum_{k=0}^n (3 - 2^{-k}) (-x)^k.$$

..... 0.50p

3. A $\cos x = t$ változócsere esetén

$$-\sin x \, dx = dt.$$

..... 1p

Ekkor

$$I := \int \frac{\sin x}{3 + \cos x + \cos^2 x} \, dx = - \int \frac{1}{3 + t + t^2} \, dt.$$

..... 1p

Tehát

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} \, dt = - \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{11}} + \mathcal{C} = - \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{11}} + \mathcal{C} = \\ &= - \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2\cos x + 1}{\sqrt{11}} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

..... 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 szeptember
Informatikai Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

- Hivatalból 1p
1. a) $AM : 3x + 2y - 5 = 0$ 1p
 M az $[AC]$ szakasz felezőpontja, ahonnan $C(-1, 4)$ 0.5p
b) A BM egyenes merőleges az AM -re, így $m_{BM} = \frac{2}{3}$ 1p
 $BM : y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ 0.5p
c) A kör középpontja $M(1, 1)$ és sugara $r = AM = \sqrt{13}$, így egyenlete
 $C : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$.
..... 1p
A B és D pontokat megkapjuk a BM átló és a C kör metszeteként.
Megoldva az egyenes és a kör egyenleteiből alkotott egyenletrendszert, kapjuk az B és D csúcsok $(4, 3)$ és $(-2, -1)$ koordinátáit (egy tetszőleges sorrendben). 1p
2. a) A parabola egyenlete: $\mathcal{P} : y^2 = 2px$ alakú. 0.5p
 $A(2, 4) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 16 = 2p \cdot 2 \Leftrightarrow p = 4 \Rightarrow y^2 = 8x$ 1p
b) A t érintő párhuzamos a d egyenessel $\Leftrightarrow m_t = m_d = 2$ 0.5p
Ugyanakkor az érintő egyenlete $yy_0 = 4(x + x_0) \Rightarrow m_t = \frac{4}{y_0}$. Tehát $m_t = \frac{4}{y_0} = 2 \Rightarrow y_0 = 2$ 1p
Az $M_0(x_0, y_0)$ érintkezési pont rajta van a parabolán, ezért $2^2 = 8 \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ 0.5p
Az érintő egyenlete: $yy_0 = 4(x + x_0) \Leftrightarrow 2y = 4(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow t : y = 2x + 1$ 0.5p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

BABEŞ -BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Javítókulcs informatika tétel

1. vizsga: alapismeretek és szakismeretek kiértékelése, záróvizsga 2025 szeptember

Informatikai matematika szak

Informatika tétel

1. a) A Person osztály definiálása (konstruktor, metódusok, hozzáférés az adatokhoz)..... b) A Student származtatott osztály definiálása (öröklés, konstruktor, metódusok).....	2p 1 p 1 p
2. Vektor létrehozása..... Átlagéletkor kiszámítása.....	2p 1p 1p
3. Elemek iterálása..... Elemek összehasonlítása..... Eredmény aktualizálása.....	2p 0.5p 1p 0.5p
4. A kimeneten megjelenő eredmény helyes megadása.....	2p 2p
5. Elméleti magyarázat.....	1p 1p

Megjegyzés:
(1p) Hivatalból