Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie 2025
Specializarea Matematică informatică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(3 puncte)** Fie mulţimea $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ şi funcţia $N : \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \to \mathbb{Q},\ N(z) = z \cdot \overline{z}$ (cu $\overline{z}$ s-a notat conjugatul în $\mathbb{C}$ al lui z).
   a) Să se arate că $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ este subcorp al lui $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
   b) Să se arate că $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$ pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.
   c) Este N un morfism de inele? Justificaţi răspunsul dat.
2. **(6 puncte)**
   a) Sunt submulţimile
   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z = 0\} \text{ şi } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$
   subspaţii ale $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$? Justificaţi răspunsul.
   b) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ considerăm vectorii $v_1 = (2, 10, -6, 1),\ v_2 = (4, -1, \alpha, 5),\ v_3 = (2, \alpha, -1, 2)$. Să se determine dimensiunea subspaţiului $S \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ generat de v_1, v_2, v_3. Discuţie după parametrul real α.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Studiați prin discuție după parametrii reali α și β natura seriei de numere reale:
   $$\sum_{n \geq 1} \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1))^{\alpha}}{(2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n))^{\beta}}.$$
2. **(3 puncte)** Determinaţi polinomul lui Taylor de rang arbitrar n, ataşat funcţiei f şi punctului $a = 0$, pentru funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\} \to \mathbb{R}$, unde
   $$f(x) = \frac{x + 8}{x^2 + x - 2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}.$$
3. **(3 puncte)** Calculaţi
   $$\int \frac{1}{5 \sin x + 2 \cos x + 2} dx, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. (**5 puncte**) În triunghiul ABC se cunosc coordonatele vârfurilor $A(1, 1)$ şi $B(0, -2)$, precum şi coordonatele ortocentrului său $H(2, 2)$.
   a) Să se scrie ecuaţiile dreptelor AH şi BH.
   b) Să se determine ecuaţiile dreptelor AC şi BC.
   c) Să se calculeze aria triunghiului ABC.
2. **(4 puncte)** Se dă cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
   a) Să se determine centrul și raza cercului $\mathcal{C}$.
   b) Să se calculeze distanța de la centrul cercului $\mathcal{C}$ la dreapta $d : 3x - 4y + 2 = 0$.
   c) Să se demonstreze că dreapta d și cercul $\mathcal{C}$ se intersectează în două puncte.

Subiectul IV. Informatică

Notă pentru subiectul de Informatică:
Pentru rezolvarea problemelor 1 și 2 poate fi folosit unul din limbajele de programare C++, Python, Java sau C#.
Se va indica limbajul de programare folosit. Pentru soluțiile oferite se pot folosi biblioteci existente (Python, C++, Java, C#).

1. **(2p)** Scrieți un program care:
   a) Implementează o clasă ***Book*** cu următoarele atribute protejate:
      - ***title*** un string,
      - ***price*** un număr real.

      Adăugaţi clasei:
      - un constructor cu parametri,
      - metode ***get/set*** pentru toate atributele,
      - o metodă ***toString*** care returnează un string cu informații despre un obiect în formatul următor: *Title: <title> , Price: <price>*.

   b) Definiți o subclasă a clasei ***Book*** numită ***AudioBook*** care are în plus un atribut privat ***duration*** (un număr natural). Implementați un constructor cu parametri pentru inițializarea tuturor atributelor și o metodă ***toString*** care, folosind metoda ***toString*** din clasa de bază, returnează un string cu toate informațiile despre un ***AudioBook****: Title: <title> , Price: <price>, Duration: <duration>.*

2. (**2p**) Creați un vector ***v*** care să conțină trei obiecte, dintre care două obiecte de tip ***Book*** și un obiect de tip ***AudioBook***. Scrieţi o funcţie care primește ca parametri vectorul ***v*** și un număr real ***p***. Funcția va afișa (folosind metoda ***toString***) toate obiectele din ***v*** care au prețul mai mare strict decât ***p***.

3. (**2p**) Scrieţi liniile de cod lipsă din funcția ***insertSorted*** pentru a insera obiectul ***b*** în vectorul ***v*** astfel încât elementele din vector să fie sortate în ordine crescătoare a prețului. Funcția ***v.push_back(b)*** inserează elementul ***b*** pe ultima poziție din vector, iar funcția ***v.insert(v.begin()+*pos*, b)*** inserează elementul ***b*** pe poziția ***pos*** în vectorul ***v***. La momentul apelului funcţiei ***insertSorted***, elementele vectorului ***v*** sunt sortate în ordine crescătoare după preț.

```
void insertSorted( std::vector<Book>& v, const Book &b) {
   int pos = 0;
   …
   v.insert(v.begin() + pos, b);
}
```

4. (**2p**) Precizaţi ce se afişează în urma executării secvenţei de instrucţiuni de mai jos. Funcția *push_back* inserează un element la finalul vectorului, funcţia *pop_back* șterge ultimul element al vectorului, iar funcţia *back* returnează o referinţă la ultimul element din vector. Pentru clasa ***Audiobook***, în constructorul cu parametri, prețul este dat prin primul argument.

```
vector<Book> books;

books.push_back(Book{20, "Book1"});
books.push_back(AudioBook{120, "AudioBook1", 40});
books.push_back(Book{20, "Book2"});
books.push_back(AudioBook{40, "Book2", 140});

while(books.back().getPrice() < 100)
   books.pop_back();
std::cout<<books.back().toString()<<endl;
```

5. (**1p**) Definiți noțiunile de *supraîncărcarea metodelor* (method overloading) și *suprascrierea metodelor* (method overriding).

NOTĂ.
Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie 2025
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră
Oficiu 1p

1. a) Folosim teorema de caracterizare a subcorpurilor:
$0 = 0 + 0i\sqrt{2}, 1 = 1 + 0i\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$, iar pentru $z = a + bi\sqrt{2}, z' = c + di\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ arbitrare avem $z - z' = (a-b) + (c-d)i\sqrt{(2)}$ şi $zz' = (ac - 2bd) + (ad + bc)i\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ 1p
Pentru $a + bi\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ arbitrar (deci $a, b \in \mathbb{Q}$ nu sunt ambele 0), avem, după amplificare cu conjugatul, $\dfrac{1}{a+bi\sqrt{2}} = \dfrac{a}{a^2+2b^2} - \dfrac{b}{a^2+2b^2} i\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ 0.5p

b) Folosind proprietăţile conjugării şi comutativitatea înmulţirii obţinem
$N(z_1z_2) = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2 = (z_1\overline{z}_1)(z_2\overline{z}_2) = N(z_1)N(z_2)$ 0.5p

c) Funcţia N nu este morfism de inele, deoarece nu este aditivă.
De exemplu, $9 = N(3) \neq N(1) + N(2) = 1 + 4 = 5$ ..... 1p.

2. a) S nu este subspaţiu. De exemplu $(1,1,0), (0,-1,1) \in S$, iar $(1,1,0) + (0,-1,1) = (1,0,1) \notin S$, deci mulţimea S nu este stabilă faţă de adunare 1p
Folosind teorema de caracterizare a subspaţiilor obţinem conform celor de mai jos că T este subspaţiu în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$:
$(0,0,0) \in T$ 0.5p
Pentru $(x,y,z), (x',y',z') \in T$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrare, avem
$\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \in T$, deoarece
$(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') = \alpha(x - y + z) + \beta(x' - y' + z') = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ 1p

b) Conform teoremei lui Kronecker $d = \dim_{\mathbb{R}} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 10 & -6 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha & 5 \\ 2 & \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ..... 1p.
Din $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, avem $d \geq 2$, dar evident $d \leq 3$ 1p
Dacă $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 4 & \alpha & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - 6 = 2(\alpha - 3) = 0$ şi $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -6\alpha + 18 = -6(\alpha - 3) = 0$, adică $\alpha = 3$, avem $d = 2$ 1p
Pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ avem $d = 3$ 0.5p
Alternativ, putem folosi transformări elementare:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 10 & -6 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha & 5 \\ 2 & \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & \alpha + 12 & 3 \\ 0 & \alpha - 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & -3\alpha + 9 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2, \text{ dacă } \alpha = 3 \\ 3, \text{ dacă } \alpha \neq 3 \end{cases}.$$

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie 2025
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu 1p

1. Vom folosi criteriul lui Raabe-Duhamel: *fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda,$$

atunci: 1) *pentru* $\lambda>1$ *seria este convergentă;* 2) *pentru* $\lambda<1$ *seria este divergentă.*

..... 0.25p

Notăm

$$a_n=\frac{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1))^\alpha}{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n))^\beta},\quad n=1,2,3,\ldots$$

Atunci

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)^\beta}{(2n+1)^\alpha}-1\right)=\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(n^{\beta-\alpha}\frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)^\beta}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^\alpha}-1\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{dacă}\quad \beta>\alpha\\ -\infty, & \text{dacă}\quad \beta<\alpha.\end{cases}\end{aligned}$$

..... 0.75p

Astfel $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă, dacă $\alpha<\beta$, respectiv $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă, dacă $\alpha>\beta$.

..... 0.25p

Cazul $\alpha=\beta$: folosind regula lui L'Hospital obținem

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)^\alpha}{(2n+1)^\alpha}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^\alpha-1}{\frac{1}{n}}=\\ &= \lim_{x\searrow 0}\frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\searrow 0}\alpha\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{2}{(2+x)^2}=\frac{2\alpha}{4}=\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

..... 0.75p

Conform criteriului Raabe-Duhamel: $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă, dacă $\alpha=\beta>2$, respectiv $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă, dacă $\alpha=\beta<2$.

..... 0.25p

Dacă $\alpha=\beta=2$, atunci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2>\frac{n}{n+1},$$

pentru orice $n\geq 1$. Astfel șirul $(na_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci $na_n\geq a_1$, pentru orice $n\geq 1$, adică $a_n\geq\frac{1}{4n}$, pentru orice $n\geq 1$.

..... 0.50p

Cum seria armonică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este tot divergentă.

..... 0.25p

2. Polinomului lui Taylor de rang n ataşat unui funcţii f şi punctului $a = 0$ este funcţia

$$T_{n;0}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

având expresia

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

.....0.25p

Funcţia f este indefinit derivabilă pe $R\backslash\{-2, 1\}$ fiind o compunere de funcţii elementare. 0.25p

Considerând un $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$ şi împărţim raportul iniţial în fracţii simple.

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x-1}.$$

.....0.25p

Pentru o constantă oarecare b, calculăm prin inducţie matematică derivatele de ordin arbitrar n ale funcţiei

$$g : \mathbb{R}\backslash\{b\} \to \mathbb{R} \quad \text{cu} \quad g(x) = \frac{1}{x+b} = (x+b)^{-1}.$$

Deci

$$g'(x) = (-1)(x+b)^{-2}, \quad g"(x) = (-1)(-2)(x+b)^{-3} \quad ... \quad g^{(n)}(x) = (-1)(-2)...(-n)(x+b)^{-(n+1)}$$

$$g^{(n)} = (-1)^n n!(x+b)^{-(n+1)}.$$

.....0.75p

Aplicând rezultatul de mai sus funcţiei f găsim

$$f^{(n)}(x) = -2(-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} + 3 \cdot (-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)} = (-1)^n n! \cdot \left(\frac{-2}{(x+2)^{n+1}} + \frac{3}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

Prin urmare

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \cdot \left(\frac{-2}{(0+2)^{n+1}} + \frac{3}{(0-1)^{n+1}}\right) = (-1)^n n! \cdot \left(-2^{-n} + (-1)^{-(n+1)}3\right) =$$

$$= (-1)^{(n+1)} n! \cdot \left(2^{-n} + (-1)^{-n}3\right) = -n! \left((-2)^{-n} + 3\right)$$

.....1p

În concluzie,

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-k! \cdot \left((-2)^{-k} + 3\right)}{k!}x^k = -\sum_{k=0}^{n} \left((-2)^{-k} + 3\right)x^k.$$

.....0.5p

3. Facem schimbarea de variabilă $tg\frac{x}{2} = t$ deci

$$\frac{x}{2} = arctgt \Longrightarrow \frac{1}{2}dx = \frac{1}{t^2+1}dt \Longrightarrow dx = \frac{2}{t^2+1}dt.$$

De asemenea

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{şi} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

.....1p

Deci

$$I = \int \frac{1}{5\sin x + 2\cos x + 2}dx = \int \frac{\frac{2}{t^2+1}dt}{\frac{10t}{1+t^2} + \frac{2-2t^2}{1+t^2} + 2}$$

. . . . . 1p

Astfel

$$I = \int \frac{2}{10t + 2 - 2t^2 + 2 + 2t^2} dt = \int \frac{2}{10t + 4} dt = \int \frac{1}{5t + 2} dt = \frac{1}{5} \ln |5t + 2| + \mathcal{C}$$

$$I = \frac{1}{5} \ln \left| 5tg\frac{x}{2} + 2 \right| + \mathcal{C}.$$

. . . . . 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie 2025
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) $AH : y = x$, $BH : y = 2x - 2$ 1p

b) $m_{BH} = 2$, iar cum AC este perpendiculara pe BH avem $m_{AC} = -\frac{1}{2}$.

Aflăm $AC : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 1p

Similar, $m_{AH} = 1$ şi deci $m_{BC} = -1$.

Aflăm $BC : y = -x - 2$ 1p

c) Punctul C se află la intersecţia dreptelor AC şi BC. Rezolvând sistemul alcătuit din ecuaţiile acestora se obţine $C(-7, 5)$ 1p

Aria triunghiului ABC este

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right| = 14$$

..... 1p

2. a) Ecuația cercului se scrie sub forma: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Centrul cercului este $M_0(2, -3)$ iar raza este $r = 5$. 1.5p

b) $d(M_0, d) = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$ 1.5p

c) $d(M_0, d) = 4 < r = 5 \Rightarrow$ dreapta d se intersectează cu cercul în două puncte. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ -BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate
Examen de licență iunie 2025
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1. a) Definiție clasă Book (constructor, metode, acces la date) ……..…..… b) Definiție clasă derivată AudioBook (moștenire, constructor, metodă) …..	**2p** 1 p 1 p
2. Creare vector.....…… Afișarea corectă a obiectelor cu prețul având proprietatea cerută …….....	**2p** 1p 1p
3. Iterare elemente…….……..……..……..…… Comparare elemente …….……..……..……..….. Determinare corectă poziție……..……..……..……..……..	**2p** 0.5p 0.5p 1p
4. Indicarea corectă a rezultatului afișării …….....	**2p** 2p
5. Explicarea teoretică a conceptelor	**1p** 1p

Notă:
(1p) Oficiu