

ZULASSUNG 2024

Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

**WICHTIGER HINWEIS:** Die gestellten Aufgaben können eine oder mehrere richtige Antworten haben, die der Kandidat auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angeben muss. Die Bewertung der gegebenen Antworten erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung festgesetzten Benotungssystem.

1. Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = 3^{x+1} - 9^x,$$

dann ist der Wert  $f(\log_3 4)$  gleich

A 4;

B -4;

C -11;

D -3.

2. Im Parallelogramm  $ABCD$  gelten  $AB = 2$ ,  $AD = 1$  und  $\widehat{C} = 60^\circ$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A  $BC = 1$ .

B  $CD = 1$ .

C  $AC = \sqrt{3}$ .

D  $BD = \sqrt{3}$ .

3. Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2^n} - \sqrt{n})$  ist

A 0;

B 2;

C 1;

D  $+\infty$ .

4. Es sei  $A$  eine Menge mit  $n$  Elementen. Wenn es 21 Teilmengen mit 2 Elementen der Menge  $A$  gibt, dann

A ist  $n \in (2, 6]$ ;

C ist  $n \in (10, 14]$ ;

B ist  $n \in (6, 10]$ ;

D gibt es keine solchen Werte von  $n$ .

5. Es sei  $S$  die Menge der reellen Lösungen der Gleichung

$$4^x - 2^x \cdot 3^{x+1} = 4 \cdot 9^x.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A  $S$  hat genau zwei Elemente.

C  $\frac{2}{1 - \log_2 3} \in S$ .

B  $S$  hat genau ein Element.

D  $\frac{2}{1 + \log_2 3} \in S$ .

6. Im Dreieck  $ABC$  gelten  $E \in (AB)$ ,  $EB = 3 \cdot EA$ ,  $F \in (AC)$  und  $FC = 2 \cdot FA$ . Haben die Punkte  $A$ ,  $E$  und  $F$  jeweils die Koordinaten  $A(1, 3)$ ,  $E(3, 6)$  und  $F(4, 18)$ , dann sind die Koordinaten des Schwerpunktes  $G$  des Dreiecks  $ABC$

- A  $G\left(\frac{31}{6}, \frac{89}{6}\right)$ ;     
 B  $G\left(\frac{20}{3}, 22\right)$ ;     
 C  $G\left(\frac{61}{18}, \frac{73}{6}\right)$ ;     
 D  $G\left(\frac{50}{9}, 22\right)$ .

7. Im Dreieck  $ABC$  sind die Punkte  $D(2, 1)$ ,  $E(-2, 5)$  und  $F(1, 4)$  jeweils die Mittelpunkte der Seiten  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$ . Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  beträgt

- A 2;     
 B 4;     
 C 8;     
 D 16.

8. Der Wert des Integrals  $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx$  ist

- A  $\frac{\pi}{6}$ ;     
 B  $\frac{\pi}{3}$ ;     
 C  $\frac{\pi}{12}$ ;     
 D  $\frac{\pi}{2}$ .

9. Gegeben seien die reelle Zahl  $a$ , die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , sowie die Punkte  $A(0, 1)$  und  $B(2, 7)$ . Der Wert von  $a$ , für den die Gerade  $AB$  die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $A$  ist, beträgt

- A 5;     
 B 3;     
 C 0;     
 D -3.

10. Im Parallelogramm  $ABCD$  sind  $A(2, 1)$ ,  $B(4, 3)$  und  $C(7, 2)$ . Die Gleichung der Geraden  $BD$  ist

- A  $x - y - 1 = 0$ ;     
 B  $x + 3y - 13 = 0$ ;     
 C  $x - 5y + 3 = 0$ ;     
 D  $3x + y = 15$ .

11. Es sei  $\alpha \in (\pi, 2\pi)$  mit  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .     
 B  $\cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .     
 C  $\sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$ .     
 D  $\cos(2\alpha) = \frac{3}{5}$ .

12. Es sei  $ABCD$  ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ .     
 B  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 1$ .     
 C  $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .     
 D  $\vec{AB} \cdot \vec{DB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

13. Die ganzen Zahlen  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_9, b_{10}$  sind aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge mit dem Quotienten  $q = 2$ . Es sei

$$S = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $S$  ist durch 11 teilbar.  
 B Ist  $S$  eine Quadratzahl, dann ist  $b_1$  durch 31 teilbar.  
 C Ist  $b_1$  eine ungerade Zahl, dann ist  $S$  eine gerade Zahl.  
 D Ist  $b_1$  eine ungerade Zahl, dann ist  $S$  eine ungerade Zahl.

14. Gegeben seien ein reeller Parameter  $a$  sowie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -x - 2y + z = a \\ x + ay + 2z = -2. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Es gibt  $a \in \mathbb{R}$ , für welche die Determinante der Matrix des Systems 0 ist.
- B Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  hat das System eine einzige Lösung.
- C Für  $a = 1$  ist  $x + y + 2z = 1$ .
- D Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist  $x + y + 2z < 0$ .

15. In der Permutationsgruppe  $S_4$  betrachte man die Elemente

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist  $x \in S_4$  eine Permutation mit  $x\sigma = \tau$ , dann ist

- A  $x$  nicht eindeutig bestimmt;
- B  $x$  eindeutig bestimmt;
- C  $x^2 = \tau$ ;
- D  $x^2 = \sigma$ .

16. Gegeben seien die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = |x|$  und  $g(x) = x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Funktion  $f + g$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ .
- B Die Funktion  $f + g$  ist streng monoton auf  $\mathbb{R}$ .
- C Die Funktion  $f$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar.
- D Die Funktion  $f \cdot g$  ist in 0 differenzierbar.

17. Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  die durch

$$f(x) = \frac{x}{ax^2 + bx + 8}$$

definierte Funktion, wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$  der maximale Definitionsbereich von  $f$  ist. Ist  $x = -2$  eine lokale Extremstelle von  $f$  und ist die Gerade mit der Gleichung  $x = 2$  eine senkrechte Asymptote des Graphen von  $f$ , dann ist die Summe  $a + b$  gleich

- A  $-6$ ;
- B  $-10$ ;
- C  $10$ ;
- D  $-2$ .

18. Es seien  $m \in \mathbb{R}$  ein Parameter und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$  definierte Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Der Graph von  $f$  hat eine Asymptote bei  $+\infty$ .
- B Ist  $m = 2024$ , dann hat  $f$  eine globale Maximalstelle.
- C Die Funktion  $f$  hat für alle  $m \in \mathbb{R}$  genau zwei lokale Extremstellen.
- D Es gibt  $m \in \mathbb{R}$ , für welche  $f$  genau eine lokale Extremstelle hat.

19. Es seien  $\vec{i}$  und  $\vec{j}$  die Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems. Stehen die Vektoren  $\vec{u} = (p+5)\vec{i} + 2\vec{j}$  und  $\vec{v} = 4\vec{i} + 10\vec{j}$  senkrecht aufeinander, dann kann der Wert des Parameters  $p \in \mathbb{R}$

- A  $-10$ ;                       B  $-\frac{21}{5}$ ;                       C  $0$ ;                       D  $\frac{29}{5}$

sein.

20. Im Dreieck  $ABC$  sind  $A(1, 0)$ ,  $B\left(5, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$  und  $\hat{A} = 60^\circ$ . Die Gleichung der Geraden  $AC$  kann

- A  $3y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$ ;       B  $3y - \sqrt{3}x = -\sqrt{3}$ ;       C  $y - \sqrt{3}x = -\sqrt{3}$ ;       D  $x = 1$

sein.

21. Für eine Matrix  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  bezeichnet man mit  $\text{Tr}(X)$  die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $X$ . Ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

dann beträgt der Ausdruck  $\text{Tr}(A^3) + \det(A^3)$  den Wert

- A  $-1$ ;                       B  $1$ ;                       C  $0$ ;                       D  $2$ .

22. Sind  $x_1, x_2$  și  $x_3$  die Wurzeln des Polynoms

$$f = X^3 + X^2 + 10X + 2,$$

dann ist der Wert des Ausdrucks  $\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}$  gleich

- A  $0$ ;                       B  $\frac{13}{8}$ ;                       C  $\frac{13}{7}$ ;                       D  $-\frac{13}{8}$ .

23. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $f(x) = \frac{x^2}{1 + e^x}$  definierte Funktion. Der Flächeninhalt der Menge, die sich zwischen dem Graphen von  $f$ , der  $Ox$ -Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen  $x = -1$  und  $x = 1$  befindet, beträgt

- A  $0$ ;                       B  $\frac{2}{3}$ ;                       C  $\frac{1}{3}$ ;                       D  $\frac{1}{6}$ .

24. Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^{1/\ln x}$  ist gleich

- A  $e$ ;                       B  $\frac{1}{e}$ ;                       C  $\frac{1}{e^2}$ ;                       D  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ .

Richtige Antworten

ZULASSUNG 2024

Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

1.  B
2.  A,  D
3.  D
4.  B
5.  B,  C
6.  B
7.  D
8.  A
9.  B
10.  D
11.  A,  B,  D
12.  A
13.  A,  B,  D
14.  B,  D
15.  B
16.  A,  D
17.  A
18.  A,  C
19.  A
20.  A,  D
21.  C
22.  D
23.  C
24.  C