

## FIȘA DISCIPLINEI

### 1. Date despre program

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 1.1 Instituția de învățământ superior | Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca  |
| 1.2 Facultatea                        | Facultatea de Matematică și Informatică |
| 1.3 Departamentul                     | Departamentul de matematică             |
| 1.4 Domeniul de studii                | Matematică                              |
| 1.5 Ciclul de studii                  | Licență                                 |
| 1.6 Programul de studiu / Calificarea | Matematică                              |

### 2. Date despre disciplină

|   |  |               |   |                        |   |                         |             |
|---|--|---------------|---|------------------------|---|-------------------------|-------------|
| 2.1 Denumirea disciplinei<br>(ro)<br>(en) | Analiză matematică 2 (Calcul diferențial și integral în $R^n$ )<br>Calculus 2 (Differential and integral calculus in $R^n$ ) |               |   |                        |   |                         |             |
| 2.2 Titularul activităților de curs       | Trif Tiberiu-Vasile  |               |   |                        |   |                         |             |
| 2.3 Titularul activităților de seminar    |  |               |   |                        |   |                         |             |
| 2.4 Anul de studiu                        | 1  | 2.5 Semestrul | 2 | 2.6. Tipul de evaluare | E | 2.7 Regimul disciplinei | obligatorie |
| 2.8 Codul disciplinei                     | MLR0071  |               |   |                        |   |                         |             |

### 3. Timpul total estimat (ore pe semestru al activităților didactice)

|  |    |                    |    |                       |     |
|--|----|--------------------|----|-----------------------|-----|
| 3.1 Număr de ore pe săptămână  | 6  | Din care: 3.2 curs | 3  | 3.3 seminar/laborator | 3   |
| 3.4 Total ore din planul de învățământ   | 84 | Din care: 3.5 curs | 42 | 3.6 seminar/laborator | 42  |
| Distribuția fondului de timp:  |    |                    |    |                       | ore |
| Studiul după manual, suport de curs, bibliografie și notițe                                    |    |                    |    |                       | 20  |
| Documentare suplimentară în bibliotecă, pe platformele electronice de specialitate și pe teren |    |                    |    |                       | 10  |
| Pregătire seminarii/laboratoare, teme, referate, portofolii și eseuri                          |    |                    |    |                       | 20  |
| Tutoriat   |    |                    |    |                       | 6   |
| Examinări  |    |                    |    |                       | 10  |
| Alte activități: .....   |    |                    |    |                       |     |
| 3.7 Total ore studiu individual  |    | 66                 |    |                       |     |
| 3.8 Total ore pe semestru  |    | 150                |    |                       |     |
| 3.9 Numărul de credite   |    | 6                  |    |                       |     |

### 4. Precondiții (acolo unde este cazul)

|                   |  |
|-------------------|--|
| 4.1 de curriculum | <ul style="list-style-type: none"> <li>Analiză matematică 1 (Analiza pe <math>R</math>)</li> </ul> |
| 4.2 de competențe | <ul style="list-style-type: none"> <li>Gândire matematică, modelare, problematizare</li> </ul>     |

### 5. Condiții (acolo unde este cazul)

|  |  |
|--|--|
| 5.1 De desfășurare a cursului                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Sală de curs cu infrastructură adecvată</li> </ul>    |
| 5.2 De desfășurare a seminarului/laboratorului | <ul style="list-style-type: none"> <li>Sală de seminar cu infrastructură adecvată</li> </ul> |

## 6. Competențele specifice acumulate

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| <b>Competențe profesionale</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• C1.4 Recunoașterea principalelor clase/tipuri de probleme matematice și selectarea metodelor și a tehnicilor adecvate pentru rezolvarea lor</li> <li>• C2.1 Identificarea noțiunilor de bază utilizate în descrierea unor fenomene și procese</li> </ul>  |
| <b>Competențe transversale</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• CT1 Aplicarea regulilor de muncă riguroasă și eficientă, manifestarea unor atitudini responsabile față de domeniul științific și didactic, pentru valorificarea optimă și creativă a propriului potențial în situații specifice, cu respectarea principiilor și a normelor de etică profesională</li> </ul> |

## 7. Obiectivele disciplinei (reieșind din grila competențelor acumulate)

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 7.1 Obiectivul general al disciplinei | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cunoașterea topologiei spațiului euclidian <math>\mathbf{R}^n</math>, a calculului diferențial al funcțiilor de mai multe variabile, a funcțiilor cu variație mărginită, precum și a diferitelor tipuri de integrale pentru funcții de mai multe variabile (integrale multiple, integrale curbilinii și de suprafață)</li> </ul>   |
| 7.2 Obiectivele specifice             | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Prezentarea noțiunilor fundamentale și a unor rezultate de bază referitoare la topologia spațiului euclidian <math>\mathbf{R}^n</math></li> <li>• Prezentarea noțiunilor fundamentale și a unor rezultate de bază referitoare la calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile</li> <li>• Prezentarea funcțiilor cu variație mărginită și a principalelor proprietăți ale acestora</li> <li>• Prezentarea diferitelor tipuri de integrale pentru funcții de mai multe variabile (integrale multiple, integrale curbilinii și de suprafață), precum și a metodelor de calcul al acestora</li> </ul> |

## 8. Conținuturi

| 8.1 Curs  | Metode de predare   | Observații   |
|---|---|--|
| <p><b>1.</b> Topologie în <math>\mathbf{R}^n</math>: spațiul euclidian <math>\mathbf{R}^n</math> (produsul scalar, norma euclidiană, distanța euclidiană), structura topologică a spațiului <math>\mathbf{R}^n</math> (bile, vecinătăți, puncte interioare, exterioare, aderente, frontieră, de acumulare și izolate, mulțimi deschise și mulțimi închise). Șiruri de puncte din <math>\mathbf{R}^n</math>: șiruri convergente și șiruri fundamentale, caracterizarea secvențială a punctelor aderente, a punctelor de acumulare și a mulțimilor închise.</p> | Expunere, conversație, demonstrație didactica<br>problematizare | [3], pp. 110 – 132<br>pp. 159 – 185<br>[8], pp. 269 – 275                  |
| <p><b>2.</b> Mulțimi compacte în <math>\mathbf{R}^n</math>: definiția noțiunii de mulțime compactă, exemple de mulțimi compacte în <math>\mathbf{R}^n</math>, teorema de caracterizare a mulțimilor compacte din <math>\mathbf{R}^n</math>. Limite ale funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială: definiția limitei, caracterizarea secvențială a limitei, operații cu funcții care au limită.</p>  | Expunere, conversație, demonstrație didactica<br>problematizare | [3], pp. 132 – 142<br>pp. 185 – 187<br>pp. 232 – 244<br>[8], pp. 290 – 301 |
| <p><b>3.</b> Continuitatea funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială: definiția continuității într-un punct, caracterizarea secvențială a continuității, operații cu funcții continue, teorema lui</p>  | Expunere, conversație, demonstrație didactica<br>problematizare | [8], pp. 348 – 353   |

|  |  |  |
|--|--|--|
| Weierstrass. Aplicații liniare și norma acestora.  |  |  |
| <b>4.</b> Calcul diferențial în $\mathbf{R}^n$ : derivata unei funcții vectoriale de variabilă reală, teorema de medie pentru funcții vectoriale de variabilă reală. Diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială (definiția diferențialei, continuitatea funcțiilor diferențiabile, legătura dintre derivată și diferențială în cazul funcțiilor vectoriale de variabilă reală). | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [5], pp. 393 – 404<br>pp. 413 – 417                                |
| <b>5.</b> Calcul diferențial în $\mathbf{R}^n$ : derivata după o direcție a unei funcții vectoriale de variabilă vectorială și legătura ei cu diferențiala, derivate parțiale și legătura lor cu diferențiala. Operații cu funcții diferențiabile, diferențiabilitatea compusei, diferențiabilitatea inversei.   | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [5], pp. 343 – 350<br>pp. 417 – 422                                |
| <b>6.</b> Calcul diferențial în $\mathbf{R}^n$ : teoreme de medie pentru funcții de variabilă vectorială. Funcții de clasă $C^1$ , difeomorfisme de clasă $C^1$ . Teorema difeomorfismului local, funcții implicite de clasă $C^1$ , teorema funcției implicite.   | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [5], pp. 422 – 441   |
| <b>7.</b> Calcul diferențial în $\mathbf{R}^n$ : extreme condiționate, regula multiplicatorilor lui Lagrange, derivate parțiale de ordinul doi, teoremele lui Schwarz și Young referitoare la egalitatea derivatelor mixte, diferențiala a doua. Condiții necesare și condiții suficiente de extrem, derivate parțiale de ordin superior, diferențiale de ordin superior, formula lui Taylor.          | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [5], pp. 361 – 384<br>pp. 441 – 445                                |
| <b>8.</b> Integrala Riemann pe un interval compact în $\mathbf{R}^n$ : definiția integralei Riemann pe un interval compact în $\mathbf{R}^n$ , criterii de integrabilitate Riemann pe un interval compact în $\mathbf{R}^n$ (criteriile lui Heine, Cauchy și Darboux). Calculul integralelor Riemann pe intervale compacte prin reducere la integrale iterate (teorema lui Fubini).                    | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [6], pp. 192 – 198<br>[10]   |
| <b>9.</b> Integrala Riemann pe mulțimi mărginite din $\mathbf{R}^n$ : calculul integralelor Riemann pe mulțimi mărginite din $\mathbf{R}^n$ prin reducere la integrale iterate (teorema lui Fubini). Schimbarea variabilelor în integralele multiple. Aplicații în fizică ale integralei Riemann pe mulțimi mărginite din $\mathbf{R}^n$ : centre de greutate și momente de inerție.                   | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [6], pp. 224 – 234<br>pp. 329 – 335<br>[10]                        |
| <b>10.</b> Funcții vectoriale cu variație mărginită: noțiunea de funcție cu variație mărginită, exemple, proprietăți ale variației totale. aditivitatea variației totale față de interval, teorema de descompunere a lui Jordan, calculul variației totale în cazul funcțiilor de clasă $C^1$ .  | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [6], pp. 17, 21<br>[10], pp. 27 – 29<br>[11], pp. 114 – 115        |
| <b>11.</b> Integrale curbilinii: noțiunea de drum, exemple, drumuri echivalente, noțiunile de curbă și de curbă orientată. Forme diferențiale de gradul întâi. integrala unei forme diferențiale de gradul întâi pe un drum (integrala de al doilea tip de-a lungul unui drum) și semnificația fizică a acesteia.  | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [6], pp. 135 – 145<br>[11], pp. 111 – 113<br>pp. 126 – 128<br>[10] |
| <b>12.</b> Integrale curbilinii: formula lui Green, integrarea formelor diferențiale exacte, formula lui Leibniz-Newton, teorema lui Poincaré referitoare la integrarea formelor diferențiale exacte, aplicație la lucrul mecanic în câmpul gravitațional.   | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [6], pp. 205 – 213<br>[11], pp. 128 – 133<br>[10]                  |
| <b>13.</b> Integrale de suprafață: noțiunea de $k$ -pânză în $\mathbf{R}^n$ , exemple, noțiunea de bord al unei pânze de suprafață, exemple, pânze echivalente, noțiunile de suprafață și de suprafață orientată. Forme diferențiale de gradul doi, integrala unei forme diferențiale de gradul doi pe o pânză de  | Expunere, conversație, demonstrație didactica problematizare | [6], pp. 306 – 314<br>[10]   |

|   |  |  |
|---|--|--|
| suprafață (integrala de al doilea tip pe o pânză de suprafață).   |  |  |
| <b>14.</b> Formula lui Stokes. Formula lui Gauss-Ostrogradski: noțiunile de $k$ -lanț în $\mathbf{R}^n$ și de bord al unei $k$ -pânze în $\mathbf{R}^n$ , exemple, integrala unei forme diferențiale de gradul doi pe un 2-lanț în $\mathbf{R}^3$ , formula lui Gauss-Ostrogradski.   | Expunere, conversație, demonstrație didactică problematizare | [10]<br>[6], pp. 351 – 355               |
| <b>Bibliografie</b>   |  |  |
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. BALÁZS M., KOLUMBÁN I.: Matematikai analizis, Dacia Könyvkiado, Kolozsvár-Napoca, 1978.</li> <li>2. BOBOC N.: Analiză matematică. Vol. 2, Editura Universității din București, 1998.</li> <li>3. BRECKNER W. W.: Analiza matematica. Topologia spatiului <math>\mathbf{R}^n</math>. Universitatea din Cluj-Napoca, 1985.</li> <li>4. BROWDER A.: Mathematical Analysis. An Introduction, Springer-Verlag, New York, 1996.</li> <li>5. COBZAS ST.: Analiză matematică (Calcul diferențial), Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 1997.</li> <li>6. Colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București: Analiză matematică. Vol. 2, Editura didactică și pedagogică, București, 1980.</li> <li>7. FINTA Z.: Matematikai Analízis I, II, Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2007</li> <li>8. FITZPATRICK P.M.: Advanced Calculus: Second Edition, AMS, 2006.</li> <li>9. HEUSER H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 11. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1994; Teil 2, 9. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995.</li> <li>10. MEGAN M.: Bazele analizei matematice, Vol. I + Vol. II, Editura EUROBIT, Timisoara, 1997. Vol. III, Editura EUROBIT, Timisoara, 1998.</li> <li>11. NICULESCU C. P.: Calculul integral al funcțiilor de mai multe variabile. Teorie și aplicații. Editura Universitaria, Craiova, 2002.</li> <li>12. RUDIN W.: Principles of Mathematical Analysis, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 1964.</li> <li>13. WALTER W.: Analysis, I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1990.</li> </ol> |  |  |
| <b>8.2 Seminar / laborator</b>  | <b>Metode de predare</b>                                     | <b>Observații</b>                        |
| <b>1.</b> Spațiul euclidian $\mathbf{R}^n$ : probleme referitoare la spațiul euclidian $\mathbf{R}^n$ .   | Conversație, problematizare                                  | Setul de probleme al titularului de curs |
| <b>2.</b> Mulțimi compacte în $\mathbf{R}^n$ : probleme referitoare la mulțimi compacte în $\mathbf{R}^n$ .   | Conversație, problematizare                                  | [3], pp. 57 – 60                         |
| <b>3.</b> Limite ale funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială, continuitatea funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială. Aplicații liniare și norma acestora: calculul normelor unor aplicații liniare concrete.  | Conversație, problematizare                                  | [3], pp. 31 – 32<br>[8], pp. 45 – 46     |
| <b>4.</b> Derivate după direcții, derivate parțiale și diferențiale: se vor calcula derivatele după direcții, derivatele parțiale și diferențialele unor funcții concrete.  | Conversație, problematizare                                  | [8], pp. 46 – 49                         |
| <b>5.</b> Diferențiale: se va studia diferențiabilitatea unor funcții concrete. Operații cu funcții diferențiabile.   | Conversație, problematizare                                  | [8], pp. 50 – 56                         |
| <b>6.</b> Teoreme de medie pentru funcții de variabilă vectorială. Difeomorfisme și funcții implicite: aplicarea rezultatelor de la curs în situații concrete.  | Conversație, problematizare                                  | [8], pp. 56 – 69                         |
| <b>7.</b> Extreme libere și extreme condiționate, derivate parțiale de ordin superior: determinarea punctelor de extrem local al funcțiilor reale de variabilă vectorială, determinarea derivatelor parțiale de ordin superior.   | Conversație, problematizare                                  | [8], pp. 73 – 79                         |
| <b>8.</b> Calculul unor integrale duble pe dreptunghiuri. Calculul unor integrale triple pe paralelipipede. Integrale duble și triple pe mulțimi simple în raport cu o axă.   | Conversație, problematizare                                  | [8], pp. 84 – 86<br>p. 91                |
| <b>9.</b> Calculul integralelor duble cu ajutorul schimbărilor de variabile (coordonate polare).  | Conversație, problematizare                                  | [8], pp. 87 – 91                         |

|  |                             |  |
|--|-----------------------------|--|
| <b>10.</b> Calculul integralelor triple cu ajutorul schimbărilor de variabile (coordonate sferice, coordonate cilindrice).   | Conversație, problematizare | [8], pp. 92 – 94   |
| <b>11.</b> Probleme referitoare la funcții cu variație mărginită. Integrala de primul tip de-a lungul unui drum: definiție, principalele rezultate teoretice, calculul unor integrale de primul tip de-a lungul unor drumuri.  | Conversație, problematizare | [1], pp. 5 – 44<br>pp. 166 – 185<br>[2], pp. 44 – 48<br>[4], pp. 69 – 70<br>[5], pp. 10 – 15 |
| <b>12.</b> Integrala de al doilea tip de-a lungul unui drum: calculul integralelor unor forme diferențiale de gradul întâi pe drumuri concrete. Integrarea unor forme diferențiale de gradul întâi exacte. Probleme referitoare la formula lui Green.  | Conversație, problematizare | [1], pp. 185 – 228<br>[2], pp. 49 – 55<br>pp. 107 – 109<br>[4], pp. 70 – 73<br>p. 74         |
| <b>13.</b> Integrala de primul tip pe o pânză de suprafață: definiție și semnificația fizică a acesteia, calculul unor integrale de primul tip pe pânze de suprafață concrete. Integrala de al doilea tip pe o pânză de suprafață: calculul integralelor unor forme diferențiale de gradul doi pe pânze de suprafață concrete. | Conversație, problematizare | [2], pp. 91 – 96<br>pp. 101 – 104<br>[4], p. 87 – 88   |
| <b>14.</b> Probleme referitoare la formulele integrale ale lui Stokes și Gauss-Ostrogradski.   | Conversație, problematizare | [2], pp. 109 – 113   |

#### Bibliografie

1. BUCUR G., CÂMPU E., GAINA S.: Culegere de probleme de calcul diferential si integral, Vol. II, Editura Tehnica Bucuresti 1966. Vol. III, Editura Tehnica, Bucuresti, 1967.
2. CĂTINAȘ D. et al.: Calcul integral. Culegere de probleme pentru seminarii, examene și concursuri. Editura U. T. Pres, Cluj-Napoca, 2000.
3. DE SOUZA P. N., SILVA J.-N.: Berkeley Problems in Mathematics. Springer, 1998.
4. DONCIU N., FLONDOR D.: Analiză matematică. Culegere de problema. Vol. 2, Editura All, București, 1998.
5. KACZOR W. J., NOWAK M. T.: Problems in Mathematical Analysis III: Integration. American Mathematical Society, 2003.
6. KEDLAYA K. S., POONEN B., VAKIL R.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985 – 2000. Problems, Solutions, and Commentary. The Mathematical Association of America, 2002.
7. RĂDULESCU S., RĂDULESCU M.: Teoreme și probleme de analiză matematică. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
8. TRIF T.: Probleme de calcul diferential si integral în  $\mathbb{R}^n$ , Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 2003.

#### **9. Coroborarea conținuturilor disciplinei cu așteptările reprezentanților comunității epistemice, asociațiilor profesionale și angajatori reprezentativi din domeniul aferent programului**

- Tematica acestui curs (topologia spațiului euclidian  $\mathbf{R}^n$ , calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile, funcții cu variație mărginită și diferitele tipuri de integrale pentru funcții de mai multe variabile – integrale multiple, integrale curbilinii și de suprafață) este prevăzută în programul de studii al tuturor universităților importante din România și din lume. Ea constituie o parte indispensabilă a pregătirii viitorilor profesori de matematică, a viitorilor cercetători în domeniul matematicii, cât și a celor care activează în alte domenii care aplică nemijlocit metodele matematicii.

## 10. Evaluare

| Tip activitate  | 10.1 Criterii de evaluare  | 10.2 metode de evaluare   | 10.3 Pondere din nota finală |
|---|--|---|------------------------------|
| 10.4 Curs   | - cunoașterea noțiunilor și a rezultatelor de bază<br>- cunoașterea demonstrațiilor principalelor rezultate teoretice<br>- aplicarea rezultatelor teoretice de bază la rezolvarea unor probleme concrete | Examen partial la mijlocul semestrului<br><br>Examen scris la sfârșitul semestrului | 50%<br><br>50%               |
| 10.5 Seminar/laborator  | - rezolvarea unor probleme concrete cu ajutorul rezultatelor teoretice de la curs  |   |                              |
| 10.6 Standard minim de performanță  |  |   |                              |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Definirea noțiunilor, enunțarea rezultatelor teoretice fundamentale și aplicarea acestora în rezolvarea de probleme simple</li><li>• Identificarea și selectarea metodelor pentru abordarea unor probleme concrete simple</li></ul> |  |   |                              |

Data completării

Semnătura titularului de curs

Semnătura titularului de seminar

28 aprilie 2021

.....

.....

Data avizării în departament

Semnătura directorului de departament

.....

.....