Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 szeptember
Matematika szak

I TÉTEL. Algebra

1. **(7 pont)** Legyen $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   a) Igazoljuk, hogy V résztere az $M_2(\mathbb{R})$ valós vektortérnek.

   b) Legyen
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Igazoljuk, hogy $V = \langle A, B, C \rangle$ és határozzuk meg a V valós vektortér dimenzióját.

   c) Igzoljuk, hogy az
   $$f : V \to \mathbb{R}, \; f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = a$$
   függvény szürjektív csoportmorfizmus $(V, +)$-ból $(\mathbb{R}, +)$-ba.

2. **(2 pont)** Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $6n - 1$ és $10n - 1$ relatív prímek, majd határozzuk meg a legkisebb közös többszörösüket.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(2 pont)** Határozzuk meg az $(x_n)_{n\geq 2}$ valós számsorozat határértékét, amelynek általános tagja
$$x_n = \frac{\ln 2^2 + \ln 3^3 + \ldots + \ln n^n}{n^2}, \quad \forall n \geq 2.$$

2. **(2 pont)** Az $a > 0$ valós paraméter függvényében tanulmányozzuk a következő pozitív tagú valós számsor természetét:
$$\sum_{n\geq 1} a^n \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

3. **(2 pont)** Írjuk fel az
$$f : (2, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x - 2}$$
függvény n-edrendű Taylor-féle polinomját az $a = 3$ pontban!

4. **(3 pont)** Számítsuk ki az
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(e^x(\sin x + \cos x)\right) \ln\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right) dx$$
határozott integrált!

III. TÉTEL. Geometria

1. **(2 pont)** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenleteit, amely áthalad az $M(-1,1,-2)$ ponton és merőleges az $A(1,-1,1)$, $B(-2,1,3)$ és $C(4,-5,-2)$ pontok által meghatározott síkra.

2. **(3 pont)** Igazoljuk, hogy a

$$d_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \text{ és } d_2 : \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$$

egyenletekkel megadott egyenesek párhuzamosak egymással és számítsuk ki a $P_1(-2,1,0)$ pont d_2 egyenestől vett távolságát.

3. **(2 pont)** Adott az $x^2-4y^2=16$ hiperbola.

   a) Határozzuk meg a hiperbola fókuszpontjai közti távolságot.

   b) Írjuk fel a hiperbola aszimptotáinak egyenleteit.

4. **(2 pont)** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az Ox tengelyen található valamint áthalad az $A(1,6)$ és $B(4,-3)$ pontokon.

MEGJEGYZÉS.

Minden tétel kötelező. Minden feladathoz teljes megoldás megadása szükséges.
Minden tétel esetén jár **1 pont** hivatalból. A legkisebb átmenő jegy 5,00.
A munkaidő 3 óra.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

I TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. a) A részterek jellemzési tételét alkalmazzuk:

$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$ 0.5p

Ha $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix} \in V$ 1p

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ és $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ 0 & \alpha \cdot a \end{pmatrix} \in V$ 1p

b) $V = \langle A, B, C \rangle \Leftrightarrow \forall X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \ X = \alpha A + \beta B + \gamma C \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \beta - \gamma = b \end{cases}$ 1p

Az (S) rendszer kompatibilis $\left(\text{határozatlan, } \begin{cases} \alpha = a - b - 2\gamma \\ \beta = b + \gamma \end{cases} \right)$, ami garantálja az $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárok létezését, lezárva ezáltal annak bizonyítását, hogy $V = \langle A, B, C \rangle$ 0.5p

A $\dim_{\mathbb{R}} V$ dimenzió meghatározása, pontosabban

1. Módszer:
Észrevesszük, hogy $B + C = 2A$, ahonnan A, B, C lineárisan függő, tehát $\dim_{\mathbb{R}} V \leq 2$ 0.5p
Ellenőrizzük, hogy A és B lineárisan függetlenek, tehát $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ 0.5p

2. Módszer:
Az $\alpha A + \beta B + \gamma C = O_2$ egyenlőség az $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$ lineáris homogén egyenletrendszerhez vezet, amelyik kompatibilis határozatlan. Mivel van nem triviális megoldás, azt jelenti, hogy léteznek α, β, γ nem mind nullák úgy, hogy $\alpha A + \beta B + \gamma C = O_2$, vagyis A, B, C lineárisan függő, tehát $\dim_{\mathbb{R}} V \leq 2$ 0.5p
Igazoljuk, hogy az A, B, C vektorok közül kettő lineárisan független, tehát $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ 0.5p

c) f csoportmorfizmus, hiszen ha $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor 1p

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \right) = f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix} \right) = a + a' = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \right)$

f szürjektív, ... 1p

hiszen ha $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik például $X = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ úgy, hogy $f(X) = y$

2. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges és $d \in \mathbb{N}$ a $6n-1$ és $10n-1$ egy közös osztója, vagyis $\begin{cases} d \mid 6n-1 \\ d \mid 10n-1 \end{cases}$.

Akkor
$\begin{cases} d \mid 5(6n-1) \\ d \mid 3(10n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \mid 30n-5 \\ d \mid 30n-3 \end{cases} \Rightarrow d \mid 2[= (30n-3) - (30n-5)] \Rightarrow d = 1$ vagy $d = 2$ 1p

Mivel $6n-1$ páratlan (ahogy amúgy $10n-1$ is), d nem lehet 2.
Tehát $d = 1$, vagyis $(6n-1, 10n-1) = 1$ 0.5p

$(6n-1, 10n-1)[6n-1, 10n-1] = (6n-1)(10n-1) \Rightarrow [6n-1, 10n-1] = (6n-1)(10n-1)$ 0.5p

MEGJEGYZÉS: Minden más megoldás megfelelően pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból .... (1p)

1. Alkalmazzuk a Cesàro-Stolz–tételt az $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ alakú általános tagú sorozatra, ahol

$$a_n = \ln 2^2 + \ln 3^3 + \ldots + \ln n^n, \qquad b_n = n^2, \quad \forall n \geq 2,$$

mert

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

.... (0,5p)

Ellenőrizzük a határérték létezését

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} \cdot \ln(n+1) = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty.$$

.... (1p)

Tehát a tétel szerint

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \infty.$$

.... (0,5p)

2. A gyökkritériumot fogjuk alkalmazni:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2a.$$

.... (0,5p)

- Ha $\ell = 2a < 1$, vagyis $a < \frac{1}{2}$, akkor a sor konvergens; .... (0,5p)
- ha $\ell = 2a > 1$, vagyis $a > \frac{1}{2}$, akkor a sor divergens; .... (0,5p)
- ha $\ell = 2a = 1$, vagyis $a = \frac{1}{2}$, akkor a sor általános tagja nem tart 0-hoz:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0,$$

ezért a sor divergens. .... (0,5p)

3. Az $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-szer deriválható függvény n-edrendű Taylor-féle polinomja az $a \in I$ pontban a $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

polinomfüggvény. .... (0,5p)

Jelen feladat esetén $I = (2, \infty)$ és $a = 3$.

Az f függvény elsőrendű deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}},$$

míg a függvény másodrendű deriváltja

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-\frac{3}{2}}.$$

. . . . (0,5p)

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \geq 2$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot (2n-3)!!(x-2)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

. . . . (0,5p)

Megjegyezzük, hogy

$$f(3) = 1, \quad f'(3) = \frac{1}{2},$$

míg

$$\begin{aligned} T_{n,3}f(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \cdot (2k-3)!!(x-3)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

. . . . (0,5p)

4. Észrevesszük, hogy $(e^x \sin x)' = e^x(\sin x + \cos x)$ . . . . (1,0p)

A parciális integrálás képletét alkalmazva

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x(\sin x + \cos x) \ln\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (e^x \sin x)' \ln\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) dx = \\ &= e^x \sin x \ln\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \sin x \cdot \frac{\sin x}{1-\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \end{aligned}$$

. . . . (1,0p)

Kapjuk, hogy a határozott integrál értéke:

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \, dx = e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) - e^x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \\ &= e^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) - 1\right) + e^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

. . . . (1,0p)

MEGJEGYZÉS: Minden eltérő helyes megoldás arányosan pontozódik.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 szeptember
Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. Az ABC sík egyenlete: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6z - 11 = 0$, ahonnan $\vec{N}(2, -3, 6)$ [vagy $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$] 1p

Az ABC síkra merőleges egyenes egyenlete: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{x+2}{6}$ 1p

2. a) A d_2 egyenes egy irányvektora $\vec{d_2}(p_2, q_2, r_2)$, ahol $p_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -6$, $q_2 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 4$, $r_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $\vec{d_2} = -2 \cdot \vec{d_1} \Rightarrow \vec{d_1}$ és $\vec{d_2}$ kollineárisak 1p

b) A d_2 egyenes egy pontja $P_2(4, -4, 0)$. $P_1(-2, 1, 0) \in d_1$, $\overrightarrow{P_1P_2}(6, -5, 0)$ 1p

c) $d(P_1, d_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{d_2}||}{||\vec{d_2}||} = \sqrt{5}$ 1p

Megjegyzés. Egy másik lehetséges megoldás:

a) és b) mint az előbb

c) A P_1 pont Q vetülete a d_2 egyenesre: $Q(-2, 0, -2)$, $d(P_1, d_2) = d(P_1, Q) = \sqrt{5}$ 1p

3. A hiperbola egyenlet felírható az $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ alakba, ahonnan $a = 4$, $b = 2$ 0.5p

a) $c^2 = a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow FF' = 2c = 4\sqrt{5}$ 0.5p

b) Az aszimptoták egyenletei: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$. 1p

4. **1. Módszer.** A kör középpontja $M_0(t, 0)$ 0.5p

$r = |M_0A| = |M_0B| \Leftrightarrow r^2 = (t-1)^2 + 36 = (t-4)^2 + 9$ 0.5p

$t = -2$, $M_0(-2, 0)$ és $r^2 = 45$. A kör egyenlete: $(x+2)^2 + y^2 = 45$ 1p

2. Módszer A kör középpontja rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén. Az AB szakasz felezőpontja $P(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$, iránytényezője $m_d = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Az oldalfelező merőleges egyenlete $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}(x - \frac{5}{2}) \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0$. 1p

A kör középpontja $\{M\} = Ox \cap d$, tehát $M(-2, 0)$. A sugara $r = |MA| = \sqrt{45}$, a kör egyenlete $(x+2)^2 + y^2 = 45$ 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.