

## A TANTÁRGY ADATLAPJA

### Görbék és felületek geometriája

Egyetemi tanév: 2025-2026

#### 1. A képzési program adatai

|                                     |                                          |
|-------------------------------------|------------------------------------------|
| 1.1. Felsőoktatási intézmény        | Babeş-Bolyai Tudományegyetem             |
| 1.2. Kar                            | Matematika és Informatika                |
| 1.3. Intézet                        | Magyar Matematika és Informatika         |
| 1.4. Szakterület                    | Matematika                               |
| 1.5. Képzési szint                  | Alap                                     |
| 1.6. Tanulmányi program / Képesítés | Informatikai Matematika (magyar nyelven) |
| 1.7. Képzési forma                  | Nappali                                  |

#### 2. A tantárgy adatai

|                                          |   |                                                                                                    |                                            |                      |   |                      |           |
|------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------|---|----------------------|-----------|
| 2.1. A tantárgy neve                     |   | Geometria curbelor și suprafețelor/Görbék és felületek geometriája/Geometry of Curves and Surfaces |                                            |                      |   | A tantárgy kódja     | MLM0079   |
| 2.2. Az előadásért felelős tanár neve    |   |                                                                                                    | Dr. Mezei Ildikó Ilona, egyetemi adjunktus |                      |   |                      |           |
| 2.3. A szemináriumért felelős tanár neve |   |                                                                                                    | Dr. Mezei Ildikó Ilona, egyetemi adjunktus |                      |   |                      |           |
| 2.4. Tanulmányi év                       | 2 | 2.5. Félév                                                                                         | 3                                          | 2.6. Értékelés módja | V | 2.7. Tantárgy típusa | Szaktárgy |

#### 3. Teljes becsült idő (az oktatási tevékenység féléves óraszám)

|                                                                                                                                                                                    |    |                      |    |                               |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----------------------|----|-------------------------------|------------|
| 3.1. Heti óraszám                                                                                                                                                                  | 4  | melyből: 3.2 előadás | 2  | 3.3 szeminárium/labor/projekt | 2          |
| 3.4. Tantervben szereplő összórászám                                                                                                                                               | 56 | melyből: 3.5 előadás | 28 | 3.6 szeminárium/labor         | 28         |
| <b>Az egyéni tanulmányi idő (ET) és az önképzési tevékenységekre (ÖT) szánt idő elosztása:</b>                                                                                     |    |                      |    |                               | <b>óra</b> |
| A tankönyv, a jegyzet, a szakirodalom vagy saját jegyzetek tanulmányozása                                                                                                          |    |                      |    |                               | 15         |
| Könyvtárban, elektronikus adatbázisokban vagy terepen való további tájékozódás                                                                                                     |    |                      |    |                               | 10         |
| Szemináriumok / laborok, házi feladatok, portfóliók, referátumok, esszék kidolgozása (nagyobb vagy egyenlő a tantárgy naptárában az ellenőrzési feladatokra előírt összórászámmal) |    |                      |    |                               | 15         |
| Egyéni készségfejlesztés (tutorálás)                                                                                                                                               |    |                      |    |                               | 10         |
| Vizsgák                                                                                                                                                                            |    |                      |    |                               | 10         |
| Más tevékenységek: leadott házi feladatok javítása                                                                                                                                 |    |                      |    |                               | 9          |
| <b>3.7. Egyéni tanulmányi idő (ET) és önképzési tevékenységekre (ÖT) szánt idő összórászám</b>                                                                                     |    |                      |    |                               | <b>69</b>  |
| <b>3.8. A félév összórászám</b>                                                                                                                                                    |    |                      |    |                               | <b>125</b> |
| <b>3.9. Kreditszám</b>                                                                                                                                                             |    |                      |    |                               | <b>5</b>   |

#### 4. Előfeltételek (ha vannak)

|                      |                                                                                                        |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.1. Tantervi        | Analitikus mértan                                                                                      |
| 4.2. Kompetenciabeli | Vektorszámítás, analitikus geometria, egy és többváltozós matematikai analízis, differenciálegyenletek |

#### 5. Feltételek (ha vannak)

|                                                        |                                                      |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 5.1. Az előadás lebonyolításának feltételei            | Táblával és videoprojektorral felszerelt előadóterem |
| 5.2. A szeminárium / labor lebonyolításának feltételei | Táblával és videoprojektorral felszerelt terem       |

## 6. Elsajátítandó jellemző kompetenciák<sup>1</sup>

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Szakmai/kulcs-kompetenciák  | <p>C1.1 Fogalmak azonosítása, elméletek leírása és a szaknyelv használata</p> <p>C1.2 A matematikai fogalmak helyes magyarázata és értelmezése a szaknyelv felhasználásával</p> <p>C1.3 A módszerek és elvek helyes alkalmazása a matematikafeladatok megoldásában</p> <p>C1.4. Főbb matematikai problémátípusok felismerése és a megoldásukhoz szükséges módszerek, technikák kiválasztása.</p> <p>C2.3 A megfelelő elméleti módszerek alkalmazása a problémák elemzésénél</p> <p>C2.4 Előzetesen létező adatokat feldolgozó feladatmegoldásból származó adatok összehasonlító elemzése</p> <p>C2.5 Projektek, dolgozatok kidolgozása és bemutatása az adatelemzés eredményeire vonatkozóan</p> <p>C3.5.Feladatok algoritmikus megoldására vonatkozó projektek elkészítése</p> <p>C 5.1 A matematikai bizonyítások megfelelő fogalmainak, módszereinek és technikáinak azonosítása</p> <p>C 5.2 Matematikai gondolatmenetek alkalmazása matematikai eredmények bizonyítására</p> <p>C 5.3 Matematikai eredmények igazolására vonatkozó érvelések logikus felépítése és kifejtése, a feltételek és a következtetések világos azonosításával</p> <p>C 5.4 Különböző bizonyítási módszerek hatékony alkalmazása és komparatív elemzéseA görbék és felületek alaptételeinek ismerete és megfelelő használata.</p> |
| Transzverzális kompetenciák | <p>CT1 A szervezett és hatékony munka szabályainak, a didaktikai-tudományos területhez való felelősségteljes hozzáállás alkalmazása a saját potenciál kreatív értékesítéséhez, a szakmai etika alapelveinek és normáinak tiszteletben tartásával</p> <p>CT3 Hatékony módszerek és technikák használata tanulásra, információszerzésre, kutatásra és a tudásszerzési kapacitások fejlesztésére, egy dinamikus társadalom igényeinek való megfelelésre, román és egy nemzetközi nyelven történő kommunikációra</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

## 7. A tantárgy célkitűzései (az elsajátítandó jellemző kompetenciák alapján)

|                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7.1 A tantárgy általános célkitűzése | <ul style="list-style-type: none"> <li>számolási készségek, kreatív gondolkodás fejlesztése</li> <li>a térbenlátás fejlesztése</li> <li>feladatmegoldói, matematikai szövegértési készségek, jártasságok fejlesztése</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 7.2 A tantárgy sajátos célkitűzései  | <p>Az előadások és szemináriumok végére a diákok:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>meg tudnak oldani differenciálegyenleteket egy görbe illetve felületcsalád egyenleteinek meghatározása érdekében</li> <li>meg tudják határozni egy görbe érintőjének, normalsíkjának az egyenletét, a Frenet-féle triéder elemeit</li> <li>fel tudják írni a Frenet-féle képleteket és alkalmazni tudják a görbék lokális geometriájának vizsgálatában</li> <li>ki tudják számítani egy görbe görbületét, torzióját</li> <li>fel tudják írni egy felület első és második alapformáját,</li> <li>szögeket, távolságokat határoznak meg a felületen</li> <li>ki tudják számítani egy felület különböző görbületeit</li> </ul> |

<sup>1</sup> Választhat kompetenciák vagy tanulási eredmények között, illetve választhatja mindkettőt is. Amennyiben csak az egyik lehetőséget választja, a másik lehetőséget el kell távolítani a táblázatból, és a kiválasztott lehetőség a 6. számot kapja.

## 8. A tantárgy tartalma

| 8.1 Előadás                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Didaktikai módszerek                                    | Megjegyzések |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------|
| 1. Görbék értelmezése, természetes paraméterezés                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 2. Érintő, normálsík, általános helyzetű görbék, simulósík, Frenet-féle triéder                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 3. Vektormezők egy görbe mentén, a Frenet-féle koordináta-rendszer. A Frenet-féle képletek                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 4. Görbe görbülete és torziója, a görbület és torzió mértani jelentése                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 5. Egy térgörbe simulóköre és simulógömbje                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 6. Síkgörbecsalád burkolója, a síkgörbe evolútája, síkgörbe evolvense                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Előadás, számítógépes szemléltetés, magyarázat          |              |
| 7. Az izoperimetrikus egyenlőtlenség, sík és térgörbék elméletének alaptétele, természetes egyenlet                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 8. Felületek értelmezése, példák                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Előadás, számítógépes szemléltetés                      |              |
| 9. koordináta-görbék rendszere, érintősík, normális                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 10. A felületek első alapformája. Felületen elhelyezkedő görbeív hossza, a felületen elhelyezkedő két görbe szöge, felületrész területe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 11. Felületek második alapformája, normálgörbület                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 12. Felület főgörbületei, közép és összgörbület, Teorema Egregium                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 13. Geodetikus vonalak egy felületen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Előadás, magyarázat                                     |              |
| 14. Minimálfelületek és állandó összgörbületű felületek                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Előadás, számítógépes szemléltetés                      |              |
| <p>Könyvészet</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mezei I.I, Varga Cs, Görbék és felületek, Ábel Kiadó, 2011.</li> <li>2. Blaga A. P., Lectures on Classical Differential Geometry, Editura RISOPRINT, Cluj-Napoca, 2005</li> <li>3. Enghiş P, Țarină M., Curs de Geometrie Diferențială, Cluj-Napoca, 1985</li> <li>4. Murgulescu E., col., Geometrie analitică si diferențială, Editura Didactică si Pedagogică, București, 1965.</li> <li>5. Murgulescu E., col., Geometrie analitică in spațiu si geometrie diferențială, Culegere de probleme, vol. 2 Ed.Didactică si Pedagogică, București.</li> <li>6. Pintea C., Geometrie, Presa Universitara Clujeana, 2001.</li> <li>7. Teodorescu I.D., Geometrie Superioară, Ed. Didactică si Pedagogică, București , 1970</li> <li>8. Teodorescu I.D., Teodorescu S.D., Culegere de probleme de Geometrie Superioară, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975</li> <li>9. <a href="https://web.mit.edu/hyperbook/Patrikalakis-Maekawa-Cho/node2.html">https://web.mit.edu/hyperbook/Patrikalakis-Maekawa-Cho/node2.html</a></li> </ol> |                                                         |              |
| 8.2 Szeminárium / Labor                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Didaktikai módszerek                                    | Megjegyzések |
| 1. Feladatok: a görbék regularitásának, egyszerűségének vizsgálata, a Peano görbe vizsgálata                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Megbeszélés, feladatmegoldás, számítógépes szemléltetés |              |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                            |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--|
| 2. Nevezetes görbék vizsgálata, egyenletük levezetése: ciklois, epiciklois, hipociklois, sajátos esetek, spirálok,                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Megbeszélés, feladatmegoldás<br>számítógépes szemléltetés  |  |
| 3. Feladatmegoldás: érintő, normálsík, általános helyzetű görbék, simulósík, a Frenet-féle triéderелеmeinek meghatározása                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Megbeszélés, feladatmegoldás                               |  |
| 4. Feladatmegoldás: a Frenet-féle koordináta-rendszer, Frenet-féle képletek alkalmazása, görbe görbülete és torziójának kiszámítása, Lancret tétele                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Megbeszélés, feladatmegoldás                               |  |
| 5. Feladatmegoldás: görbék érintkezése, egy görbe simulóköre, térgörbe simulógömbje                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Megbeszélés, feladatmegoldás,<br>számítógépes szemléltetés |  |
| 6. Feladatmegoldás: egy illetve két paramétertől függő síkgörbecsalád burkolója, paraméteres egyenletekkel megadott görbecsalád burkolója                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Megbeszélés, feladatmegoldás,                              |  |
| 7. Feladatmegoldás: , a síkgörbe evolútája, síkgörbe evolvensé, görbék természetes egyenletének meghatározása                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Megbeszélés, feladatmegoldás,<br>számítógépes modellezés   |  |
| 8. Sajátos felületosztályok vizsgálata                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Megbeszélés, feladatmegoldás,                              |  |
| 9. Feladatmegoldás: érintősík, normális,                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Megbeszélés, feladatmegoldás,                              |  |
| 10. Feladatmegoldás: a felületek első alapformája, felületen elhelyezkedő görbeív hossza, felületen elhelyezkedő két görbe szöge, felületrész területének meghatározása                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Megbeszélés, feladatmegoldás                               |  |
| 11. Feladatmegoldás: Felületek második alapformája, normálgörbület                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Megbeszélés, feladatmegoldás                               |  |
| 12. Feladatmegoldás: Felület főgörbületei, közép és összgörbület                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Megbeszélés, feladatmegoldás,                              |  |
| 13. Feladatmegoldás: Sajátos felületek geodetikus vonalainak meghatározása                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Megbeszélés, feladatmegoldás                               |  |
| 14. Feladatmegoldás: geodetikus vonalak meghatározása, állandó összgörbületű felületek, mint geometriai modellek vizsgálata                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Megbeszélés, feladatmegoldás,<br>számítógépes szemléltetés |  |
| Könyvészet<br>1) M Murgulescu E., col., Geometrie analitica in spatiu si geometrie diferentiala, Culegere de probleme, vol. 2, Ed. Didactica si Pedagogica, Bucuresti<br>2) Teodorescu I.D., Teodorescu S.D., Culegere de probleme de Geometrie Superioară, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975<br>3) Fedenko A. Recueil d'exercices de geometrie differentielle, Ed. Mir, Moscou 1982<br>4) Mezei I.I, Varga Cs, Görbék és felületek, Ábel Kiadó, 2011.<br>5) Blaga A. P., Lectures on Classical Differential Geometry, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2005 |                                                            |  |

**9. A tantárgy tartalmának összhangba hozása az episztemikus közösségek képviselői, a szakmai egyesületek és a szakterület reprezentatív munkáltatói elvárásaival.**

- A tantárgy tartalma megegyezik a fontosabb egyetemeken oktatott görbék és felületek tárgy hagyományos tartalmával.

**10. Értékelés**

| Tevékenység típusa       | 10.1 Értékelési kritériumok                    | 10.2 Értékelési módszerek                     | 10.3 Aránya a végső jegyben |
|--------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------|
| 10.4 Előadás             | Alapfogalmak ismerete                          | Előadásokon megírt rövid zárthelyi dolgozatok | 10%                         |
|                          | Alapfogalmak, tételek, tulajdonságok igazolása | Írásbeli vizsga                               | 40%                         |
| 10.5 Szeminárium / Labor | Feladatmegoldások helyessége                   | Írásbeli vizsga                               | 40%                         |
|                          | Házi feladatok helyessége                      | Bemutatott házi feladatok                     | 10%                         |

#### 10.6 A teljesítmény minimumkövetelményei

- A görbék és felületek elméletéből a legalapvetőbb fogalmak és tételek ismerete
- Tudja meghatározni egy görbe érintőjét, normálsíkját, görbületét
- Tudja meghatározni egy felület érintő síkját, alapformáit, főgörbületeit, összgörbületét

#### 11. SDG ikonok (Fenntartható fejlődési célok/ Sustainable Development Goals)<sup>2</sup>

*Nem alkalmazható.*

Kitöltés időpontja:  
2025. április 29.

Előadás felelőse:

Dr. Mezei Ildikó Ilona, egyetemi adjunktus

Szeminárium felelőse:

Dr. Mezei Ildikó Ilona, egyetemi adjunktus

Az intézeti jóváhagyás dátuma:

Intézetigazgató:

Dr. András Szilárd-Károly docens

---

<sup>2</sup> Csak azokat az ikonokat tartsa meg, amelyek az [SDG-ikonoknak az egyetemi folyamatban](#) történő alkalmazására vonatkozó eljárás szerint illeszkednek az adott tantárgyhoz, és törölje a többit, beleértve a fenntartható fejlődés általános ikonját is – amennyiben nem alkalmazható. Ha egyik ikon sem illik a tantárgyra, törölje az összeset, és írja rá, hogy „Nem alkalmazható”.