

## A TANTÁRGY ADATLAPJA

### *Differenciáltopológia és geometria*

Egyetemi tanév 2025 - 2026

#### 1. A képzési program adatai

|                                     |                                  |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1.1. Felsőoktatási intézmény        | Babeş-Bolyai Tudományegyetem     |
| 1.2. Kar                            | Matematika és Informatika        |
| 1.3. Intézet                        | Magyar Matematika és Informatika |
| 1.4. Szakterület                    | Matematika                       |
| 1.5. Képzési szint                  | Alap                             |
| 1.6. Tanulmányi program / Képesítés | Matematika                       |
| 1.7. Képzési forma                  | Nappali                          |

#### 2. A tantárgy adatai

|                                          |                                    |            |   |                      |            |
|------------------------------------------|------------------------------------|------------|---|----------------------|------------|
| 2.1. A tantárgy neve                     | Differenciáltopológia és geometria |            |   | A tantárgy kódja     | MLM0085    |
| 2.2. Az előadásért felelős tanár neve    | László Tamás, egyetemi docens      |            |   |                      |            |
| 2.3. A szemináriumért felelős tanár neve | László Tamás, egyetemi docens      |            |   |                      |            |
| 2.4. Tanulmányi év                       | 3                                  | 2.5. Félév | 5 | 2.6. Értékelés módja | V          |
|                                          |                                    |            |   | 2.7. Tantárgy típusa | opcionális |

#### 3. Teljes becsült idő (az oktatási tevékenység féléves óraszám)

|                                                                                                |    |                      |    |                               |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----------------------|----|-------------------------------|------------|
| 3.1. Heti óraszám                                                                              | 4  | melyből: 3.2 előadás | 2  | 3.3 szeminárium/labor/projekt | 2          |
| 3.4. Tantervben szereplő összóraszám                                                           | 56 | melyből: 3.5 előadás | 28 | 3.6 szeminárium/labor         | 28         |
| <b>Az egyéni tanulmányi idő (ET) és az önképzési tevékenységekre (ÖT) szánt idő elosztása:</b> |    |                      |    |                               | <b>óra</b> |
| A tankönyv, a jegyzet, a szakirodalom vagy saját jegyzetek tanulmányozása                      |    |                      |    |                               | 10         |
| Könyvtárban, elektronikus adatbázisokban vagy terepen való további tájékozódás                 |    |                      |    |                               | 10         |
| Szemináriumok / laborok, házi feladatok, portfóliók, referátumok, esszék kidolgozása           |    |                      |    |                               | 15         |
| Egyéni készségfejlesztés (tutorálás)                                                           |    |                      |    |                               | 7          |
| Vizsgák                                                                                        |    |                      |    |                               | 2          |
| Más tevékenységek:                                                                             |    |                      |    |                               |            |
| <b>3.7. Egyéni tanulmányi idő (ET) és önképzési tevékenységekre (ÖT) szánt idő összóraszám</b> |    |                      |    |                               | <b>44</b>  |
| <b>3.8. A félév összóraszám</b>                                                                |    |                      |    |                               | <b>100</b> |
| <b>3.9. Kreditszám</b>                                                                         |    |                      |    |                               | <b>4</b>   |

#### 4. Előfeltételek (ha vannak)

|                      |                                                                                           |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.1. Tantervi        | Lineáris algebra, egy és többváltozós matematikai analízis, geometria (analitikus, affin) |
| 4.2. Kompetenciabeli | • Nincsen                                                                                 |

#### 5. Feltételek (ha vannak)

|                                                        |                                                        |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 5.1. Az előadás lebonyolításának feltételei            | • Táblával vagy intelligens táblával felszerelt előadó |
| 5.2. A szeminárium / labor lebonyolításának feltételei | • Táblával vagy intelligens táblával felszerelt előadó |

## 6. Elsajátítandó jellemző kompetenciák

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Szakmai/kulcs-kompetenciák  | <ul style="list-style-type: none"> <li>C1.1 Fogalmak azonosítása, elméletek leírása és a szaknyelv használata.</li> <li>C1.2 A matematikai fogalmak helyes magyarázata és értelmezése a szaknyelv felhasználásával.</li> <li>C1.3 A módszerek és elvek helyes alkalmazása a matematikafeladatok megoldásában.</li> <li>C1.5 Projektek és dolgozatok elkészítése matematikai módszerek és eredmények bemutatására.</li> <li>C 5.1 A matematikai bizonyítások megfelelő fogalmainak, módszereinek és technikáinak azonosítása.</li> <li>C 5.2 Matematikai gondolatmenetek alkalmazása matematikai eredmények bizonyítására.</li> <li>C 5.3 Matematikai eredmények igazolására vonatkozó érvelések logikus felépítése és kifejtése, a feltételek és a következtetések világos azonosításával.</li> <li>C 5.4 Különböző bizonyítási módszerek hatékony alkalmazása és komparatív elemzése.</li> <li>C 5.5 Egyéni projektek és dolgozatok elkészítése különböző bizonyítási módszerek.</li> </ul> |
| Transzverzális kompetenciák | <ul style="list-style-type: none"> <li>CT1 A szervezett és hatékony munka szabályainak, a didaktikai-tudományos területhez való felelősségteljes hozzáállás alkalmazása a saját potenciál kreatív értékesítéséhez, a szakmai etika alapelveinek és normáinak tiszteletben tartásával.</li> <li>CT3 Hatékony módszerek és technikák használata tanulásra, információszerzésre, kutatásra és a tudásszerzési kapacitások fejlesztésére, egy dinamikus társadalom igényeinek való megfelelésre, román és egy nemzetközi nyelven történő kommunikációra.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

## 7. A tantárgy célkitűzései (az elsajátítandó jellemző kompetenciák alapján)

|                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7.1 A tantárgy általános célkitűzése | <ul style="list-style-type: none"> <li>A tér alakjának topológiai és geometriai modellezése és ezáltal az intuitív gondolkodás fejlesztése. A modern matematika geometriai alapjainak bevezetése és elsajátítása.</li> </ul>                                                                                                               |
| 7.2 A tantárgy sajátos célkitűzései  | <ul style="list-style-type: none"> <li>A differenciáltopológia és geometria alapjainak bevezetése, különleges hangsúlyt fektetve a motivációra.</li> <li>Az alapok elsajátítása mellett a bemutatott anyag egy átfogó képet ad a modern geometria különböző irányairól, különböző problémáinak eredetéről és azok megoldásáról.</li> </ul> |

## 8. A tantárgy tartalma

| 8.1 Előadás                                                                  | Didaktikai módszerek              | Megjegyzések |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|--------------|
| 1. Motiváció: klasszikus geometriák általánosításai, topológiai alapfogalmak | Előadás, bizonyítások, magyarázat |              |
| 2. Topológikus és sima sokaságok, leképezések                                | Előadás, bizonyítások, magyarázat |              |
| 3. Sima sokaság érintőtere, sima leképezések deriváltja                      | Előadás, bizonyítások, magyarázat |              |
| 4. Lokális diffeomorfizmusok és az inverz függvény tétele                    | Előadás, bizonyítások, magyarázat |              |
| 5. Immerziók és a lokális immerzió tétele                                    | Előadás, bizonyítások, magyarázat |              |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                          |              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------|
| 6. Beágyazások, szubmerziók és a lokális szubmerzió tétele, reguláris és kritikus értékek                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| 7. Az algebra alaptételének Milnor féle bizonyítása                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| 8. Tranzverzalitás, homotópia és stabilitás                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| 9. Generikus tulajdonságok, Sard tétele és kitekintés a Morse elméletbe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| 10. Peremes sokaságok                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| 11. Brouwer fixpont tétele                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| 12. Mod 2 metszési számok és leképezések foka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| 13. Irányítás és metszés elmélet                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| 14. Metszési számok és az Euler karakterisztika                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Előadás, bizonyítások, magyarázat        |              |
| Könyvészet<br>1. Guillemin, V., Pollack A.: Differential Topology, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.<br>2. Milnor, J.W.: Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, 1965.<br>3. Lee, J.M.: Introduction to smooth manifolds, Springer, 2003<br>4. Tu, L.W.: An introduction to manifolds, Springer Universitext, 2011<br>5. Crainic, M: Manifolds 2018 (lecture notes), <a href="https://www.staff.science.uu.nl/~crain101/manifolds-2019/DG-2018.pdf">https://www.staff.science.uu.nl/~crain101/manifolds-2019/DG-2018.pdf</a><br>6. Arnol'd, V.I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag New York, 1989 |                                          |              |
| 8.2 Szeminárium / Labor                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Didaktikai módszerek                     | Megjegyzések |
| 1. Motiváció: mechanikai rendszerek konfigurációs terei, példák                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 2. Ismétlés: topológia                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 3. Példák sima sokaságokra és leképezésekre                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 4. Ismétlés: többváltozós analízis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 5. Lineáris leképezések: ismétlés, példák és feladatok                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 6. Immerziók amelyek képe nem részsokaság: példák                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 7. Lokálisan konstans fibrumok, példák                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 8. Tranzverzalitás speciális esetei: példák                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 9. Morse függvények                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 10. Peremes sokaságok: példák                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 11. Retrakciók és az egy-dimenziós sokaságok klasszifikációja                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 12. Kanyarodási szám: példák és feladatok                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 13. Vektorterek irányítása                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| 14. Felületek Euler karakterisztikája                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Magyarázat, megbeszélés, feladatmegoldás |              |
| Könyvészet<br>1. Guillemin, V., Pollack A.: Differential Topology, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.<br>2. Milnor, J.W.: Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, 1965.<br>3. Lee, J.M.: Introduction to smooth manifolds, Springer, 2003<br>4. Tu, L.W.: An introduction to manifolds, Springer Universitext, 2011<br>5. Crainic, M: Manifolds 2018 (lecture notes), <a href="https://www.staff.science.uu.nl/~crain101/manifolds-2019/DG-2018.pdf">https://www.staff.science.uu.nl/~crain101/manifolds-2019/DG-2018.pdf</a>                                                                                                  |                                          |              |

**9. Az episztemikus közösségek képviselői, a szakmai egyesületek és a szakterület reprezentatív munkáltatói elvárásainak összhangba hozása a tantárgy tartalmával.**

- A tantárgy tartalma megegyezik az egyetemi oktatásban a fontosabb egyetemeken oktatott algebrai számelmélet bevezető tárgy hagyományos tartalmával.

**10. Értékelés**

| Tevékenység típusa                                                                                                                            | 10.1 Értékelési kritériumok                                                         | 10.2 Értékelési módszerek                         | 10.3 Aránya a végső jegyben |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------|
| 10.4 Előadás                                                                                                                                  | Intuitív gondolkodás, alapvető fogalmak motivációjának és tulajdonságainak ismerete | Szóbeli vizsga: egy kiválasztott téma bemutatása. | 100%                        |
|                                                                                                                                               |                                                                                     |                                                   |                             |
| 10.5 Szeminárium / Labor                                                                                                                      |                                                                                     |                                                   |                             |
|                                                                                                                                               |                                                                                     |                                                   |                             |
| 10.6 A teljesítmény minimumkövetelményei                                                                                                      |                                                                                     |                                                   |                             |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Órákon való aktív részvétel.</li><li>• Az előre kiválasztott téma kidolgozása és bemutatása</li></ul> |                                                                                     |                                                   |                             |

**11. SDG ikonok (Fenntartható fejlődési célok/ Sustainable Development Goals)**

Nem alkalmazandó.

Előadás felelőse:

Dr. László Tamás, egyet. docens

Szeminárium felelőse:

Dr. László Tamás , egyet. docens

Intézetigazgató:

Dr. András Szilárd-Károly, egyet. docens