Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2025
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(4 puncte)** Să se arate că $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_{48}$ este inversabil în inelul $(\mathbb{Z}_{48}, +, \cdot)$ dacă şi numai dacă $(a, 48) = 1$. Să se verifice dacă $\widehat{17}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}_{48}$ şi, în caz afirmativ, să se determine inversul său. Să se specifice un divizor al lui zero în inelul $\mathbb{Z}_{48}$.

2. **(5 puncte)** Considerăm $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}[X]$ definit de operaţiile uzuale de adunare a polinoamelor şi înmulţire a unui polinon cu un număr real şi notăm $P_3(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} f \leq 3\}$.

   a) Să se arate că $P_3(\mathbb{R})$ este un subspaţiu al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}[X]$ generat de $\{1, X, X^2, X^3\}$.

   b) Să se arate că mulţimile ordonate

   $$E = (1, X, X^2, X^3) \text{ şi } B = (1, X - 1, X^2 - 2X + 1, X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$$

   sunt baze ale lui ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$.

   c) Să se determine matricea de trecere de la baza E la baza B şi matricea de trecere de la baza B la baza E.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde

   $$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n]{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+\sqrt{2})\ldots(2\sqrt{n})}.$$

2. **(2 puncte)** Studiaţi prin discuţie după parametrul real $a > 0$ natura seriei de numere reale

   $$\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{a+n^2}.$$

3. **(2 puncte)** Determinaţi polinomul lui Taylor de rang arbitrar $2n$, ataşat funcţiei f şi punctului $a = 0$, pentru

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. **(2 puncte)** Calculaţi

   $$\int \sqrt{e^x + 1}\, dx.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(3 puncte)** Un romb $ABCD$ are două vârfuri opuse cu coordonatele $A(2,0)$ și $C(8,8)$.

   a) Să se calculeze lungimea diagonalei AC.

   b) Să se scrie ecuațiile diagonalelor.

   c) Să se calculeze aria rombului, dacă lungimea laturii este 13.

2. **(3 puncte)** Fie parabola $\mathcal{P} : y^2 = 64x$.

   a) Găsiţi punctele $M \in \mathcal{P}$ pentru care $MF = 25$, unde F este focarul parabolei.

   b) Determinaţi coordonatele punctului $N \in \mathcal{P}$ care este cel mai apropiat de dreapta $l : 4x + 3y + 50 = 0$.

3. **(3 puncte)** Considerăm dreapta $d : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-4}{1}$ şi punctul $P(3,1,2)$.

   a) Găsiţi punctul de intersecţie dintre dreapta d şi planul care trece prin punctul P şi este perpendicular pe dreapta d.

   b) Găsiţi distanţa de la punctul P la dreapta d.

NOTĂ.

Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2025
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. $(a,48)=1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, k,l\in\mathbb{Z}:\, ka+48l=1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, k\in\mathbb{Z}:\, 48 \mid (ka-1)$ 0.5p
$\Leftrightarrow\; \exists\, k\in\mathbb{Z}:\, \widehat{ka-1}=\widehat{0}$ (în $\mathbb{Z}_{48}$) $\;\Leftrightarrow\; \exists\, \widehat{k}\in\mathbb{Z}_{48}:\, \widehat{k}\cdot\widehat{a}=\widehat{1} \Leftrightarrow\; \widehat{a}$ inversabil în $\mathbb{Z}_{48}$ 0.5p
17 e număr prim şi $17\nmid 48 \;\Rightarrow\; (17,48)=1 \;\Rightarrow\; \widehat{17}$ e inversabil în $\mathbb{Z}_{48}$ 0.5p
$\widehat{k}\cdot\widehat{17}=\widehat{1}$ (în $\mathbb{Z}_{48}$) $\;\Leftrightarrow\; 48 \mid 17k-1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, l\in\mathbb{Z}:\, 17k+48l=1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, l\in\mathbb{Z}:\, 17 \mid 48(-l)+1$
Fie verificând care dintre clasele inversabile din $\mathbb{Z}_{48}$ verifică prima egalitate din şirul de echivalenţe de mai sus, fie aplicând algoritmul lui Euclid pentru a găsi o pereche $(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ care verifică a treia proprietate din şirul de echivalenţe de mai sus, fie căutând un număr natural $-l$ care verifică ultima proprietate din şirul de echivalenţe de mai sus, se obţine $\widehat{k}=\widehat{17}$ 1.5p
(De exemplu, dând succesiv valori naturale lui $-l$ se ajunge repede la $-l=6$ pentru care avem $48\cdot 6+1=289=17\cdot 17$. Deci $\widehat{17}\cdot\widehat{17}=\widehat{1}$.)
$\widehat{6},\widehat{8}\neq\widehat{0}$ şi $\widehat{6}\cdot\widehat{8}=\widehat{48}=\widehat{0}$, prin urmare $\widehat{6}$ şi $\widehat{8}$ sunt exemple de divizori ai lui zero în $\mathbb{Z}_{48}$ 1p

2. a) $f\in P_3(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \exists\, a_0,a_1.a_2,a_3\in\mathbb{R}:\, f=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3=a_0\cdot 1+a_1X+a_2X^2+a_3X^3 \quad (*)$
Aşadar, $P_3(\mathbb{R})$ este submulţimea lui $\mathbb{R}[X]$ formată din toate combinaţiile liniare de $1,X,X^2,X^3$, adică $P_3(\mathbb{R})=\langle 1,X,X^2,X^3\rangle$ 1p
(Verificarea faptului că $P_3(\mathbb{R})\leq_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$ nu este necesară mai sus. În cazul în care se face această verificare cu ajutorul teoremei de caracterizare a subspaţiului, dar nu se finalizează a), candidatului i se pot acorda până la 0.5 puncte.)

b) Din a) şi unicitatea scrierii lui f sub forma $(*)$ rezultă că E este bază în ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$ 0.5p
Justificarea faptului că B este bază în ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$ 1.5p
Aceasta poate fi făcută în oricare dintre următoarele moduri:
- Încercarea de a scrie un polinom arbirar $f=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$ ca o combinaţie liniară de polinoamele din B,
$$f=\alpha_0\cdot 1+\alpha_1(X-1)+\alpha_2(X^2-2X+1)+\alpha_3(X^3-3X^2+3X-1) \qquad (**)$$
conduce la un sistem de 4 ecuaţii liniare cu necunoscutele $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, sistem care este compatibil determinat, de unde rezultă existenţa şi unicitatea scrierii $(**)$ şi faptul că B este bază în ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$.
- Din $B=(1,X-1,(X-1)^2,(X-1)^3)$, aplicând formula lui Taylor se obţine imediat că orice polinom $f\in P_3(\mathbb{R})$ poate fi scris în mod unic sub forma unei combinaţii liniare de polinoamele din B, deci B este bază în ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$.
(Remarcăm faptul că polinoamele peste $\mathbb{R}$ pot fi identificate cu funcţiile polinomiale reale, deci utilizarea instrumentelor de analiză matematică în demersul de mai sus este posibilă.)
- Matricea care are pe coloane coordonatele polinoamelor din B în baza E (care este matricea de trecere de la E la B de care oricum avem nevoie la c)) este $S=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R})$.
Această matrice are determinantul 1, este inversabilă, prin urmare B este bază în ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$.

c) Matricea de trecere de la de trecere de la E la B este $S=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R})$ (a se vedea mai sus justificarea). 1p

Matricea de trecere de la B la E este inversa matricei S. Calculul lui $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ... 1p

(Se observă că primele două abordări indicate mai sus pentru a arăta că B este bază în ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$ furnizează un mod de calcul pentru coordonatele vectorilor din E în baza B, deci un alt mod de calcul pentru S^{-1}.)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2025
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. Avem

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\cdots\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \sqrt[n]{\left(1+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\cdots\left(1+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)},$$

.... 0.50p

de unde

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)+\ln\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)+\ldots+\ln\left(1+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\right\}.$$

.... 0.50p

Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\sqrt{x})$.

.... 0.25p

Deoarece f este continuă pe intervalul $[0,1]$, putem folosi proprietatea

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

.... 0.25p

Astfel

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\,dx.$$

.... 0.25p

Folosind integrarea prin părți, avem

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = x\,\ln(1+\sqrt{x})\,\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

.... 0.50p

Folosind substituția $t=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$, obținem

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t^2}{t+1}\,dt = \ln 2-\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln 2-\left(\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

.... 0.50p

În consecință $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{e}$.

.... 0.25p

2. Avem o serie cu teremeni pozitivi. Notăm prin

$$x_n = \frac{a^n}{a+n^2}$$

termenul general al şirului generator. 0.25p

Aplicăm consecinţa criteriului raportului

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{a+(n+1)^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a+n^2}{a^n} = a.$$

.... 0.5p

Atunci,

- dacă $a < 1$, seria este convergentă
- dacă $a > 1$ seria este divergentă

.... 0.5p

Pentru cazul în care $a = 1$ se reanalizează termenul general al seriei, care devine

$$x_n = \frac{1}{1+n^2}.$$

Prin comparaţie cu seria armonică generalizată, în cazul particular $\alpha = 2$, fie prin criteriul 1 de comparaţie

$$x_n \leq \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}$$

sau prin cel de-al doilea,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0, \infty)$$

se ajunge la concluzia că seria este convergentă. 0.5p

În concluzie $\sum x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $a \leq 1$. 0.25p

3. Polinomului lui Taylor de rang $2n$ ataşat unui funcţii f şi punctului $a = 0$ este funcţia

$$T_{2n;0}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

având expresia

$$T_{2n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

.... 0.25p

Funcţia f este indefinit derivabilă pe R fiind o compunere de funcţii elementare. 0.25p

Considerând un $x \in \mathbb{R}$ arbitrar, stabilim derivatele.

$$f'(x) = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin x.$$

.... 0.25p

Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că pentru un $n \in \mathbb{N}$ arbitrar

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

.... 0.75p

Astfel, pentru $x = 0$, obţinem

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \cdot \begin{cases} 0 & : \ n = 2t+1 \\ \frac{(-1)^{t-1}}{2} & : \ n = 2t \end{cases}$$

. . . . 0.25p

În concluzie,

$$T_{2n;0}f(x) = 0 + 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2 \cdot (2k)!} x^{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^{(n-1)} x^{2n}}{(2n)!}\right).$$

. . . . 0.25p

4. Folosim schimbarea de variabilă

$$\sqrt{e^x + 1} = t$$

. . . . 0.5p

Astfel

$$e^x + 1 = t^2 \Longrightarrow e^x = t^2 - 1 \Longrightarrow x = \ln(t^2 - 1)$$

. . . . 0.25p

Deci

$$dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$$

. . . . 0.25p

Obţinem

$$\int \sqrt{e^x + 1} dx = \int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2\left(\int \frac{t^2 - 1}{t^2 - 1} dt + \int \frac{1}{t^2 - 1} dt\right) = 2\left(t + \frac{1}{2} \ln \frac{|t - 1|}{|t + 1|}\right) + \mathcal{C} =$$

$$= 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + \mathcal{C}.$$

. . . . 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2025
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) $AC = \sqrt{(8-2)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = 10$ 0.5p

   b) $AC : \dfrac{x-1}{8-2} = \dfrac{y}{8} \Leftrightarrow 4x - 3y - 8 = 0$ 0.5p

   $AC \perp BD \Leftrightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = -1; \quad m_{BD} = \dfrac{-1}{m_{AC}} = \dfrac{-1}{\frac{4}{3}} = -\dfrac{3}{4}$ 0.5p

   Diagonala BD trece prin mijlocul $M(5,4)$ al diagonalei $AC \Rightarrow$

   $BD : y - 4 = -\dfrac{3}{4}(x-5) \Leftrightarrow 3x + 4y - 31 = 0.$ 0.5p

   c) $AM = \dfrac{AC}{2} = 5$. Din teorema lui Pitagora în triunghiul AMB avem $MB^2 = AB^2 - AM^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow MB = 12.$ 0.5p

   $\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AMB} = 4 \cdot \dfrac{AM \cdot MB}{2} = 2 \cdot 5 \cdot 12 = 120.$ 0.5p

2. a) Coordonatele focarului sunt $F(16,0)$.. 0.5 p

   Dacă $M(x,y)$ este punctul cerut de pe parabolă atunci coordonatele acestuia satisfac ecuaţiile

   $y^2 = 64x$ şi respectiv $(x-16)^2 + y^2 = 25^2$. 0.5p

   De aici rezultă că $64x = 25^2 - (x-16)^2$, adică $x \in \{-41, 9\}$. Cum $x > 0$, rezultă $x = 9$. Aşadar punctele de pe parabolă sunt $M_1(9,-24)$, respectiv $M_2(9,24)$. 1p

   b) Punctul de pe parabola are coordonatele de forma $N(y^2/64, y)$. Distanţa de la N la dreapta l este

   $d(N,l) = \dfrac{\left|\frac{y^2}{16} + 3y + 50\right|}{5}.$ 0.5p

   Funcţia $\frac{y^2}{16} + 3y + 50$ ia doar valori pozitive iar minimul acesteia se obţine în punctul $y = -24$. Aşadar coordonatele punctului cerut sunt $N(9,-24)$. 0.5p

3. a) Un vector director al dreptei d este $\vec{d}(2,3,1)$. Planul perdpendicular pe d care trece prin punctul P este

   $\alpha : 2(x-3) + 3(y-1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow \alpha : 2x + 3y + z - 11 = 0$ 1p

   Intersecția dreptei cu plan este punctul $H(1,2,3)$ 1p

   b) $d(P,d) = |PH| = \sqrt{6}$.. 1p.

   Sau alternativ se poate folosi formula $d(P,d) = \dfrac{||\vec{d} \times \overrightarrow{PA}||}{||\vec{d}||}$, unde $A(3,5,4)$ este un punct de pe dreapta d.

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.