

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 szeptember
Matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(4 pont)** Igazoljuk, hogy $\hat{a} \in \mathbb{Z}_{48}$ akkor és csakis akkor invertálható a $(\mathbb{Z}_{48}, +, \cdot)$ gyűrűben ha $(a, 48) = 1$. Ellenőrizzük, hogy $\widehat{17}$ invertálható-e a $\mathbb{Z}_{48}$ gyűrűben és ha igen határozzuk meg az inverzét. Adjunk meg egy zérusosztót a $\mathbb{Z}_{48}$ gyűrűben.
2. **(5 pont)** Tekintjük az $\mathbb{R}[X]$ valós vektorteret, ahol a műveletek a polinomok összeadása és valós számmal való szorzása. Legyen $P_3(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } f \leq 3\}$.
 - a) Igazoljuk, hogy $P_3(\mathbb{R})$ az $\{1, X, X^2, X^3\}$ által generált részter az $\mathbb{R}[X]$ valós vektortérben.
 - b) Igazoljuk, hogy az alábbi rendezett halmazok

$$E = (1, X, X^2, X^3) \text{ és } B = (1, X - 1, X^2 - 2X + 1, X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$$

bázisok ${}_B P_3(\mathbb{R})$ -ben.

- c) Határozzuk meg az áttérési mátrixokat az E bázisból a B bázisba illetve a B bázisból az E bázisba.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határértéket, ahol

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n]{(\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} + \sqrt{2}) \dots (2\sqrt{n})}.$$

2. **(2 pont)** Tanulmányozzuk a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{a + n^2}$$

sor természetét az $a > 0$ valós paraméter szerint.

3. **(2 pont)** Adjuk meg az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$$

függvény $a = 0$ pontban felírt $2n$ -ed rendű Taylor-féle polinomját.

4. **(2 pont)** Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{e^x + 1} dx.$$

III. TÉTEL. Geometria

1. **(3 pont)** Egy $ABCD$ rombusz két szemközti csúcsának koordinátái $A(2, 0)$ és $C(8, 8)$.
 - a) Írjuk fel az átlók egyenleteit.
 - b) Számítsuk ki az AC átló hosszát.
 - c) Számítsuk ki a rombusz területét, ha oldalának hossza 13.

2. **(3 pont)** Tekintsük a $\mathcal{P} : y^2 = 64x$ parabolát.

a) Határozzuk meg azon $M \in \mathcal{P}$ pontokat, amelyre $MF = 25$, ahol F a parabola fókuszpontja.

b) Határozzuk meg azon az $N \in \mathcal{P}$ pontot, amely a legközelebb van az $l : 4x + 3y + 50 = 0$ egyeneshez.

3. **(3 puncte)** Adott a $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-4}{1}$ egyenes és a $P(3, 1, 2)$ pont.

a) Határozzuk meg a d egyenes metszéspontját azzal a síkkal, amely áthalad a P ponton és merőleges a d egyenesre.

b) Számítsuk ki a P pont távolságát a d egyenestől.

MEGJEGYZÉSEK:

Minden tétel kötelező. A tételekre teljesen kidolgozott megoldást kell adni.

Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A minimális átmenőjegy 5,00.

Munkaidő 3 óra.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. $(a, 48) = 1 \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} : ka + 48l = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 48 \mid (ka - 1) \dots\dots\dots 0.5p$
 $\Leftrightarrow \exists \hat{k} \in \mathbb{Z} : \widehat{ka - 1} = \hat{0} \text{ (in } \mathbb{Z}_{48}) \Leftrightarrow \exists \hat{k} \in \mathbb{Z}_{48} : \hat{k} \cdot \hat{a} = \hat{1} \Leftrightarrow \hat{a} \text{ invertálható } \mathbb{Z}_{48}\text{-ban} \dots\dots\dots 0.5p$
 $17 \text{ prím szám és } 17 \nmid 48 \Rightarrow (17, 48) = 1 \Rightarrow \widehat{17} \text{ invertálható } \mathbb{Z}_{48}\text{-ban} \dots\dots\dots 0.5p$
 $\hat{k} \cdot \widehat{17} = \hat{1} \text{ (in } \mathbb{Z}_{48}) \Leftrightarrow 48 \mid 17k - 1 \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z} : 17k + 48l = 1 \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z} : 17 \mid 48(-l) + 1$
Végignézve, hogy $\mathbb{Z}_{48}$ -ban melyik osztály teljesíti a fenti ekvivalenciasor első egyenlőségét, vagy kiterjesztett euklidészi algoritmussal találva egy $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ párt, mely teljesíti a fenti ekvivalenciasor harmadik egyenlőségét, vagy keresve egy $-l$ természetes számot, mely teljesíti a fenti ekvivalenciasor utolsó tulajdonságát, azt kapjuk, hogy $\hat{k} = \widehat{17} \dots\dots\dots 1.5p$
(Például $-l$ -et növelve hamar megkapjuk a $-l = 6$ értéket, melyre $48 \cdot 6 + 1 = 289 = 17 \cdot 17$. Tehát $\widehat{17} \cdot \widehat{17} = \hat{1}$.)
 $\widehat{6}, \widehat{8} \neq \hat{0}$ és $\widehat{6} \cdot \widehat{8} = \widehat{48} = \hat{0}$, tehát $\widehat{6}$ és $\widehat{8}$ zérusosztók $\mathbb{Z}_{48}$ -ban 1p

2. a) $f \in P_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} : f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = a_0 \cdot 1 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad (*)$
Tehát, $P_3(\mathbb{R})$ az $1, X, X^2, X^3$ összes valós lineáris kombinációinak halmaza $\mathbb{R}[X]$ -ben, vagyis
 $P_3(\mathbb{R}) = \langle 1, X, X^2, X^3 \rangle \dots\dots\dots 1p$
($P_3(\mathbb{R}) \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$ ellenőrzése nem szükséges. Ha valaki csak ezt ellenőrzi a résztelemek jellemzési tételével, de nem írja le a fenti gondolatsort, legfeljebb 0.5 pontot kaphat)
- b) Az a) pont alapján valamint f -nek $(*)$ alakba való felírásának egyértelműségéből következik, hogy E bázis ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$ -ben 0.5p
Annak igazolása, hogy B bázis ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$ -ben 1.5p
Ez az alábbi módszerek valamelyikével végezhető el:

- Az $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ felírása a B -beli polinomok lineáris kombinációjaként

$$f = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1(X - 1) + \alpha_2(X^2 - 2X + 1) + \alpha_3(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) \quad (**)$$

egy $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ismeretlenes egyenletrendszerhez vezet, mely kompatibilis és határozott, vagyis a $(**)$ felírás létezik és egyértelmű, ami azt jelenti, hogy B bázis ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$ -ben.

- Mivel $B = (1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$, Taylor formulát alkalmazva következik, hogy minden $f \in P_3(\mathbb{R})$ egyértelműen írható fel a B -beli polinomok lineáris kombinációjaként, vagyis B bázis ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$ -ben.

(A valós polinomok azonosíthatóak a megfelelő valós polinomfüggvényekkel, tehát így bevethetőek az analízis eszözei.)

- A B -beli polinomok együtthatóit E -re nézve oszlopokba írva, az áttérési mátrix az E bázisból a

$$B \text{ rendszerbe } S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}). \text{ Mivel ezen mátrix determinánsa } 1, \text{ vagyis}$$

invertálható, következik, hogy B is bázis ${}_{\mathbb{R}}P_3(\mathbb{R})$ -ben.

- c) Az áttérési mátrix az E bázisból a B bázisba $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ (lásd fentebb). 1p

Az áttérési mátrix a B -ből E -be az S mátrix inverze lesz. Kiszámolva $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$

(A b) pontban felsorolt módszerek közül az első kettő elvezet az E -beli polinomok B -re vonatkozó együtthatóihoz, meghatározva így egyik másik módot S^{-1} kiszámolására.)

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból 1p

1. Mivel

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}} \dots \frac{\sqrt{n+n}}{\sqrt{n}}} = \sqrt[n]{\left(1 + \sqrt{\frac{1}{n}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) \dots \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)},$$

..... 0.50p

ezért

$$\ln a_n = \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1}{n}}\right) + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) + \dots + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) \right\}.$$

..... 0.50p

Tekintsük az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$ függvényt.

..... 0.25p

Mivel f folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, ezért használhatjuk a következő tulajdonságot:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right\} = \int_0^1 f(x) dx.$$

..... 0.25p

Következésképp

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_0^1 \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$$

..... 0.25p

A parciális integrálás képlete alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = x \ln(1 + \sqrt{x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

..... 0.50p

A $t = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ helyettesítést használva kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t^2}{t+1} dt = \ln 2 - \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln 2 - \left(\frac{1}{2}t^2 - t + \ln(t+1) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

..... 0.50p

Következésképp $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{e}$.

..... 0.25p

2. Az adott sor pozitív tagú. Jelölje

$$x_n = \frac{a^n}{a + n^2}$$

a sor általános tagját.

..... 0.25p

A hányados kritérium következményének alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{a + (n+1)^2} \cdot \frac{a + n^2}{a^n} = a.$$

..... 0.50p

Ekkor

- $a < 1$ esetén a $\sum_{n \geq 1} x_n$ sor konvergens,
- $a > 1$ esetén a $\sum_{n \geq 1} x_n$ sor divergens.

..... 0.50p

Az $a = 1$ esetén a sor általános tagja:

$$x_n = \frac{1}{1 + n^2}.$$

Az $\alpha = 2$ esetnek megfelelő konvergens általánosított harmonikus sorral való összehasonlítás alapján, az I. összehasonlítási kritériumból:

$$x_n \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

vagy a II. összehasonlítási kritériumból:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0, \infty),$$

következésképp a $\sum_{n \geq 1} x_n$ sor konvergens.

..... 0.50p

Így a $\sum_{n \geq 1} x_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $a \leq 1$.

..... 0.25p

3. Az f függvényhez és az $a = 0$ ponthoz rendelt $2n$ -ed rendű Taylor-féle polinom a következő függvény:

$$T_{2n;0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_{2n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

..... 0.25p

Az f függvény végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon, mint elemi függvények összetett függvénye.

..... 0.25p

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén meghatározzuk az f függvény deriváltjait:

$$f'(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin x.$$

..... 0.25p

Indukcióval igazolható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \sin \left(x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right).$$

..... 0.75p

Innen $x = 0$ esetén kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2} \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2t + 1 \\ \frac{1}{2}(-1)^{t-1}, & \text{ha } n = 2t. \end{cases}$$

..... 0.25p

Következésképp

$$T_{2n;0}f(x) = 0 + 0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} x^{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right).$$

..... 0.25p

4. A

$$\sqrt{e^x + 1} = t$$

változócserét használjuk.

..... 0.50p

Ekkor

$$e^x + 1 = t^2 \implies e^x = t^2 - 1 \implies x = \ln(t^2 - 1)$$

..... 0.25p

és

$$dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt.$$

..... 0.25p

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x + 1} dx &= \int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \left(\int \frac{t^2 - 1}{t^2 - 1} dt + \int \frac{1}{t^2 - 1} dt \right) = 2 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C = \\ &= 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C. \end{aligned}$$

..... 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) $AC = \sqrt{(8-2)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ 0.5p

b) $AC : \frac{x-1}{8-2} = \frac{y}{8} \Leftrightarrow 4x - 3y - 8 = 0$ 0.5p

$AC \perp BD \Leftrightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = -1; \quad m_{BD} = \frac{-1}{m_{AC}} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$ 0.5p

A BD átló áthalad az AC átló $M(5, 4)$ felezőpontján $\Rightarrow$

$BD : y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 5) \Leftrightarrow 3x + 4y - 31 = 0$ 0.5p

c) $AM = \frac{AC}{2} = 5$. Felírjuk az AMB háromszögben az Pitagorasz tételét: $MB^2 = AB^2 - AM^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow MB = 12$ 0.5p

$\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AMB} = 4 \cdot \frac{AM \cdot MB}{2} = 2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$ 0.5p

2. a) A fókuszpont koordinátái $F(16, 0)$ 0.5 p

Ha $M(x, y)$ a parabola keresett pontja, akkor koordinátái teljesítik az $y^2 = 64x$ és $(x - 16)^2 + y^2 = 25^2$ egyenleteket. 0.5p

Innen következik, hogy $64x = 25^2 - (x - 16)^2$, vagyis $x \in \{-41, 9\}$. Mivel $x > 0$, kapjuk, hogy $x = 9$. Így a parabola keresett pontjai: $M_1(9, -24)$, illetve $M_2(9, 24)$ 1p

b) A parabola tetszőleges N pontjának koordinátái: $N(y^2/64, y)$. Az N pontnak az l egyenestől számolt távolsága

$$d(N, l) = \frac{\left| \frac{y^2}{16} + 3y + 50 \right|}{5}.$$

..... 0.5p

Az $\frac{y^2}{16} + 3y + 50$ függvénynek csak pozitív értékei vannak és a minimumot $y = -24$ pontban veszi fel. Így az N pont koordinátái $N(9, -24)$ 0.5p

3. a) A d egyenes egy irányvektora $\vec{d}(2, 3, 1)$. A d egyenesre merőleges és P ponton áthaladó sík egyenlete

$\alpha : 2(x - 3) + 3(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha : 2x + 3y + z - 11 = 0$ 1p

Az egyenes és sík metszéspontja $H(1, 2, 3)$ 1p

b) $d(P, d) = |PH| = \sqrt{6}$ 1p.

Másképp: Lehet használni a $d(P, d) = \frac{||\vec{d} \times \overrightarrow{PA}||}{||\vec{d}||}$ képletet, ahol például $A(3, 5, 4)$ egy pont a d egyenesről.

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.