

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 június
Matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

1. **(2 pont)** A komplex számok $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ testében adjunk példát:
 - i) $(\mathbb{C}, \cdot)$ egy olyan zárt részhalmazára, mely nem csoport az indukált művelettel;
 - ii) egy olyan részgyűrűre, amelyik nem résztest.Indokoljuk meg a válaszokat.
2. **(2 pont)** Legyen $\overline{abcd}$ egy 45-el osztható 4 jegyű szám.
 - a) Határozzuk meg $a + b + c$ lehetséges értékeinek halmazát.
 - b) Határozzuk meg $b + c$ lehetséges értékeinek számát. Indoklás.
3. **(5 pont)** Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ úgy, hogy $f(x, y, z) = (x + ay + z, ax + y, x + ay)$, ahol a egy valós paraméter.
 - a) Igazoljuk, hogy f egy valós lineáris függvény.
 - b) Határozzuk meg f mátrixát a kanonikus bázisra nézve.
 - c) Milyen $a \in \mathbb{R}$ értékekre lesz f valós lineáris izomorfizmus?

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határértéket, ahol

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{(n^2 + 1)(n^2 + 4) \dots (2n^2)}.$$

2. **(2 pont)** Tanulmányozzuk a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a + n^2}{a^n}$$

sor természetét az $a > 0$ valós paraméter szerint.

3. **(2 pont)** Adjuk meg az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$$

függvény $a = 0$ pontban felírt $2n$ -ed rendű Taylor-féle polinomját.

4. **(2 pont)** Az $x > 0$ esetén számítsuk ki:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx.$$

III. TÉTEL. Geometria

1. **(3 pont)** Egy $ABCD$ négyzet egyik csúcsa az $A(3, 1)$ pontban található és az egyik átlója a $d: y - x = 0$ egyenesen helyezkedik el.
 - a) Írd fel a négyzet másik átlójának egyenletét.
 - b) Milyen szöget zárnak be négyzet oldalai az Ox tengellyel?
 - c) Írd fel a négyzet oldalainak egyenleteit.
2. **(3 pont)** Adott az $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ egyenletű ellipszis.
 - a) Határozzuk meg az ellipszis F_1 és F_2 fókuszpontjainak koordinátáit.
 - b) Írjuk fel az $[F_1F_2]$ átmérőjű kör egyenletét.
 - c) Határozzuk meg az ellipszis azon M pontját, amelyre az $\widehat{F_1MF_2}$ szög derékszög.
3. **(3 puncte)** Adottak az $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ pontok és a d egyenes:

$$d: \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$

- a) Igazoljuk, hogy az AB és d egyenesek párhuzamosak.
- b) Írjuk fel az A ponton áthaladó és d egyenesre merőleges sík egyenletét.
- c) Határozzuk meg az A pont szimmetrikusát a d egyenesre nézve.

MEGJEGYZÉSEK:

Minden tétel kötelező. A tételekre teljesen kidolgozott megoldást kell adni.
Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A minimális átmenőjegy 5,00.
Munkaidő 3 óra.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 június
Matematika szak
Javítókulcs

I. TÉTEL. Algebra

- Hivatalból 1p
1. i) Például $\mathbb{Z}$ zárt részhalmaz $(\mathbb{C}, \cdot)$ -ben, de nem részcsoporth mert 2 nem invertálható $\mathbb{Z}$ -ben a szorzásra nézve 1p
 ii) Például $\mathbb{Z}$ részgyűrű a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ testben, de nem résztest, mert $2 \in \mathbb{Z}^*$ nem invertálható $\mathbb{Z}$ -ben a szorzásra nézve 1p
 2. a) $45 = 5 \cdot 9$ és mivel $(5, 9) = 1$, $45 \mid \overline{abcd}$ pontosan akkor ha $5 \mid \overline{abcd}$ és $9 \mid \overline{abcd}$
 Innen, $d \in \{0, 5\}$ és $9 \mid a + b + c + d$ 0.5p
 Mivel $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ és $b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $b + c \in \mathbb{N}$ legtöbb 18 lehet, míg $a + b + c \in \mathbb{N}^*$ legtöbb 27 lehet.
 Ha $d = 0$, $a + b + c \in \{9, 18, 27\}$, és ha $d = 5$, $a + b + c + 5 \in \{9, 18, 27\}$,
 tehát $a + b + c \in \{4, 9, 13, 18, 22, 27\}$ 0.5p
 b) $b + c$ minden természetes értéket felvehet 0-tól 18-ig, tehát 19 darab értéket vehet fel 1p
 Ha $b + c \in \{0, 18\}$, akkor vehető $a = 4$, $d = 5$.
 Ha $b + c \in \{1, \dots, 8\}$, akkor vehető $a = 9 - (b + c)$ (ami nem nulla) és $d = 0$.
 Ha $b + c \in \{9, \dots, 17\}$, akkor vehető $a = 18 - (b + c)$ (ami nem nulla) és $d = 0$.
 3. a) Annak igazolása, hogy $f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x, y, z) + f(x', y', z')$, $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ 1p
 Annak igazolása, hogy $f(\alpha(x, y, z)) = \alpha f(x, y, z)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 1p
 vagy, *alternatív módon*, annak igazolása, hogy
 $f(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) = \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z')$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ 2p
 b) $f(1, 0, 0) = (1, a, 1)$, $f(0, 1, 0) = (a, 1, a)$, $f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$, 1p
 ahonnan, f mátrixa a kanonikus bázisra nézve $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ 1p
 c) f valós lineáris izomorfizmus $\Leftrightarrow A$ invertálható $M_3(\mathbb{R})$ -ben $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ 0.5p
 Mivel $\det A = a^2 - 1$, következik, hogy f valós lineáris izomorfizmus pontosan ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ 0.5p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 június
Matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból 1p

1. Mivel

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^2} \frac{n^2+2^2}{n^2} \cdots \frac{n^2+n^2}{n^2}} = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) \cdots \left(1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)},$$

..... 0.50p

ezért

$$\ln a_n = \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(1 + \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right) + \ln \left(1 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 \right) + \dots + \ln \left(1 + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right) \right\}.$$

..... 0.50p

Tekintsük az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x^2)$ függvényt.

..... 0.25p

Mivel f folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, ezért használhatjuk a következő tulajdonságot:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right\} = \int_0^1 f(x) dx.$$

..... 0.25p

Következésképp

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx.$$

..... 0.50p

A parciális integrálás képlete alapján

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= x \ln(1 + x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{1 + x^2} dx = \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = \\ &= \ln 2 - 2 \left(x - \arctg x \right) \Big|_0^1 = \ln 2 - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2. \end{aligned}$$

..... 0.75p

Következésképp $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2}$.

..... 0.25p

2. Az adott sor pozitív tagú. Jelölje

$$x_n = \frac{a + n^2}{a^n}$$

a sor általános tagját.

..... 0.25p

A hányados kritérium következményének alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + (n+1)^2}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{a + n^2} = \frac{1}{a}.$$

..... 0.50p

Ekkor

- $a > 1$ esetén a $\sum_{n \geq 1} x_n$ sor konvergens,
- $a < 1$ esetén a $\sum_{n \geq 1} x_n$ sor divergens.

..... 0.50p

Az $a = 1$ esetén a sor általános tagja:

$$x_n = 1 + n^2.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2) = +\infty$, ezért a $\sum_{n \geq 1} x_n$ sor divergens.

..... 0.50p

Következésképp a $\sum_{n \geq 1} x_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $a > 1$.

..... 0.25p

3. Az f függvényhez és az $a = 0$ ponthoz rendelt $2n$ -ed rendű Taylor-féle polinom a következő függvény:

$$T_{2n;0}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_{2n;0}f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

..... 0.25p

Az f függvény végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon, mint elemi függvények összetett függvénye.

..... 0.25p

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén meghatározzuk az f függvény deriváltjait:

$$f'(x) = 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \left(-\sin \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \sin x.$$

..... 0.25p

Indukcióval igazolható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \sin \left(x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right).$$

..... 0.75p

Innen $x = 0$ esetén kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(0) = -\frac{1}{2} \sin \left((n-1) \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2t + 1 \\ -\frac{1}{2} (-1)^{t-1}, & \text{ha } n = 2t. \end{cases}$$

..... 0.25p

Következésképp

$$T_{2n;0}f(x) = 1 + 0 + \sum_{k=1}^n -\frac{1}{2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right).$$

..... 0.25p

4. A

$$\sqrt{x} = t$$

változócsereét használjuk.

..... 0.50p

Ekkor

$$x = t^2 \implies dx = 2t dt.$$

..... 0.50p

Innen kapjuk parciális integrálással, hogy

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t \cdot 2t dt = \int (e^t)' \cdot 2t dt = 2te^t - 2 \int e^t dt = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$$

..... 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2025 június
Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$; $m_1 = 1 \Rightarrow m_2 = -1$ 0.5p

A másik átló egyenlete $d_2 : y - 1 = -1(x - 3) \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$ 0.5p

b) $m_1 = 1 \Rightarrow$ az Ox tengely és a d_1 átló által bezárt szög 45° . A négyzet átlói szintén 45 fokos szöget zárnak be az átlókkal, tehát a négyzet két oldala párhuzamos az Ox tengellyel, a másik kettő pedig merőleges az Ox tengelyre. Tehát az oldalak és az Ox tengely szöge 0° illetve 90° 0.5p

c) $AD \parallel Ox \Rightarrow AD : y = 1$; $AB \perp Ox \Rightarrow AB : x = 3$ 0.5p

$B, C \in d_1 : y = x \Rightarrow B(3, 3), D(1, 1)$ 0.5p

$BC : y = 3, CD : x = 1 \Rightarrow C(1, 3)$ 0.5p

2. a) A fókuszpontok koordinátái $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ și $F_2(\sqrt{3}, 0)$ 1p

b) Az $[F_1F_2]$ átmérőjű $\mathcal{C}$ kör középpontja $O(0, 0)$ és sugara $\sqrt{3}$, tehát a kör egyenlete

$$x^2 + y^2 = 3.$$

..... 0.5p

c) $\widehat{F_1MF_2}$ akkor és csakis akkor derékszög, ha az M pont rajta van a $\mathcal{C}$ körön és különbözik az F_1, F_2 pontoktól. 0.5p

Tehát az $M(x, y)$ pont koordinátái egyszerre teljesítik az alábbi egyenleteket

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 3$$

ahonnan

$$M \in \left\{ \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}.$$

..... 1p

3. a) A d egyenes egy irányvektora $\vec{d} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$.

$\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2) = 2 \cdot \vec{d} \Rightarrow AB \parallel d$ 1p

b) $\vec{d}(-1, 0, 1) \perp \alpha, A(1, 2, 3) \in \alpha \Rightarrow \alpha : -1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha : x - z + 2 = 0$ 1p

c) Legyen $\{A'\} = \alpha \cap d$:

$$A' : \begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow A'(-2, -1, 0)$$

..... 0.5p

Az A' pont így az A pont vetülete a d egyenesre, és ezáltal felezőpontja $[AA'']$ szakasznak, ahol A'' pont az A szimmetrikusa a d egyenesre nézve. Így

$$A'' : \begin{cases} x_{A''} = 2x_{A'} - x_A = -5 \\ y_{A''} = 2y_{A'} - y_A = -4 \\ z_{A''} = 2z_{A'} - z_A = -3. \end{cases} \Rightarrow A''(-5, -4, -3).$$

..... 0.5p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.