Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie 2025
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(2 puncte)** În corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ al numerelor complexe daţi câte un exemplu de:
   i) parte stabilă a lui $(\mathbb{C}, \cdot)$ care nu este grup în raport cu operaţia indusă;
   ii) subinel care nu este subcorp.

   Justificaţi răspunsurile date.

2. **(2 puncte)** Fie $\overline{abcd}$ un număr natural de 4 cifre divizibil cu 45.
   a) Să se determine mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua suma $a + b + c$.
   b) Să se determine numărul tuturor valorilor pe care le poate lua suma $b + c$. Justificare.

3. **(5 puncte)** Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cu $f(x, y, z) = (x + ay + z, ax + y, x + ay)$ unde a este un parametru real.
   a) Să se arate că f este o transformare $\mathbb{R}$-liniară.
   b) Să se determine matricea lui f în baza canonică.
   c) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ este f izomorfism de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale?

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde
$$a_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{(n^2+1)(n^2+4)\dots(2n^2)}.$$

2. **(2 puncte)** Studiaţi prin dicuţie după parametrul real $a > 0$ natura seriei de numere reale
$$\sum_{n\geq 1} \frac{a + n^2}{a^n}.$$

3. **(2 puncte)** Determinaţi polinomul lui Taylor de rang arbitrar $2n$, ataşat funcţiei f şi punctului $a = 0$, pentru
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. **(2 puncte)** Calculaţi
$$\int e^{\sqrt{x}} dx, \quad \forall x > 0.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(3 puncte)** Diagonala pătratului $ABCD$ se află pe dreapta $d_1 : y - x = 0$, iar vârful A are coordonatele $A(3, 1)$.
   a) Să se scrie ecuația celeilalte diagonale a pătratului.
   b) Ce unghi formează laturile pătratului cu axa Ox?
   c) Să se determine coordonatele vârfurilor pătratului.

2. **(3 puncte)** Se consideră elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
   a) Să se determine coordonatele focarelor F_1 şi F_2 ale elipsei
   b) Să se scrie ecuaţia cercului în care segmentul $[F_1F_2]$ este diametru.
   c) Să se determine coordonatele punctelor M de pe elipsă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este drept.

3. **(3 puncte)** Se consideră punctele $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ şi dreapta
$$(d) \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$
   a) Să se arate că dreptele AB şi d sunt paralele.
   b) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin A şi este perpendicular pe dreapta d.
   c) Să se determine simetricul punctului A faţă de dreapta d.

NOTĂ.
Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie 2025
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. i) De exemplu, $\mathbb{Z}$ e parte stabilă în $(\mathbb{C}, \cdot)$, dar nu este subgrup, căci 2 nu este inversabil în $\mathbb{Z}$ 1p

   ii) De exemplu, $\mathbb{Z}$ e subinel în corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, dar nu este subcorp, căci $2 \in \mathbb{Z}^*$ nu este inversabil în $\mathbb{Z}$ (în raport cu înmulţirea) 1p

2. a) $45 = 5 \cdot 9$, iar cum $(5, 9) = 1$, $45 \mid \overline{abcd}$ dacă şi numai dacă $5 \mid \overline{abcd}$ şi $9 \mid \overline{abcd}$
   Aceasta înseamnă că $d \in \{0, 5\}$ şi $9 \mid a + b + c + d$ 0.5p
   Cum $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi $b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, suma $b + c$ este un număr natural cel mult egal cu 18, iar suma $a + b + c$ este un număr natural nenul cel mult egal cu 27.
   Când $d = 0$, $a + b + c \in \{9, 18, 27\}$, iar când $d = 5$, $a + b + c + 5 \in \{9, 18, 27\}$,
   deci $a + b + c \in \{4, 9, 13, 18, 22, 27\}$ 0.5p

   b) Suma $b + c$ poate lua orice valoare număr natural de la 0 la 18, deci poate lua 19 valori 1p
   Dacă $b + c \in \{0, 18\}$, se poate lua $a = 4$, $d = 5$.
   Dacă $b + c \in \{1, \ldots, 8\}$, se poate lua $a = 9 - (b + c)$ (care este o cifră nenulă) şi $d = 0$.
   Dacă $b + c \in \{9, \ldots, 17\}$, se poate lua $a = 18 - (b + c)$ (care este o cifră nenulă) şi $d = 0$.

3. a) Verificarea egalităţii $f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x, y, z) + f(x', y', z'),\ \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ ... 1p
   Verificarea faptului că $f(\alpha(x, y, z)) = \alpha f(x, y, z),\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 1p
   sau, *alternativ*, verificarea proprietăţii
   $f(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) = \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z'),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ 2p

   b) Avem $f(1, 0, 0) = (1, a, 1),\ f(0, 1, 0) = (a, 1, a),\ f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$, ... 1p
   prin urmare, matricea lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ 1p

   c) f este $\mathbb{R}$-izomorfism (liniar) $\Leftrightarrow$ A este inversabilă în $M_3(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ 0.5p
   Cum $\det A = a^2 - 1$, rezultă că f este $\mathbb{R}$-izomorfism dacă şi numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie 2025
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu 1p

1. Avem

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^2}\frac{n^2+2^2}{n^2}\dots\frac{n^2+n^2}{n^2}} = \sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\dots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)},$$

..... 0.50p

de unde

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)+\ln\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)+\dots+\ln\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right\}.$$

..... 0.50p

Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x^2)$.

..... 0.25p

Deoarece f este continuă pe intervalul $[0,1]$, putem folosi proprietatea

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

..... 0.25p

Astfel

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln(1+x^2)\,dx.$$

..... 0.50p

Folosind integrarea prin părți, avem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n &= x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\ln 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\\ &= \ln 2-2\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^1=\ln 2-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+\ln 2-2.\end{aligned}$$

..... 0.75p

În consecință $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{\pi}{2}+\ln 2-2}$.

..... 0.25p

2. Avem o serie cu teremeni pozitivi. Notăm prin

$$x_n=\frac{a+n^2}{a^n}$$

termenul general al şirului generator. 0.25p

Aplicăm consecinţa criteriului raportului

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+(n+1)^2}{a^{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a+n^2}=\frac{1}{a}.$$

..... 0.5p

Atunci,

- dacă $a > 1$, seria este convergentă
- dacă $a < 1$ seria este divergentă

.....0.5p

Pentru cazul în care $a = 1$ se reanalizează termenul general al seriei, care devine

$$x_n = 1 + n^2.$$

astfel seria este divergentă 0.5p

În concluzie $\sum x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $a > 1$. 0.25p

3. Polinomului lui Taylor de rang $2n$ ataşat unui funcţii f şi punctului $a = 0$ este funcţia

$$T_{2n;0}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

având expresia

$$T_{2n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^k(0)}{k!}x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

.....0.25p

Funcţia f este indefinit derivabilă pe R fiind o compunere de funcţii elementare. 0.25p

Considerând un $x \in \mathbb{R}$ arbitrar, stabilim derivatele.

$$f'(x) = 2\cos\frac{x}{2} \cdot \left(-\sin\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin x.$$

.....0.25p

Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că pentru un $n \in \mathbb{N}$ arbitrar

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

.....0.75p

Astfel, pentru $x = 0$, obţinem

$$f^{(n)}(0) = -\frac{1}{2}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \cdot \begin{cases} 0 & : \ n = 2t+1 \\ -\frac{(-1)^{t-1}}{2} & : \ n = 2t \end{cases}$$

.....0.25p

În concluzie,

$$T_{2n;0}f(x) = 1 + 0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2 \cdot (2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^{(n-1)}x^{2n}}{(2n)!}\right).$$

.....0.25p

4. Folosim schimbarea de variabilă

$$\sqrt{x} = t$$

.....0.5p

Astfel

$$x = t^2 \Longrightarrow dx = 2tdt$$

.....0.5p

Obţinem

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t \cdot 2tdt = \int (e^t)'2tdt = 2te^t - 2\int e^t dt = 2e^t(t-1) + \mathcal{C} = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + \mathcal{C}.$$

.....1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iunie 2025
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1; \quad m_1 = 1 \Rightarrow m_2 = -1$..... 0.5p

Ecuaţia diagonalei $d_2 : y - 1 = -1(x - 3) \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$ 0.5p

b) $m_1 = 1 \Rightarrow$ unghiul dintre Ox şi diagonala d_1 este $45°$. Laturile pătratului formează tot $45°$ grade cu diagonalele, deci două laturi ale pătratului sunt paralele cu axa Ox, celelalte două sunt perpendiculare pe Ox. Astfel, unghiurile dintre laturile pătratului şi axa Ox sunt de $0°$, respectiv $90°$. 0.5p

c) $AD||Ox \Rightarrow AD : y = 1; AB \perp Ox \Rightarrow AB : x = 3$ 0.5p

$B, C \in d_1 : y = x \Rightarrow B(3, 3), D(1, 1)$ 0.5p

$BC : y = 3, CD : x = 1 \Rightarrow C(1, 3).$ 0.5p

2. a) Coordonatele focarelor sunt $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ şi $F_2(\sqrt{3}, 0)$ 1p

b) Segmentul $[F_1F_2]$ este diametrul unui cerc $\mathcal{C}$ de centru $O(0, 0)$ şi rază $\sqrt{3}$, deci ecuaţia cerută este

$$x^2 + y^2 = 3.$$

..... 0.5p

c) $\widehat{F_1MF_2}$ este drept dacă şi numai dacă M se află pe cercul $\mathcal{C}$ şi este diferit de F_1, F_2. ..... 0.5p

Prin urmare, coordonatele punctului $M(x, y)$ satisfac simultan

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 3$$

de unde se află

$$M \in \left\{ \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}.$$

..... 1p

3. a) un vector director a dreptei d este $\vec{d} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1).$

Vectorul $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2) = 2 \cdot \vec{d} \Rightarrow AB \parallel d.$ 1p

b) $\vec{d}(-1, 0, 1) \perp \alpha, A(1, 2, 3) \in \alpha \Rightarrow \alpha : -1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha : x - z + 2 = 0$ 1p

c) Fie $\{A'\} = \alpha \cap d$:

$$A' : \begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow A'(-2, -1, 0)$$

..... 0.5p

Punctul A' este proiecția punctului A pe dreapta d, și astfel este mijlocul segmentului $[AA'']$, unde A'' este simetricul lui A față de dreapta d. Astfel

$$A'' : \begin{cases} x_{A''} = 2x_{A'} - x_A = -5 \\ y_{A''} = 2y_{A'} - y_A = -4 \\ z_{A''} = 2z_{A'} - z_A = -3. \end{cases} \Rightarrow A''(-5, -4, -3).$$

. . . . . 0.5p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.