FIŞA DISCIPLINEI

Metode matematice în mecanica fluidelor

Anul universitar 2025-2026

1. Date despre program

1.1. Instituţia de învăţământ superior	Universitatea Babeş-Bolyai
1.2. Facultatea	Matematică şi Informatică
1.3. Departamentul	Matematică
1.4. Domeniul de studii	Matematică
1.5. Ciclul de studii	Master
1.6. Programul de studii / Calificarea	Matematici Avansate - în limba engleză
1.7. Forma de învăţământ	cu frecvenţă

2. Date despre disciplină

2.1. Denumirea disciplinei	**Metode matematice în mecanica fluidelor (Mathematical Methods in Fluid Mechanics)**					Codul disciplinei	**MME3104**
2.2. Titularul activităţilor de curs	**Prof. univ. dr. Mirela KOHR**						
2.3. Titularul activităţilor de seminar	**Prof. univ. dr. Mirela KOHR**						
2.4. Anul de studiu	**1**	2.5. Semestrul	**1**	2.6. Tipul de evaluare	**C**	2.7. Regimul disciplinei	**Obligatoriu**/ Fundamentală

3. Timpul total estimat (ore pe semestru al activităţilor didactice)

3.1. Număr de ore pe săptămână	**3**	din care: 3.2. curs	**2**	3.3. seminar/ laborator	**1 sem**
3.4. Total ore din planul de învăţământ	**42**	din care: 3.5. curs	**28**	3.6 seminar/laborator	**14**
Distribuţia fondului de timp pentru studiul individual (SI) şi activităţi de autoinstruire (AI)					**ore**
Studiul după manual, suport de curs, bibliografie şi notiţe (AI)					38
Documentare suplimentară în bibliotecă, pe platformele electronice de specialitate şi pe teren					38
Pregătire seminarii/ laboratoare/ proiecte, teme, referate, portofolii şi eseuri					38
Tutoriat (consiliere profesională)					10
Examinări					9
Alte activităţi					-
3.7. Total ore studiu individual (SI) şi activităţi de autoinstruire (AI)				**133**	
3.8. Total ore pe semestru				**175**	
3.9. Numărul de credite				**7**	

4. Precondiţii (acolo unde este cazul)

4.1. de curriculum	Cunoaştere aprofundată a următoarelor discipline: • Mecanică teoretică; • Ecuaţii cu derivate parţiale; • Analiză reală; Analiza functionala : nu e obligatorie la licenta ! • Analiză numerică.
4.2. de competenţe	Sunt utile competenţe de raţionamente logice şi de utilizare a cunoştinţelor de curriculum precizate mai sus.

5. Condiţii (acolo unde este cazul)

5.1. de desfăşurare a cursului	Sală de curs dotată cu tablă, videoproiector
5.2. de desfăşurare a seminarului/ laboratorului	Sală de seminar dotată cu tablă, videoproiector

6.1. Competenţele specifice acumulate[1]

Competenţe profesionale/esenţiale	• Capacitatea de a înţelege, manevra şi comunica concepte, teorii fundamentale şi avansate din domeniul matematicii. • Abilitatea de a modela şi de a analiza din punct de vedere matematic procese reale din alte ştiinţe, fizică, medicină şi inginerie • Capacitatea de a înţelege lucrări ştiinţifice în domeniul matematicii, de a formula probleme noi şi de a iniţia o cercetare matematică redactând rapoarte şi lucrări ştiinţifice. • Capacitatea de a evalua pertinent rezultatele obţinute comparându-le cu diferite abordări alternative. • Elaborarea şi conducerea de proiecte matematice de cercetare, utilizând un spectru larg de metode cantitative şi calitative. • Capacitatea de a utiliza cunoştinţele dobândite în realizarea unui doctorat in domeniul Matematică sau în alte domenii care utilizează modele matematice. • Capacitatea de a se autoperfecţiona şi de a se autoinstrui continuu.
Competenţe transversale	• Abilitatea de a se informa, de a lucra independent sau în echipă pentru a realiza studii şi pentru a rezolva probleme complexe. • Aplicarea regulilor de muncă organizată şi eficientă, a unor atitudini responsabile faţă de domeniul didactico-ştiinţific, pentru valorificarea creativă a propriului potenţial, cu respectarea principiilor de etică profesională. • Capacitatea de a se integra in medii variate din domeniul învăţământului şi al cercetarii. • Capacitatea de adaptare la cerinţele unei societăţi dinamice şi de comunicare intr-o limbă de circulaţie internaţională.

6.2. Rezultatele învăţării

Cunoştinţe	• Studentul masterand cunoaşte, înţelege şi utilizează concepte, rezultate individuale şi teorii matematice avansate. • Studentul masterand demonstrează însuşirea şi utilizarea unor metode şi tehnici eficiente de cercetare. • Studentul masterand are abilitatea de a modela şi de a analiza din punct de vedere matematic procese şi fenomene din alte ştiinţe, fizică, medicină şi inginerie.
Aptitudini	• Studentul masterand este capabil să identifice şi sa formuleze probleme semnificative, care să stea la baza unor cercetări ulterioare. • Studentul masterand este capabil să utilizeze limbajul ştiinţific şi să realizeze cercetări în domeniul matematicii.
Responsabilităţi şi autonomie	• Studentul masterand are capacitatea de a se informa, de a lucra independent sau în echipă pentru a realiza studii şi pentru a rezolva probleme complexe. • Studentul masterand demonstrează capacitatea de investigare critică a literaturii de specialitate. • Studentul masterand este capabil să utilizeze baze de date internaţionale de cercetare academică.

7. Obiectivele disciplinei (reieşind din grila competenţelor acumulate)

7.1 Obiectivul general al disciplinei	• Cunoaşterea, înţelegerea şi utilizarea principalelor concepte şi rezultate ale mecanicii fluidelor. • Abilitatea de a folosi şi de a aplica concepte şi rezultate fundamentale ale teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale, topologiei şi analiei reale în studiul problemelor specifice ale mecanicii fluidelor. • Cunoaşterea, înţelegerea şi utilizarea metodelor matematice avansate în studiul unor probleme speciale liniare sau neliniare din mecanica fluidelor.

[1] Se poate opta pentru competenţe sau pentru rezultatele învăţării, respectiv pentru ambele. În cazul în care se alege o singură variantă, se va şterge tabelul aferent celeilalte opţiuni, iar opţiunea păstrată va fi numerotată cu 6.

7.2 Obiectivele specifice	• Însuşirea cunoştinţelor de bază şi avansate din mecanica fluidelor. • Abilitatea de a aplica şi de a utiliza modele matematice pentru a descrie şi analiza probleme legate de mişcări fluide vâscoase. • Înţelegerea principalelor concepte şi rezultate ale teoriei matematice a fluidelor vâscoase incompresibile la numere Reynolds mici. • Cunoaşterea, înţelegerea şi utilizarea metodelor avansate ale matematicii în studiul unor probleme speciale cu valori pe frontieră din mecanica fluidelor: tehnici variaţionale, metode de teoria potenţialului, tehnici de punct fix. • Capacitatea studentului de a se implica în cercetarea ştiinţifică.

8. Conţinuturi

8.1 Curs	**Metode de predare**	**Observaţii**
1. Introducere in teoria spaţiilor Sobolev (I): Spaţiile fundamentale ale teoriei distribuţiilor. Distribuţii.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
2. Introducere in teoria spaţiilor Sobolev (II): Spaţii Sobolev în $\mathbf{R}^n$. Spaţii Sobolev pe domenii Lipschitz din $\mathbf{R}^n$ şi pe frontiere Lipschitz. Dualul unui spaţiu Sobolev. Teorema de scufundare continuă a lui Sobolev şi teorema de scufundare compactă a lui Rellich-Kondrachov.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
3. Cinematica fluidelor: fluid, configuraţie, mişcare. Câmpurile viteză şi acceleraţie. Descrierea spaţială a mişcării unui fluid.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
4. Dinamica fluidelor: Principiul conservării masei. Ecuaţia de continuitate.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
5. Dinamica fluidelor: Tensorul tensiune Cauchy. Ecuaţia lui Cauchy.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
6. Ecuaţia constitutivă a fluidului ideal. Ecuaţia lui Euler.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
7. Modelul matematic al fluidului vâscos Newtonian: Ecuaţia constitutivă şi ecuaţiile Navier-Stokes. Forme speciale ale ecuaţiilor Navier-Stokes.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
8. Rezultate de unicitate pentru problemele Dirichlet şi Neumann pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz mărginite din $\mathbf{R}^n$. Metodă variaţională pentru soluţia slabă a problemei Stokes într-un domeniu Lipschitz mărginit cu o condiţie Dirichlet omogenă pe frontieră.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
9. Metoda soluţiilor fundamentale în mecanica fluidelor: Tensorul Oseen-Burgers şi vectorul fundamental presiune pentru sistemul Stokes în $\mathbf{R}^n$ (n=2, 3).	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
10. Teoria potenţialului hidrodinamic (I): Operatori mărginiţi şi operatori compacţi, operatori Fredholm în spaţii Banach. Alternativa lui Fredholm.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
11. Teoria potenţialului hidrodinamic (II): Potenţiale de simplu şi de dublu strat pentru sistemul Stokes. Mărginire, compactitate si proprietăţi Fredholm în spaţii Sobolev.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
12. Aplicaţii ale metodelor de teoriei potenţialului pentru sistemul Stokes: Rezultate de existenţă şi unicitate pentru probleme cu valori pe frontieră pentru	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	

sistemul Stokes în domenii Lipschitz din $\mathbf{R}^n$, cu date în spaţii Sobolev. Existenţă şi unicitate pentru problema Dirichlet pentru sistemul Navier-Stokes domenii Lipschitz din $\mathbf{R}^3$.		
13. Aplicaţii ale metodelor de teoriei potenţialului pentru sistemul Stokes şi ale tehnicilor variaţionale: Rezultate de existenţă şi unicitate în spaţii Sobolev ponderate pentru problema Dirichlet exterioară pentru sistemul Stokes în $\mathbf{R}^n$. Rezultate de existenţă în spaţii Sobolev ponderate pentru problema Dirichlet exterioară pentru sistemul Navier-Stokes în $\mathbf{R}^3$.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	
14. Potenţiale de strat şi probleme de transmisie şi la limită pentru sistemele Stokes şi Navier-Stokes cu coeficienţi variabili în domenii Lipschitz; Procedeu variaţional şi potenţial. Rezultate de existenţă şi unicitate în spaţii Sobolev. Aplicaţii privind mişcări fluide vâscoase incompresibile în prezenţa interfeţelor şi în medii poroase. Rezultate numerice. Direcţii de cercetare.	Prelegerea, modelarea, demonstraţia, conversaţia. Prezentarea de explicaţii alternative.	

Bibliografie

1. Kohr, M., Pop, I., *Viscous Incompressible Flow for Low Reynolds Numbers*, WIT Press (Wessex Institute of Technology Press), Southampton (UK) – Boston, 2004.
2. Kohr, M., *Modern Problems in Viscous Fluid Mechanics*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2 vols. 2000 (in Romanian).
3. Kohr, M., *Special Topics of Mechanics*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2005 (in Romanian).
4. Kohr, M., *Mathematical Methods in Fluid Mechanics*, Lecture Notes, 2024/2025.
5. Truesdell, C., Rajagopal, K.R., *An Introduction to the Mechanics of Fluids*, Birkhäuser, Basel, 2000.
6. Boyer, F., Fabrie, P., *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, Springer, New York, 2013.
7. Galdi, G.P., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations*, 2nd Edition, Springer, Berlin, 2011.
8. Adams, R. Fournier, J., *Sobolev Spaces*, 2nd Edition, Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
9. Agranovich, M.S., *Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains,* Springer, Heidelberg, 2015.
10. Hsiao, G.C., Wendland W.L., *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1th Edition 2008, 2nd Edition 2021.
11. Mitrea, M. Wright, M., *Boundary value problems for the Stokes system in arbitrary Lipschitz domains*, Astérisque, France, 344 (2012): viii+241 pp.
12. Temam, R., *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, AMS Chelsea Edition, 2001.
13. Sayas, F-J., Brown, T.S., Hassell, M.E., *Variational Techniques for Elliptic Partial Differential Equations: Theoretical Tools and Advanced Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2019.
14. Rieutord, M., *Fluid Dynamics. An Introduction*, Springer Cham Heidelberg, 2015.

8.2 Seminar	**Metode de predare**	**Observaţii**
1. Introducere in teoria spaţiilor Sobolev (I): Spaţiile fundamentale ale teoriei distribuţiilor. Distribuţii.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
2. Introducere in teoria spaţiilor Sobolev (II): Spaţii Sobolev în $\mathbf{R}^n$. Spaţii Sobolev pe domenii Lipschitz din $\mathbf{R}^n$ şi pe frontiere Lipschitz. Teoreme de urmă.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână

3. Operatori diferenţiali. Derivate materiale. Teorema lui Euler. Aplicaţii.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
4. Tensori cartezieni de ordinal doi în $\mathbf{R}^n$.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
5. Proprietăţi ale tensorului tensiune Cauchy: Teorema fundamentală a lui Cauchy şi proprietatea de simetrie.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
6. Modelul matematic al fluidului incompresibil.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
7. Teorema lui Killing. Aplicaţii.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
8. Metodă variaţională pentru soluţia slabă a problemei Stokes într-un domeniu Lipschitz mărginit cu o condiţie Dirichlet omogenă pe frontieră.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
9. Problema Dirichlet exterioară pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz din $\mathbf{R}^n$ (n=2,3). Rezultate de existenţă şi unicitate şi aplicaţii.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
10. Metoda soluţiilor fundamentale în mecanica fluidelor (I): Reprezentări prin potenţiale de strat pentru mişcarea fluidă de tip Stokes.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
11. Metoda soluţiilor fundamentale în mecanica fluidelor (II): aplicaţii.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
12. Rezultate de existenţă şi unicitate în spaţii Sobolev pentru probleme cu valori pe frontieră pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz mărginite din $\mathbf{R}^n$ ($n\geq 2$).	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
13. Probleme Dirichlet exterioare pentru sistemele Stokes şi Navier-Stokes în $\mathbf{R}^3$, cu date în spaţii Sobolev ponderate.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână
14. Probleme cu valori pe frontieră pentru sisteme Stokes şi Navier-Stokes cu coeficienţi variabili pe domenii Lipschitz: procedeu variaţional şi potenţial. Aplicaţii privind mişcări fluide vâscoase în medii poroase. Rezultate numerice. Direcţii de cercetare.	Aplicarea conceptelor de la curs. Descrierea argumentelor şi demonstraţiilor pentru rezolvarea problemelor. Lansarea de teme de studiu. Răspunsuri directe la întrebările studenţilor.	1 oră în fiecare săptămână

Bibliografie

1. Kohr, M., Pop, I., *Viscous Incompressible Flow for Low Reynolds Numbers*, WIT Press (Wessex Institute of Technology Press), Southampton (UK) – Boston, 2004.
2. Kohr, M., *Modern Problems in Viscous Fluid Mechanics*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2 vols. 2000 (in Romanian).
3. Kohr, M., *Special Topics of Mechanics*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2005 (in Romanian).
4. Kohr, M., *Mathematical Methods in Fluid Mechanics*, Seminar Notes, 2024/2025.
5. Kohr, M., Mikhailov, S.E., Wendland, W.L., *Non-homogeneous Dirichlet-transmission problems for the anisotropic Stokes and Navier-Stokes systems in Lipschitz domains with transversal interfaces*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 61:198 (2022), 47 pp.
6. Truesdell, C., Rajagopal, K.R., *An Introduction to the Mechanics of Fluids*, Birkhäuser, Basel, 2000.
7. Kiselev, S.P., Vorozhtsov, E.V., Fomin, V.M., *Foundations of Fluid Mechanics with Applications. Problem Solving Using Mathematica*, Birkhäuser, Boston, 1999.
8. Hsiao, G.C., Wendland W.L., *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1th Edition 2008, 2nd Edition 2021.
9. Mitrea, M. Wright, M., *Boundary value problems for the Stokes system in arbitrary Lipschitz domains*, Astérisque, France, 344 (2012): viii+241 pp.
10. Precup, R., *Linear and Semilinear Partial Differential Equations.* De Gruyter, Berlin, 2013.
11. Galdi, G.P., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations*, 2nd Edition. Springer, Berlin, 2011.
12. Boyer, F., Fabrie, P., *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, Springer, New York, 2013.
13. McLean, W., *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
14. Wloka, J. T. , Rowley, B., Lawruk, B., *Boundary Value Problems for Elliptic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

9. Coroborarea conţinuturilor disciplinei cu aşteptările reprezentanţilor comunităţii epistemice, asociaţiilor profesionale şi angajatori reprezentativi din domeniul aferent programului

- Tematica acestui curs este în concordanţă cu ceea ce este prevăzut în programul de studii al celor mai importante universităţi din România şi din străinătate, unde matematica avansată are un rol esenţial.
- Această disciplină este utilă în activităţi specifice studenţilor doctoranzi, în pregătirea viitorilor cercetători în matematica pură şi matematica aplicată, precum şi a celor care utilizează diverse modele matematice şi metode avansate în alte domenii.

10. Evaluare

Tip activitate	10.1 Criterii de evaluare	10.2 Metode de evaluare	10.3 Pondere din nota finală
10.4 Curs	Cunoaşterea noţiunilor şi a rezultatelor de bază.	Colocviu	60%
	Posibilitatea de a justifica prin demonstraţie rezultatele teoretice.		
10.5 Seminar	Capacitatea de a aplica noţiuni şi rezultatele dobândite la curs în modelarea matematică şi analiza problemelor din mecanica fluidelor.	Evaluarea activităţii studenţilor din timpul semestrului, teme de casă şi rapoarte, precum şi participarea activă la seminar. O lucrare de control (la mijlocul semestrului).	15% 25%
Prezenţa la ore: conform cerinţelor generale ale facultăţii.			
10.6 Standard minim de performanţă			

- Nota finală minim 5 (într-o scară de la 1 la 10).

11. Etichete ODD (Obiective de Dezvoltare Durabilă / Sustainable Development Goals)[2]

	Eticheta generală pentru Dezvoltare durabilă							

Data completării:
11.04.2025

Semnătura titularului de curs

Prof. univ. dr. Mirela KOHR

Semnătura titularului de seminar

Prof. univ. dr. Mirela KOHR

Data avizării în departament:
25.04.2025

Semnătura directorului de departament

Prof. univ. dr. Andrei MĂRCUŞ

[2] Păstrați doar etichetele care, în conformitate cu *Procedura de aplicare a etichetelor ODD în procesul academic*, se potrivesc disciplinei și ștergeți-le pe celelalte, inclusiv eticheta generală pentru *Dezvoltare durabilă* - dacă nu se aplică. Dacă nicio etichetă nu descrie disciplina, ștergeți-le pe toate și scrieți "*Nu se aplică.*".