BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MATE-INFO UBB verseny – 2024
MATEMATIKA írásbeli próba

FONTOS MEGJEGYZÉS: A feladatoknak egy vagy több helyes válasza is lehet, amelyeket a versenyző az erre a célra kapott lapon kell bejelöljön. A feleletválasztós feladatsor értékelése a versenyszabályzat részleges pontozási rendszere alapján történik.

1. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = 1$, $AD = 2$ és $m(\widehat{B}) = 60°$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$. B $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$. C $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = -1$. D $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 1$.

2. Ha az $A(1,2)$ és $B(4,6)$ pontok az $ABCD$ téglalap csúcsai, akkor az AD egyenes egyenlete:

A $4x + 3y - 11 = 0$; B $3x + 4y - 11 = 0$; C $4x - 3y + 2 = 0$; D $4x + 3y + 2 = 0$.

3. Adottak egy Descartes-féle koordináta-rendszer $\overrightarrow{i}$ és $\overrightarrow{j}$ egységvektorai. Ha az $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ és $\overrightarrow{v} = (b+4)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ vektorok merőlegesek egymásra, akkor a $b \in \mathbb{R}$ paraméter értéke:

A -2; B -1; C 1; D 2.

4. Ha az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra teljesül, hogy $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, akkor az X elemeinek összege:

A -2; B 0; C 2; D 4.

5. Adott az

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ x - 2y + az &= a \\ 3x + 2y + z &= 2 \end{cases}$$

egyenletrendszer, ahol a egy valós paraméter. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Egyetlen $a \in \mathbb{R}$ paraméter létezik, amelyre az egyenletrendszer inkompatibilis.
B Az egyenletrendszer minden $a \in \mathbb{R}$ paraméter esetén kompatibilis.
C Ha a rendszer determinánsa 16, akkor $x = \frac{7}{8}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{3}{8}$ az egyenletrendszernek megoldása.
D Ha a rendszer determinánsa 16, akkor $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$ az egyenletrendszernek megoldása.

6. A $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x^2 e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ határérték

A $\sqrt{e}$; B 1; C e; D e^2.

7. Adottak az $a, b, c \in \mathbb{R}$ számok és a következőképpen értelmezett $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \le 0 \\ ae^{-x} + be^x + cx\left(e^x - e^{-x}\right), & \text{ha } 0 < x < 1 \\ e^{2-x}, & \text{ha } x \ge 1. \end{cases}$$

Ha az f függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, akkor az $a + 2b + c$ összeg értéke:

A 0; B 2; C 1; D $\frac{1}{2}$.

8. Adott $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $\sin(x) = \frac{1}{3}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B $\sin(2x) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$. C $\cos(2x) = \frac{7}{9}$. D $\operatorname{tg}(x) = -2\sqrt{2}$.

9. Az ABC háromszögben $D \in (AB)$, $DB = 2 \cdot AD$, $E \in (AC)$ és $AC = 3 \cdot EC$. Ha az A, D és E pontok koordinátái $A(0,6)$, $D(4,4)$ és $E(-4,2)$, akkor az ABC háromszög G súlypontjának koordinátái:

A $G(2,2)$; B $G\left(\frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right)$; C $G(0,0)$; D $G\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

10. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{98}, a_{99}, a_{100}$ valós számok egy számtani haladványt alkotnak és

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{98} + a_{99} + a_{100} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{96} + a_{98} + a_{100} = 200.$$

Ha d a számtani haladvány állandó különbsége, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $d > 0$.
B $d < 0$.
C A számtani haladvány egyértelműen meghatározott a megadott feltételek által.
D Nem létezik ilyen számtani haladvány.

11. Ha $x > 0$ és az $\left(\frac{1}{x} + (\sqrt{x})^{1+\lg x}\right)^5$ kifejtésében a harmadik tag egyenlő 10000-rel, akkor

A $x \in \left\{\frac{1}{10}, 10\right\}$; B $x \in \left\{\frac{1}{1000}, 1000\right\}$; C $x \in \left\{\frac{1}{10}, 1000\right\}$; D $x \in \left\{\frac{1}{1000}, 10\right\}$.

12. Ha S-sel jelöljük a

$$\sqrt{x - 6\sqrt{x+1} + 10} + \sqrt{x + 6\sqrt{x+1} + 10} = 6$$

egyenlet valós megoldásainak halmazát, akkor

A $3 \in S$; B $15 \in S$; C S véges halmaz; D S végtelen halmaz.

13. Az $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2}$ képlettel értelmezzük. Jelölje a az f függvény legkisebb értékét és b pedig az f függvény legnagyobb értékét. Ekkor az $[a, b]$ intervallum hossza:

A 2; B 6; C 8; D 10.

14. Jelölje I az $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + x^2 + x + 1}$ értékét. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $I > \frac{\pi}{8}$. B $I < \frac{\pi}{8}$. C $I < \frac{1}{4}\ln 2$. D $I > \frac{1}{4}\ln 2$.

15. Az ABC háromszögben $A(3,4)$ és $B(2,1)$, míg a BC szakasz felezőpontja $D(0,2)$. Ekkor az ABC háromszög területe

A 1; B 3; C 5; D 7.

16. Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ és $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = 0\}$, akkor

$\boxed{\text{A}}$ $1 \in S$;

$\boxed{\text{B}}$ $-1 \in S$;

$\boxed{\text{C}}$ az S halmazban pontosan két irracionális szám található;

$\boxed{\text{D}}$ az S halmazban egyetlen egy irracionális szám található.

17. Ha z egy olyan komplex szám, amelyre $z^2 = i$, akkor a $(z^3 + \overline{z})^2$ értéke

$\boxed{\text{A}}$ $-2i$; $\boxed{\text{B}}$ $2i$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 0.

18. A $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$ értéke

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{4}$.

19. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ képlettel értelmezzük. Az f függvény grafikonja, az Ox tengely, illetve az $x = -1$ és $x = 1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

20. Az $ABCD$ rombuszban $E \in (BC)$, $BE = 2 \cdot EC$, $F \in (DC)$ és $FD = 3 \cdot FC$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. $\boxed{\text{B}}$ $\overrightarrow{BE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. $\boxed{\text{C}}$ $\overrightarrow{DF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. $\boxed{\text{D}}$ $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

21. Az ABC háromszögben $A(2, 13)$, $B(-7, 1)$ és $C(7, 1)$. Ha $D \in (BC)$ az AD szögfelező talppontja, akkor a BD szakasz hossza:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{13}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 7; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{15}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 8.

22. Ha az $f\colon (\mathbb{Z}_8, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$ függvény egy csoportmorfizmus és $f(\hat{5}) = \hat{9}$, akkor

$\boxed{\text{A}}$ $f(\hat{1}) = \hat{0}$;

$\boxed{\text{B}}$ $f(\hat{1}) = \hat{9}$;

$\boxed{\text{C}}$ az $f(\hat{1})$ nem egyértelműen meghatározott a megadott feltételek által;

$\boxed{\text{D}}$ nem létezik ilyen csoportmorfizmus.

23. Jelölje A azon (x, y) valós számpárok halmazát, amelyekre fennáll, hogy $0 \leq x < y$ és $\dfrac{x}{2024^x} = \dfrac{y}{2024^y}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az A üres halmaz.

$\boxed{\text{B}}$ Az A halmaz egyetlen egy elemet tartalmaz.

$\boxed{\text{C}}$ Az A halmaz végtelen sok elemet tartalmaz.

$\boxed{\text{D}}$ Az A halmaznak van egy $(x, 1)$ alakú eleme.

24. Egy $a \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az $(x_n)_{n\geq 0}$ számsorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_0 = a$ és $x_{n+1} = x_n + x_n^2$, minden $n \geq 0$ esetén. Azon a számok halmaza, amelyekre a sorozat konvergens

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1, 0\}$; $\boxed{\text{B}}$ $[-1, 0]$; $\boxed{\text{C}}$ $[0, 1]$; $\boxed{\text{D}}$ $(-\infty, 0]$.

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Helyes válaszok

BBTE Matek-Infó Verseny, 2024

MATEMATIKA írásbeli próba

1. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
2. $\boxed{\textbf{B}}$
3. $\boxed{\textbf{A}}$
4. $\boxed{\textbf{C}}$
5. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
6. $\boxed{\textbf{D}}$
7. $\boxed{\textbf{B}}$
8. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
9. $\boxed{\textbf{A}}$
10. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
11. $\boxed{\textbf{C}}$
12. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
13. $\boxed{\textbf{C}}$
14. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
15. $\boxed{\textbf{D}}$
16. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
17. $\boxed{\textbf{D}}$
18. $\boxed{\textbf{C}}$
19. $\boxed{\textbf{A}}$
20. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
21. $\boxed{\textbf{C}}$
22. $\boxed{\textbf{B}}$
23. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
24. $\boxed{\textbf{B}}$