

A TANTÁRGY ADATLAPJA

Bizonyítási Technikák/Tehnici de Demonstrare/Proof Techniques

Egyetemi tanév 2025-2026

1. A képzési program adatai

1.1. Felsőoktatási intézmény	Babeş-Bolyai Tudományegyetem
1.2. Kar	Matematika és Informatika
1.3. Intézet	Magyar Matematika és Informatika
1.4. Szakterület	Matematika
1.5. Képzési szint	Alap
1.6. Tanulmányi program / Képesítés	Matematika
1.7. Képzési forma	nappali

2. A tantárgy adatai

2.1. A tantárgy neve		Bizonyítási Technikák					A tantárgy kódja		MLM0083		
2.2. Az előadásért felelős tanár neve			Dr. Szilágyi Géza Zsolt, egyetemi adjunktus								
2.3. A szemináriumért felelős tanár neve			Dr. Szilágyi Géza Zsolt, egyetemi adjunktus								
2.4. Tanulmányi év		1	2.5. Félév		1	2.6. Értékelés módja		Évközi	2.7. Tantárgy típusa		Kötelező alaptantárgy

3. Teljes becsült idő (az oktatási tevékenység féléves óraszám)

3.1. Heti óraszám	2	melyből: 3.2 előadás	1	3.3 szeminárium/labor/projekt	1
3.4. Tantervben szereplő összóraszám	28	melyből: 3.5 előadás	14	3.6 szeminárium/labor	14
Az egyéni tanulmányi idő (ET) és az önképzési tevékenységekre (ÖT) szánt idő elosztása:					óra
A tankönyv, a jegyzet, a szakirodalom vagy saját jegyzetek tanulmányozása					14
Könyvtárban, elektronikus adatbázisokban vagy terepen való további tájékozódás					10
Szemináriumok / laborok, házi feladatok, portfóliók, referátumok, esszék kidolgozása					14
Egyéni készségfejlesztés (tutorálás)					14
Vizsgák					6
Más tevékenységek: házi feladatok/felmérők javítása					14
3.7. Egyéni tanulmányi idő (ET) és önképzési tevékenységekre (ÖT) szánt idő összóraszám					72
3.8. A félév összóraszám					75
3.9. Kreditszám					3

4. Előfeltételek (ha vannak)

4.1. Tantervi	Középiskolai tananyag
4.2. Kompetenciabeli	Alapvető számolások elvégzése

5. Feltételek (ha vannak)

5.1. Az előadás lebonyolításának feltételei	Táblával, video projektorral felszerelt, átrendezhető tanterem, internet csatlakozás
5.2. A szeminárium / labor lebonyolításának feltételei	Táblával, video projektorral felszerelt, átrendezhető tanterem, internet csatlakozás

6. Elsajátítandó jellemző kompetenciák

Szakmai/kulcs-kompetenciák	C1.3 A módszerek és elvek helyes alkalmazása a matematikafeladatok megoldásában C1.4 Főbb matematikai problémátípusok felismerése és a megoldásukhoz szükséges módszerek, technikák kiválasztása. C 5.1 A matematikai bizonyítások megfelelő fogalmainak, módszereinek és technikáinak azonosítása C 5.2 Matematikai gondolatmenetek alkalmazása matematikai eredmények bizonyítására C 5.3 Matematikai eredmények igazolására vonatkozó érvelések logikus felépítése és kifejtése, a feltételek és a következtetések világos azonosításával
Transzverzális kompetenciák	CT1 A fegyelmezett és hatékony munka szabályainak alkalmazása, a tudományos és didaktikai terület iránti felelősségteljes magatartás kialakítása, a saját potenciál optimális és kreatív kiaknázása érdekében különböző problémaszituációkban, a szakmai etika szabályainak betartása mellett. CT3 Hatékony módszerek és technikák használata tanulásra, információszerzésre, kutatásra és a tudásszerzési kapacitások fejlesztésére, egy dinamikus társadalom igényeinek való megfelelésre, román és egy nemzetközi nyelven történő kommunikációra

7. A tantárgy célkitűzései (az elsajátítandó jellemző kompetenciák alapján)

7.1 A tantárgy általános célkitűzése	- A bizonyítások szükségességének megértése. - Különböző bizonyítási technikák megismerése. - Bizonyítások gondolatmeneteinek felépítése és leírása.
7.2 A tantárgy sajátos célkitűzései	Feladatmegoldási stratégiák vizsgálata.

8. A tantárgy tartalma

8.1 Előadás	Didaktikai módszerek	Megjegyzések
1. Egyenletek megoldásainak létezése.	Előadás, megbeszélés.	
2. Paraméteres egyenletek megoldása.	Előadás, megbeszélés.	
3. Egyenlőtlenségek igazolása és megoldása.	Előadás, megbeszélés.	E§7.
4. Paraméteres egyenlőtlenségek megoldása.	Előadás, megbeszélés.	
5. Kijelentések. Logikai műveletek. Univerzális és egzisztenciális kijelentések.	Előadás, megbeszélés.	TG§2, S§8, V§1,§2.
6. Tagadás és ellenpéldák.	Előadás, megbeszélés.	V§3.2.
7. Direkt bizonyítások. Konstruktív bizonyítások	Előadás, megbeszélés.	TG§4.4, V§3, S§4.
8. Esetek tárgyalása	Előadás, megbeszélés.	V§3.5.
9. Indirekt bizonyítások. Reductio ad absurdum.	Előadás, megbeszélés.	TG§6.5, S§9, S§10.
10. Matematikai indukció.	Előadás, megbeszélés.	TG§8, V§6, S§12, E§8.
11. Végtelen leszállás	Előadás, megbeszélés.	
12. Skatulyaelv.	Előadás, megbeszélés.	E§4.
13. Minimalitás / maximalitás elve.	Előadás, megbeszélés.	S§14, E§3.
14. Invariancia elve.	Előadás, megbeszélés.	E§1.

Könyvészet

- [V] Daniel Velleman: *How to prove it*, Cambridge, 2006.
- [TG] John Taylor, Rowan Garnier: *Understanding mathematical proof*, CRC press, 2014.
- [S] Daniel Solow: *How to read and do proofs*, Wiley, 2014.
- [R] Charles ERoberts: *Introduction to mathematical proofs*, CRC Press, 2015.
- [E] Arthur Engel: *Problem solving strategies*, Springer, 1999.
- [DG] Ulrich Daepf, Pamela Gorkin, *Reading, Writing, and Proving*, Springer, 2003.
- [AZ] Aigner M, Ziegler G.M.: *Proofs from the book*, Springer, 2010.
- [AM] Marian Mureşan, András Szilárd: *Matematikai analízis*, Editura Didactică şi Pedagogică, 2003.
- [M] Marian Mureşan: *Mathematics for Competitions*, Cyprus Mathematical Society, 2006.
- [SS] De Souza P. N., Silva J.-N.: *Berkeley Problems in Mathematics*. Springer, 2004.
- [ACsK] András Szilárd, Kajántó Sándor, Cseh Tünde: *Matematika szakköri feladatok*, Státus Kiadó, 2018.

[P1] Pólya György, <i>A problémamegoldás iskolája</i> , I. kötet, Typotex 2010.		
[P2] Pólya György, <i>A problémamegoldás iskolája</i> , II. kötet, Typotex 2010.		
8.2 Szeminárium / Labor	Didaktikai módszerek	Megjegyzések
1. Egyenletek megoldásainak létezése.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	
2. Paraméteres egyenletek megoldása.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	
3. Egyenlőtlenségek igazolása és megoldása.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	E§7
4. Paraméteres egyenlőtlenségek megoldása.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	
5. Kijelentések. Logikai műveletek. Univerzális és egzisztenciális kijelentések.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	TG§2, S§8, V§1, §2
6. Tagadás és ellenpéldák.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	V§3.2,
7. Direkt bizonyítások. Konstruktív bizonyítások	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	TG§4.4, V§3, S§4
8. Esetek tárgyalása	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	V§3.5
9. Indirekt bizonyítások. Reductio ad absurdum.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	TG§6.5, S§9, S§10,
10. Matematikai indukció.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	TG§8, V§6, E§8, S§12
11. Végtelen leszállás	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	
12. Skatulyaelv.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	E§4
13. Minimalitás / maximalitás elve.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	E§3, S§14
14. Invariancia elve.	Feladat megoldás. Házi feladat bemutatás.	E§1
Könyvészet		
[V] Daniel Velleman: <i>How to prove it</i> , Cambridge, 2006.		
[TG] John Taylor, Rowan Garnier: <i>Understanding mathematical proof</i> , CRC press, 2014.		
[S] Daniel Solow: <i>How to read and do proofs</i> , Wiley, 2014.		
[R] Charles ERoberts: <i>Introduction to mathematical proofs</i> , CRC Press, 2015.		
[E] Arthur Engel: <i>Problem solving strategies</i> , Springer, 1999.		
[DG] Ulrich Daepf, Pamela Gorkin, <i>Reading, Writing, and Proving</i> , Springer, 2003.		
[AZ] Aigner M, Ziegler G.M.: <i>Proofs from the book</i> , Springer, 2010.		
[AM] Marian Mureşan, András Szilárd: <i>Matematikai analízis</i> , Editura Didactică şi Pedagogică, 2003.		
[M] Marian Mureşan: <i>Mathematics for Competitions</i> , Cyprus Mathematical Society, 2006.		
[SS] De Souza P. N., Silva J.-N.: <i>Berkeley Problems in Mathematics</i> . Springer, 2004.		
[ACsK] András Szilárd, Kajántó Sándor, Cseh Tünde: <i>Matematika szakköri feladatok</i> , Státus Kiadó, 2018.		
[P1] Pólya György, <i>A problémamegoldás iskolája</i> , I. kötet, Typotex 2010.		
[P2] Pólya György, <i>A problémamegoldás iskolája</i> , II. kötet, Typotex 2010.		

9. A tárgy tartalmának összhangba hozása az episztemikus közösségek képviselői, a szakmai egyesületek és a szakterület reprezentatív munkáltatói elvárásaival.

- Az itt szerzett ismeretek egyrészt nélkülözhetetlenek a többi tantárgy elsajátításához, másrészt megalapozhatják a későbbi tanári vagy kutatói munkájukat.

10. Értékelés

Tevékenység típusa	10.1 Értékelési kritériumok	10.2 Értékelési módszerek	10.3 Aránya a végső jegyben
10.4 Előadás	Alapfogalmak, módszerek, stratégiák pontos ismerete Bizonyítási módszerek ismerete	Félévközi felmérő és félévvégi vizsga során.	20%
		Felmérők, kvízek.	10%
10.5 Szeminárium / Labor	Feladatok megoldásához szükséges módszerek alkalmazása, a számolások, bizonyítások kivitelezése.	Félévközi felmérő és félévvégi vizsga során.	50%
		Házi feladatok megoldása. Szemináriumi tevékenység.	20%
10.6 A teljesítmény minimumkövetelményei			
- Az alapvető módszerek bemutatása, alkalmazása feladatok megoldásában - Feladatok esetén a megfelelő megoldási módszer kiválasztása. - A szemináriumok, illetve előadások 70%-án való részvétellel (minimum 10 szemináriumon, illetve 10 előadáson való jelenlét). - Minimális átmenő jegy: 5.			

11. SDG ikonok (Fenntartható fejlődési célok/ Sustainable Development Goals) „Nem alkalmazható”.

Kitöltés időpontja:

2025.04.18.

Előadás felelőse:

Dr. Szilágyi Géza Zsolt
egyetemi adjunktus

Szeminárium felelőse:

Dr. Szilágyi Géza Zsolt

Az intézeti jóváhagyás dátuma:

2025.04.24.

Intézetigazgató:

Dr. András Szilárd Károly
egyetemi docens

FIȘA DISCIPLINEI

Tehnici de Demonstrare

Anul universitar 2025-2026

1. Date despre program

1.1. Instituția de învățământ superior	Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca
1.2. Facultatea	Facultatea de Matematică și Informatică
1.3. Departamentul	Departamentul de Matematică și Informatică al Liniei Maghiare
1.4. Domeniul de studii	Matematică
1.5. Ciclul de studii	Licență
1.6. Programul de studii / Calificarea	Matematică (în limba maghiară)
1.7. Forma de învățământ	cu frecvență

2. Date despre disciplină

2.1. Denumirea disciplinei		Tehnici de Demonstrare				Codul disciplinei	MLM0083
2.2. Titularul activităților de curs		Lect. Dr. Szilágyi Géza Zsolt					
2.3. Titularul activităților de seminar		Lect. Dr. Szilágyi Géza Zsolt					
2.4. Anul de studiu	1	2.5. Semestrul	1	2.6. Tipul de evaluare	Verificare pe parcurs	2.7. Regimul disciplinei	obligatoriu

3. Timpul total estimat (ore pe semestru al activităților didactice)

3.1. Număr de ore pe săptămână	2	din care: 3.2. curs	1	3.3. seminar/ laborator/proiect	1
3.4. Total ore din planul de învățământ	28	din care: 3.5. curs	14	3.6 seminar/laborator/proiect	14
Distribuția fondului de timp pentru studiul individual (SI) și activități de autoinstruire (AI)					ore
Studiul după manual, suport de curs, bibliografie și notițe (AI)					14
Documentare suplimentară în bibliotecă, pe platformele electronice de specialitate și pe teren					10
Pregătire seminare/ laboratoare/ proiecte, teme, referate, portofolii și eseuri					14
Tutoriat (consiliere profesională)					14
Examinări					6
Alte activități					14
3.7. Total ore studiu individual (SI) și activități de autoinstruire (AI)				72	
3.8. Total ore pe semestru				75	
3.9. Numărul de credite				3	

4. Precondiții (acolo unde este cazul)

4.1. de curriculum	Programa de liceu
4.2. de competențe	Capacitatea de a efectua calculele elementare

5. Condiții (acolo unde este cazul)

5.1. de desfășurare a cursului	Sală dotată cu tablă și videoproiector, cu mobilier rearanjabil pentru lucrare în grupe, conexiune internet
5.2. de desfășurare a seminarului/ laboratorului	Sală dotată cu tablă și videoproiector, cu mobilier rearanjabil pentru lucrare în grupe, conexiune internet

6. Competențele specifice acumulate

Competențe profesionale/esențiale	• C1.3 Aplicarea corectă a metodelor și principiilor de bază în rezolvarea problemelor de matematică. • C1.4 Recunoașterea principalelor clase/tipuri de probleme matematice și selectarea metodelor și a tehnicilor adecvate pentru rezolvarea lor. • C 5.1 Identificarea adecvată a conceptelor, metodelor și tehnicilor de demonstrație matematică. • C 5.2 Utilizarea raționamentelor matematice în demonstrarea unor rezultate matematice. • C 5.3 Construirea și dezvoltarea de argumentări logice cu scopul demonstrării unor rezultate matematice, cu identificarea clară a ipotezelor și concluziilor
Competențe transversale	• CT1 Aplicarea regulilor de muncă riguroasă și eficientă, manifestarea unor atitudini responsabile față de domeniul științific și didactic pentru valorificarea optimă și creativă a propriului potențial în situații specifice cu respectarea principiilor și a normelor de etică profesională. • CT3 Utilizarea eficientă a surselor informaționale și a resurselor de comunicare și formare profesională asistată, atât în limba română, cât și într-o limbă de circulație internațională.

7. Obiectivele disciplinei (reieșind din grila competențelor acumulate)

7.1 Obiectivul general al disciplinei	• De a înțelege necesitatea demonstrațiilor. • Cunoașterea diferitelor tehnici de demonstrare • Capacitatea de a formula și de a descrie o demonstrație
7.2 Obiectivele specifice	• De a examina diferite strategii de demonstrare.

8. Conținuturi

8.1 Curs	Metode de predare	Observații
1. Existența soluțiilor unor ecuații	Predarea, discutarea problemelor.	
2. Rezolvarea ecuațiilor cu parametrii.	Predarea, discutarea problemelor.	
3. Inegalități.	Predarea, discutarea problemelor.	EȘ7
4. Rezolvarea inegalităților cu parametrii.	Predarea, discutarea problemelor.	
5. Afirmatii. Operații logice. Afirmatii universale	Predarea, discutarea problemelor.	TGȘ2, ȘȘ8, VȘ1, Ș2
6. Negarea și contraexemple.	Predarea, discutarea problemelor.	VȘ3.2,
7. Demonstrații directe. Demonstrații constructive.	Predarea, discutarea problemelor.	TGȘ4.4, VȘ3, ȘȘ4
8. Discutarea cazurilor	Predarea, discutarea problemelor.	VȘ3.5
9. Demonstrații indirecte. Reductio ad absurdum.	Predarea, discutarea problemelor.	TGȘ6.5, ȘȘ9, ȘȘ10,
10. Inducție matematică	Predarea, discutarea problemelor.	TGȘ8, VȘ6, EȘ8, ȘȘ12
11. Coborâre infinită	Predarea, discutarea problemelor.	
12. Principiul lui Dirichlet.	Predarea, discutarea problemelor.	EȘ4
13. Principiul minimalității /maximalității.	Predarea, discutarea problemelor.	EȘ3, ȘȘ14
14. Principiul invarianței.	Predarea, discutarea problemelor.	EȘ1

Bibliografie

- [V] Daniel Velleman: *How to prove it*, Cambridge, 2006.
- [TG] John Taylor, Rowan Garnier: *Understanding mathematical proof*, CRC press, 2014.
- [S] Daniel Solow: *How to read and do proofs*, Wiley, 2014.
- [R] Charles E Roberts: *Introduction to mathematical proofs*, CRC Press, 2015.
- [E] Arthur Engel: *Problem solving strategies*, Springer, 1999.
- [DG] Ulrich Daepf, Pamela Gorkin: *Reading, Writing, and Proving*, Springer, 2003.
- [AZ] Aigner M, Ziegler G.M.: *Proofs from the book*, Springer, 2010.
- [AM] Marian Mureşan, András Szilárd: *Matematikai analízis*, Editura Didactică şi Pedagogică, 2003.
- [M] Marian Mureşan: *Mathematics for Competitions*, Cyprus Mathematical Society, 2006.
- [SS] De Souza P. N., Silva J.-N.: *Berkeley Problems in Mathematics*. Springer, 2004.
- [ACsK] András Szilárd, Kajántó Sándor, Cseh Tünde: *Matematika szakköri feladatok*, Státus Kiadó, 2018.
- [P1] Pólya György: *A problémamegoldás iskolája*, I. kötet, Typotex 2010.
- [P2] Pólya György: *A problémamegoldás iskolája*, II. kötet, Typotex 2010.

8.2 Seminar / laborator	Metode de predare	Observații
1. Existența soluțiilor unor ecuații	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	
2. Rezolvarea ecuațiilor cu parametrii.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	
3. Inegalități.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	EŞ7
4. Rezolvarea inegalităților cu parametrii.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	
5. Afirmații. Operații logice. Afirmații universale	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	TGŞ2, SŞ8, VŞ1, Ş2
6. Negarea şi contraexemple.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	VŞ3.2,
7. Demonstrații directe. Demonstrații constructive.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	TGŞ4.4, VŞ3, SŞ4
8. Discutarea cazurilor	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	VŞ3.5
9. Demonstrații indirecte. Reductio ad absurdum.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	TGŞ6.5, SŞ9, SŞ10,
10. Inducție matematică	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	TGŞ8, VŞ6, EŞ8, SŞ12
11. Coborâre infinită	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	
12. Principiul lui Dirichlet.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	EŞ4
13. Principiul minimalității /maximalității.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	EŞ3, SŞ14
14. Principiul invarianței.	Rezolvarea problemelor și prezentarea temelor de acasă.	EŞ1

Bibliografie

- [V] Daniel Velleman: *How to prove it*, Cambridge, 2006.
- [TG] John Taylor, Rowan Garnier: *Understanding mathematical proof*, CRC press, 2014.
- [S] Daniel Solow: *How to read and do proofs*, Wiley, 2014.
- [R] Charles E. Roberts: *Introduction to mathematical proofs*, CRC Press, 2015.
- [E] Arthur Engel: *Problem solving strategies*, Springer, 1999.
- [DG] Ulrich Daepf, Pamela Gorkin: *Reading, Writing, and Proving*, Springer, 2003.
- [AZ] Aigner M, Ziegler G.M.: *Proofs from the book*, Springer, 2010.
- [AM] Marian Mureşan, András Szilárd: *Matematikai analízis*, Editura Didactică şi Pedagogică, 2003.
- [M] Marian Mureşan: *Mathematics for Competitions*, Cyprus Mathematical Society, 2006.
- [SS] De Souza P. N., Silva J.-N.: *Berkeley Problems in Mathematics*. Springer, 2004.
- [ACsK] András Szilárd, Kajántó Sándor, Cseh Tünde: *Matematika szakköri feladatok*, Státus Kiadó, 2018.
- [P1] Pólya György: *A problémamegoldás iskolája*, I. kötet, Typotex 2010.
- [P2] Pólya György: *A problémamegoldás iskolája*, II. kötet, Typotex 2010.

9. Coroborarea conținuturilor disciplinei cu așteptările reprezentanților comunității epistemice, asociațiilor profesionale și angajatori reprezentativi din domeniul aferent programului

- Cunoștințele dobândite la acest curs sunt indispensabile pentru altor cursuri.

10. Evaluare

Tip activitate	10.1 Criterii de evaluare	10.2 Metode de evaluare	10.3 Pondere din nota finală
10.4 Curs	Cunoașterea noțiunilor și teoremelor de bază: definiție, anunț, demonstrație, exemple.	Examen parțial Examen scris.	20%
		Test.	10%
10.5 Seminar/laborator	Cunoașterea metodelor de rezolvare pentru problemelor de concurs.	Examen parțial. Examen scris	50%
		Rezolvarea temelor de acasă. Activitatea la seminare.	20%
10.6 Standard minim de performanță			
• Să cunoaște tehnicilor de demonstrare, aplicarea în rezolvarea problemelor. • Alegerea adecvate a tehnicilor de demonstrare în rezolvarea problemelor. • Obținerea notei minim 5 în urma evaluării activității studenților din timpul semestrului și a lucrării scrise la finalul semestrului. • Prezența obligatorie la minim 10 seminarii și 10 cursuri.			

11. Etichete ODD (Obiective de Dezvoltare Durabilă / Sustainable Development Goals)

Nu se aplică.

Data completării:

18.04.2025.

Semnătura titularului de curs

Lect. Dr. Szilágyi Géza Zsolt

Semnătura titularului de seminar

Lect. Dr. Szilágyi Géza Zsolt

Data avizării în departament:

24.04.2025.

Semnătura directorului de departament

Conf. Dr. András Szilárd Károly