Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika Informatika Kar

LICENSZVIZSGA

Matematika

Szóbeli, 2021

Az alap- és szakismeretek felmérése szóbeli vizsga keretében történik. Ez három feladatból áll a következő bontásban:

- egy algebratétel,
- egy analízistétel,
- egy mértantétel.

Gondolkodási idő a 3 feladatra összesen 20 perc.

A megoldások bemutatási ideje összesen 10 perc.

A pontozás menete:

- egy jegy (1–10 ig) minden tételre (ahol 1 pont hivatalból jár);
- a végső jegy a 3 tételre adott jegy számtani középarányosa.

Megj. *Mindegyik tétel esetében külön pontozzuk a helyes választ és külön az indoklást.*

1 Változat (minta)

1. Legyen $R = \{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Résztest-e R a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ testben? Indoklás.

2. Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^k$ határértéket.

3. Tekintjük az $ABCD$ tetraédert $A(3, 4, 2)$, $B(5, 14, 4)$, $C(-3, -4, 0)$ illetve $D(1, -4, -1)$ csúcsokkal. Ha G a BCD háromszög súlypontja, írjuk fel az AG egyenes egyenletét és határozzuk meg az AG egyenes és (BCD) sík által bezárt szöget.

2 Változat (minta)

1. Határozzuk meg az $a \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy a $v_1 = (a, 1, 1)$, $v_2 = (1, a, 1)$, $v_3 = (1, 1, a)$ vektorok bázist alkossanak az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben. Adjuk meg az $(1, 1, 1)$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.
2. Számoljuk ki:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

3. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 4)$, $M_3(5, -1)$. Határozzuk meg a háromszög oldalegyeneseinek egyenleteit.

Megoldások

1 Változat

1. A résztestek jellemzési tételét alkalmazzuk:
a) Mivel $0 = 0 + 0i\sqrt{3}$, $1 = 1 + 0i\sqrt{3}$ és $0, 1 \in \mathbb{Q}$, következik, hogy $0, 1 \in R$.
b) Igazoljuk, hogy $x, y \in R \Rightarrow x - y, xy \in R$.
c) Legyen $0 \neq x = a + bi\sqrt{3} \in R$. Ekkor $x^{-1} = \frac{1}{a+bi\sqrt{3}} = \frac{a-bi\sqrt{3}}{a^2+3b^2} = \frac{a}{a^2+3b^2} - \frac{b}{a^2+3b^2}i\sqrt{3} \in R$, hiszen $\frac{a}{a^2+3b^2}, \frac{b}{a^2+3b^2} \in \mathbb{Q}$.
Tehát R résztest $\mathbb{C}$-ben.

2. Legyen

$$a_n := \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Innen $a_n = \sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, ahol $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln(1+x)$,

$$\Delta^n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1\right) \in \mathrm{Div}\,[0,1], \quad \xi^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1\right) \in \mathrm{Pi}\,(\Delta^n).$$

Mivel $\|\Delta^n\| \to 0$, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

3. A G pont koordinátái $G(1,2,1)$. Így az AG egyenes egyenlete

$$AG : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

Meghatározzuk a (BCD) sík egyenletét:

$$(BCD) : \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z+1 \\ 4 & 18 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(BCD) : 18(x-1) - 24(y+4) + 72(z+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(BCD) : 3x - 4y + 12z - 7 = 0.$$

Így a sík normálvektora $\vec{N}(3,-4,12)$. Az AG egyenes irányvektora $\vec{d}(2,2,1)$. Tehát,

$$\sin(\widehat{AG, (BCD)}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{N}}{||\vec{d}||\cdot||\vec{N}||} = \frac{|6-8+12|}{3\cdot 13} = \frac{10}{39}.$$

2 Változat

1. A v_1, v_2, v_3 vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben $\Leftrightarrow$ a kanonikus bázisbeli koordinátaoszlopaik determinánsa Δ nem nulla

Mivel $\Delta = (a+2)(a-1)^2$ következik, hogy a v_1, v_2, v_3 vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben $\Leftrightarrow$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Meghatározzuk $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ skalárokat úgy, hogy $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = v$. Innen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{a+2}.$$

2. A Cesàro-Stolz lemma alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) = 2.$$

3. **1 Megoldás** Legyen ABC a keresett háromszög úgy, hogy M_1 a BC, M_2 a CA, M_3 az AB oldal felezőpontja. A középvonal-tétel alapján:

- az AB irányvektora $\overrightarrow{M_1M_2}(2, 2)$;
- a BC irányvektora $\overrightarrow{M_2M_3}(2, -5)$;
- a CA irányvektora $\overrightarrow{M_3M_1}(4, -3)$.

A fentiek alapján,

- az AB egyenes átmegy az M_3 ponton és párhuzamos az $\overrightarrow{M_1M_2}(2, 2)$ vektorral, tehát az egyenlete
$$AB: \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{2}$$
vagyis
$$AB: x - y - 6 = 0.$$
- a BC egyenes átmegy az M_1 ponton és párhuzamos az $\overrightarrow{M_2M_3}(2, -5)$ vektorral, tehát az egyenlete
$$BC: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-5}$$
vagyis
$$BC: 5x + 2y - 9 = 0.$$
- a CA egyenes átmegy az M_2 ponton és párhuzamos az $\overrightarrow{M_3M_1}(4, -3)$ vektorral, tehát az egyenlete
$$CA: \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{-3}$$
vagyis
$$CA: 3x + 4y - 25 = 0.$$

2 Megoldás A felezőpontok koordinátái alapján meghatározzuk a csúcsok koordinátáit, majd felírjuk az oldalegyenesek egyenleteit 2 adott ponton átmenő egyenesek egyenleteiként.