Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 június
Informatikai matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(3 pont)** Tekintjük a $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmazt és az alábbi függvényt $N : \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \to \mathbb{Q},\ N(z) = z \cdot \overline{z}$ ($\overline{z}$ jelöli z konjugáltját $\mathbb{C}$-ben).
   a) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ résztest $(\mathbb{C}, +, \cdot)$-ben.
   b) Igazoljuk, hogy $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$ minden $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ elemre.
   c) Gyűrűmorfizmus-e N? Indokoljuk meg a választ.
2. **(6 pont)**
   a) Részterek-e az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben az alábbi halmazok
   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z = 0\} \text{ és } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}?$$
   Indokoljuk meg a választ.
   b) Az $\mathbb{R}^4$ valós vektortérben tekintjük az alábbi vektorokat $v_1 = (2, 10, -6, 1),\ v_2 = (4, -1, \alpha, 5),\ v_3 = (2, \alpha, -1, 2)$. Határozzuk meg a v_1, v_2, v_3 vektorok által generált $S \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ résztér dimenzióját. Tárgyalás az α valós paraméter szerint.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tanulmányozzuk a
   $$\sum_{n \geq 1} \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1))^\alpha}{(2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n))^\beta}.$$
   sor természetét az α és β valós paraméterek szerint.
2. **(3 pont)** Adjuk meg az
   $$f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x + 8}{x^2 + x - 2}$$
   függvény $a = 0$ pontban felírt n-ed rendű Taylor-féle polinomját.
3. **(3 pont)** Az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén számítsuk ki:
   $$\int \frac{1}{5 \sin x + 2 \cos x + 2}\, dx.$$

III. TÉTEL. Geometria

1. (**5 puncte**) Az ABC háromszögben ismertek az $A(1, 1)$ és $B(0, -2)$ csúcsok, valamint a $H(2, 2)$ ortocentrum.
   a) Írjuk fel az AH és BH egyenesek egyenleteit.
   b) Írjuk fel az AC és BC egyenesek egyenleteit.
   c) Számítsuk ki az ABC háromszög területét.
2. **(4 pont)** Adott a $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ kör.
   a) Határozd meg a $\mathcal{C}$ kör középpontját és sugarát.
   b) Számítsd ki a $\mathcal{C}$ kör középpontjának a távolságát a $d : 3x - 4y + 2 = 0$ egyenestől.
   c) Igazold, hogy a d egyenes metszi a $\mathcal{C}$ kört két pontban.

IV. TÉTEL. Informatika

Az informatika tételre vonatkozó megjegyzés:

Az 1. és 2. feladat megoldásához a C++, Python, Java és C# programozási nyelvek egyike használható.
Meg kell adni a használt programozási nyelvet.
A megoldásokhoz használhatóak a meglévő könyvtárak (Python, C++, Java, C#).

1. **(2p)** Írjunk programot, amelyben:
   a) bevezetjük a ***Book*** osztályt az alábbi védelemmel rendelkező attribútumokkal:
      - ***title*** egy karakterlánc (string);
      - ***price*** egy valós szám.

      Adjunk hozzá az osztályhoz:
      - egy paraméteres ***konstruktort***,
      - ***get/set*** metódusokat az összes attribútumra,
      - egy ***toString*** metódust, amely egy karakterláncot térít vissza az aktuális objektumra vonatkozó információkkal, az alábbi formátumban: *Title: <title> , Price: <price>.*

   b) Hozzuk létre a ***Book*** osztály ***AudioBook*** származtatott osztályát, amely egy természetes számként megadott ***duration*** privát attribútumot is tartalmaz. Adjunk meg egy paraméteres konstruktort az összes attribútum inicializálására. Definiáljuk a ***toString*** metódust is, amely az alaposztálybeli ***toString*** metódus felhasználásával egy olyan karakterláncot térít vissza, amely az ***AudioBook*** osztályra vonatkozó összes információt tartalmazza: *Title: <title>, Price: <price>, Duration: <duration>.*

2. **(2p)** Hozzunk létre egy ***v*** vektort, amely három objektumot tartalmaz, két ***Book*** típusút és egy ***AudioBook*** típusút**.** Írjunk egy függvényt, amely a ***v*** vektort és egy ***p*** valós számot kap paraméterként. A függvény a ***toString*** metódus felhasználása által írja ki az összes olyan objektumot a ***v*** vektorból, amelynek az ára szigorúan nagyobb a ***p*** valós számnál.

3. **(2p)** Írjuk meg az ***insertSorted*** függvényből hiányzó kódrészletet annak érdekében, hogy a ***v*** vektorba úgy szúrjuk be a ***b*** objektumot, hogy a vektor elemei az ár szerinti növekvő sorrendbe rendezve legyenek. A ***v.push_back(b)*** függvénymeghívás a ***b*** elemet a vektor végére, a ***v.insert(v.begin()+*pos*, b)*** pedig a ***b*** elemet a ***v*** vektor ***pos*** pozíciójára szúrja be. Az ***insertSorted*** függvény meghívásakor a paraméterként átadott ***v*** vektor elemei növekvő sorrendbe vannak rendezve az ár szerint.

```
void insertSorted( std::vector<Book>& v, const Book &b) {
  int pos = 0;
  …
  v.insert(v.begin() + pos, b);
}
```

4. **(2p)** Adjuk meg, hogy mi jelenik meg a kimeneten az alábbi kódrészlet végrehajtásakor. A *push_back* függvény egy elemet szúr be a vektor végére, a *pop_back* függvény kitörli a vektor utolsó elemét és a *back* függvény egy referenciát térít vissza a vektor utolsó elemére. Az ***AudioBook*** osztály paraméteres konstruktora esetén az árat az első paraméter határozza meg.

```
vector<Book> books;

books.push_back(Book{20, "Book1"});
books.push_back(AudioBook{120, "AudioBook1", 40});
books.push_back(Book{20, "Book2"});
books.push_back(AudioBook{40, "Book2", 140});

while(books.back().getPrice() < 100)
   books.pop_back();
std::cout<<books.back().toString()<<endl;
```

5. **(1p)** Adjuk meg, hogy mit értünk a függvénynevek túlterhelése (method overloading), illetve a metódusok felülírása (method overriding) alatt.

MEGJEGYZÉS.

Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A legkisebb átmenő jegy: 5,00.
Munkaidő: 3 óra.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 június
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. a) A részterek jellemzési tételét használjuk:
$0 = 0 + 0i\sqrt{2}, 1 = 1 + 0i\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$, és ha $z = a + bi\sqrt{2}, z' = c + di\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ tetszőlegesek, akkor $z - z' = (a - b) + (c - d)i\sqrt{(2)}$ és $zz' = (ac - 2bd) + (ad + bc)i\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ 1p
Ha $a + bi\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ tetszőleges (tehát $a, b \in \mathbb{Q}$ nem egyszerre 0), akkor a konjugálttal racionalizálva a nevezőt, $\dfrac{1}{a + bi\sqrt{2}} = \dfrac{a}{a^2 + 2b^2} - \dfrac{b}{a^2 + 2b^2} i\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ 0.5p

b) A konjugálás tulajdonságait és a szorzás kommutativitását használva
$N(z_1 z_2) = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) = N(z_1)N(z_2)$ 0.5p

c) Az N függvény nem gyűrűmorfizmus mert nem additív.
Például, $9 = N(3) \neq N(1) + N(2) = 1 + 4 = 5$ ..... 1p.

2. a) S nem résztér. Például $(1, 1, 0), (0, -1, 1) \in S$, de $(1, 1, 0) + (0, -1, 1) = (1, 0, 1) \notin S$, tehát S nem zárt az összeadásra nézve 1p
A részterek jellemzési tétele alapján, az alábbiak szerint következik, hogy T résztér ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$-ben:
$(0, 0, 0) \in T$ 0.5p
Ha $(x, y, z), (x', y', z') \in T$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek, akkor
$\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \in T$, mivel
$(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') = \alpha(x - y + z) + \beta(x' - y' + z') = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ 1p

b) Kronecker tétele alapján $d = \dim_{\mathbb{R}} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 10 & -6 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha & 5 \\ 2 & \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ..... 1p.
Mivel $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, azt kapjuk, hogy $d \geq 2$, és nyilván $d \leq 3$ 1p
Ha $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 4 & \alpha & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - 6 = 2(\alpha - 3) = 0$ és $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -6\alpha + 18 = -6(\alpha - 3) = 0$, vagyis $\alpha = 3$, akkor $d = 2$ 1p
Ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, akkor $d = 3$ 0.5p
Alternatív módon, elemi transzformációs rangszámolással:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 10 & -6 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha & 5 \\ 2 & \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & \alpha + 12 & 3 \\ 0 & \alpha - 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & -3\alpha + 9 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2, \text{ ha } \alpha = 3 \\ 3, \text{ ha } \alpha \neq 3 \end{cases}.$$

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 június
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból 1p

1. Alkalmazzuk a Raabe-Duhamel-féle kritériumot: *legyen* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *pozitív tagú sor. Ha*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda,$$

akkor 1) $\lambda>1$ *esetén a sor konvergens;* 2) $\lambda<1$ *esetén a sor divergens.*

..... 0.25p

Jelölje

$$a_n=\frac{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1))^\alpha}{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n))^\beta},\quad n=1,2,3,\ldots$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)^\beta}{(2n+1)^\alpha}-1\right)=\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(n^{\beta-\alpha}\frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)^\beta}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^\alpha}-1\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{ha}\quad \beta>\alpha\\ -\infty, & \text{ha}\quad \beta<\alpha.\end{cases}\end{aligned}$$

..... 0.75p

Ezért a $\sum_{n\geq 1} a_n$ sor konvergens, ha $\alpha<\beta$, illetve a $\sum_{n\geq 1} a_n$ sor divergens, ha $\alpha>\beta$.

..... 0.25p

Az $\alpha=\beta$ eset: a L'Hospital szabály alapján

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)^\alpha}{(2n+1)^\alpha}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^\alpha-1}{\frac{1}{n}}=\\ &= \lim_{x\searrow 0}\frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\searrow 0}\alpha\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{2}{(2+x)^2}=\frac{2\alpha}{4}=\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

..... 0.75p

Ekkor a Raabe-Duhamel-féle kritérium miatt a $\sum_{n\geq 1} a_n$ sor konvergens, ha $\alpha=\beta>2$, illetve a $\sum_{n\geq 1} a_n$ sor divergens, ha $\alpha=\beta<2$.

..... 0.25p

Ha $\alpha=\beta=2$, akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2>\frac{n}{n+1},$$

minden $n\geq 1$ esetén. Ezért az $(na_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő, tehát $na_n\geq a_1$, minden $n\geq 1$ esetén, vagyis $a_n\geq\frac{1}{4n}$, ahol $n\geq 1$ tetszőleges.

..... 0.50p

Mivel a $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, ezért a $\sum_{n\geq 1} a_n$ sor szintén divergens.

..... 0.25p

2. Az f függvényhez és az $a = 0$ ponthoz rendelt n-ed rendű Taylor-féle polinom a következő függvény:

$$T_{n;0}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k.$$

.....0.25p

Az f függvény végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ halmazon, mint elemi függvények összetett függvénye.

.....0.25p

Az $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ esetén az elemi törtekre való bontás miatt

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x-1}.$$

.....0.25p

A $b \in \mathbb{R}$ állandó esetén, matematikai indukcióval kiszámítható a

$$g : \mathbb{R} \setminus \{-b\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x+b} = (x+b)^{-1}$$

függvény tetszőleges rendű deriváltja:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-1)(x+b)^{-2}, \\ g''(x) &= (-1)(-2)(x+b)^{-3}, \quad \ldots\ldots\ldots\ , \\ g^{(n)}(x) &= (-1)(-2)...(-n)(x+b)^{-(n+1)} = (-1)^n n!(x+b)^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

.....0.75p

Alkalmazva ezt az eredményt az f függvényre kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = -2(-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} + 3(-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)} = (-1)^n n! \cdot \left(\frac{-2}{(x+2)^{n+1}} + \frac{3}{(x-1)^{n+1}} \right).$$

Innen

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= (-1)^n n! \cdot \left(\frac{-2}{(0+2)^{n+1}} + \frac{3}{(0-1)^{n+1}} \right) = (-1)^n n! \cdot \left(-2^{-n} + (-1)^{-(n+1)} 3 \right) = \\ &= (-1)^{n+1} n! \cdot \left(2^{-n} + (-1)^{-n} 3 \right) = -n! \left((-2)^{-n} + 3 \right). \end{aligned}$$

.....1p

Következésképp

$$T_{n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-k! \cdot \left((-2)^{-k} + 3 \right)}{k!} x^k = -\sum_{k=0}^{n} \left((-2)^{-k} + 3 \right) x^k.$$

.....0.50p

3. A $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ változócsere esetén

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Longrightarrow \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{t^2+1}\, dt \Longrightarrow dx = \frac{2}{t^2+1}\, dt.$$

Ugyanakkor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{és} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

.....1p

Ekkor

$$I := \int \frac{1}{5\sin x + 2\cos x + 2}\,dx = \int \frac{\frac{2}{t^2+1}}{\frac{10t}{1+t^2} + \frac{2-2t^2}{1+t^2} + 2}\,dt.$$

. . . . . 1p

Tehát

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{10t + 2 - 2t^2 + 2 + 2t^2}\,dt = \int \frac{2}{10t+4}\,dt = \int \frac{1}{5t+2}\,dt = \frac{1}{5}\ln|5t+2| + \mathcal{C} = \\ &= \frac{1}{5}\ln\left|5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + 2\right| + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

. . . . . 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 június
Informatikai Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) $AH : y = x$, $BH : y = 2x - 2$ 1p

b) $m_{BH} = 2$. $AC \perp BH$, ezért $m_{AC} = -\frac{1}{2}$.

$AC : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 1p

Hasonlóan, $m_{AH} = 1$ és így $m_{BC} = -1$.

Kapjuk $BC : y = -x - 2$ 1p

c) A C pontot megkapjuk az AC és BC egyenesek metszeteként. Megoldva az egyenleteikből alkotott egyenletrendszert kapjuk, hogy $C(-7, 5)$ 1p

Az ABC háromszög területe:

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right| = 14$$

..... 1p

2. a) A kör egyenlete átírható az $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ alakba.

Innen leolvasva a kör középpontja $M_0(2, -3)$, a sugara pedig $r = 5$. 1.5p

b) $d(M_0, d) = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$ 1.5p

c) $d(M_0, d) = 4 < r = 5 \Rightarrow$ a d egyenes metszi a kört két pontban. 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

BABEŞ -BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Javítókulcs informatika tétel
1. vizsga: alapismeretek és szakismeretek kiértékelése, záróvizsga 2025 június
Informatikai matematika szak

Informatika tétel

1. a) A Book osztály definiálása (konstruktor, metódusok, hozzáférés az adatokhoz)..... b) Az AudioBook származtatott osztály definiálása (öröklés, konstruktor, metódus).....	**2p** 1 p 1 p
2. Vektor létrehozása..... Azoknak az objektumoknak a helyes kiírása, amelyeknek az ára a kért tulajdonsággal rendelkezik.....	**2p** 1p 1p
3. Elemek iterálása..... Elemek összehasonlítása..... Pozíció helyes meghatározása.....	**2p** 0.5p 0.5p 1p
4. A kimeneten megjelenő eredmény helyes megadása.....	**2p** 2p
5. A fogalmak elméleti magyarázata.....	**1p** 1p

Megjegyzés:
(1p) Hivatalból