BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2024
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIGER HINWEIS: Die gestellten Aufgaben können eine oder mehrere richtige Antworten haben, die der Kandidat auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angeben muss. Die Bewertung der gegebenen Antworten erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung festgesetzten Benotungssystem.

1. Im Paralellogramm $ABCD$ sind $AB = 1$, $AD = 2$ und $m(\widehat{B}) = 60°$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$. B $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$. C $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = -1$. D $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 1$.

2. Sind die Punkte $A(1, 2)$ und $B(4, 6)$ Eckpunkte des Rechtecks $ABCD$, dann ist die Gleichung der Geraden AD:

A $4x + 3y - 11 = 0$; B $3x + 4y - 11 = 0$; C $4x - 3y + 2 = 0$; D $4x + 3y + 2 = 0$.

3. Es seien $\overrightarrow{i}$ und $\overrightarrow{j}$ die Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems. Stehen die Vektoren $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ und $\overrightarrow{v} = (b+4)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ senkrecht aufeinander, dann ist der Wert des Parameters $b \in \mathbb{R}$ gleich:

A -2; B -1; C 1; D 2.

4. Genügt die Matrix $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ der Gleichheit $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, dann ist die Summe der Elemente der Matrix X gleich:

A -2; B 0; C 2; D 4.

5. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ x - 2y + az &= a \\ 3x + 2y + z &= 2, \end{cases}$$

wobei a ein reeller Parameter ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Es gibt einen einzigen Wert $a \in \mathbb{R}$, für den das System unlösbar ist.
B Das System ist für alle $a \in \mathbb{R}$ lösbar.
C Beträgt die Determinante des Systems 16, dann ist die Lösung des Systems $x = \frac{7}{8}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{3}{8}$.
D Beträgt die Determinante des Systems 16, dann ist die Lösung des Systems $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$.

6. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x^2 e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ ist:

A $\sqrt{e}$; B 1; C e; D e^2.

7. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq 0 \\ a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{x} + cx\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right), & \text{falls } 0 < x < 1 \\ \mathrm{e}^{2-x}, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Ist f auf $\mathbb{R}$ stetig, dann ist die Summe $a + 2b + c$ gleich:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}$.

8. Es sei $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ mit $\sin(x) = \frac{1}{3}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. $\boxed{\text{B}}$ $\sin(2x) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$. $\boxed{\text{C}}$ $\cos(2x) = \frac{7}{9}$. $\boxed{\text{D}}$ $\operatorname{tg}(x) = -2\sqrt{2}$.

9. Im Dreieck ABC sind $D \in (AB)$, $DB = 2 \cdot AD$, $E \in (AC)$ und $AC = 3 \cdot EC$. Haben die Punkte A, D und E jeweils die Koordinaten $A(0, 6)$, $D(4, 4)$ und $E(-4, 2)$, dann sind die Koordinaten des Schwerpunktes G des Dreiecks ABC:

$\boxed{\text{A}}$ $G(2, 2)$; $\boxed{\text{B}}$ $G\left(\frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $G(0, 0)$; $\boxed{\text{D}}$ $G\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

10. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{98}, a_{99}, a_{100}$ bilden eine arithmetische Zahlenfolge mit

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{98} + a_{99} + a_{100} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{96} + a_{98} + a_{100} = 200.$$

Es sei d die Differenz der arithmetischen Zahlenfolge. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $d > 0$.
$\boxed{\text{B}}$ $d < 0$.
$\boxed{\text{C}}$ Die arithemtische Zahlenfolge ist durch die gegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt.
$\boxed{\text{D}}$ Es gibt keine solche arithemtische Zahlenfolge.

11. Ist $x > 0$ und ist der dritte Term der Entwicklung $\left(\frac{1}{x} + (\sqrt{x})^{1+\lg x}\right)^5$ gleich 10000, dann ist:

$\boxed{\text{A}}$ $x \in \left\{\frac{1}{10}, 10\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $x \in \left\{\frac{1}{1000}, 1000\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $x \in \left\{\frac{1}{10}, 1000\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $x \in \left\{\frac{1}{1000}, 10\right\}$.

12. Bezeichnet man mit S die Menge der reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x - 6\sqrt{x+1} + 10} + \sqrt{x + 6\sqrt{x+1} + 10} = 6,$$

dann ist:

$\boxed{\text{A}}$ $3 \in S$; $\boxed{\text{B}}$ $15 \in S$; $\boxed{\text{C}}$ die Menge S endlich; $\boxed{\text{D}}$ die Menge S unendlich.

13. Es sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2}$ definierte Funktion. Es seien a der kleinste Wert von f, und b der größte Wert von f. Dann ist die Länge des Intervalls $[a, b]$ gleich:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ 8; $\boxed{\text{D}}$ 10.

14. Es sei I der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x+1}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $I > \dfrac{\pi}{8}$. B $I < \dfrac{\pi}{8}$. C $I < \dfrac{1}{4}\ln 2$. D $I > \dfrac{1}{4}\ln 2$.

15. Im Dreieck ABC sind $A(3,4)$, $B(2,1)$ und $D(0,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke BC. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich:

A 1; B 3; C 5; D 7.

16. Sind $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$, und $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = 0\}$, dann:

A ist $1 \in S$; B ist $-1 \in S$; C gibt es genau zwei irrationale Zahlen in S;
D gibt es eine einzige irrationale Zahl in S.

17. Ist z eine komplexe Zahl, so dass $z^2 = i$, dann ist $(z^3 + \overline{z})^2$ gleich:

A $-2i$; B $2i$; C 2; D 0.

18. Der Wert des Grenzwertes $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$ beträgt:

A 0; B 1; C $\dfrac{1}{2}$; D $\dfrac{1}{4}$.

19. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ definierte Funktion. Der Flächeninhalt der ebenen Menge, die sich zwischen dem Graphen von f, der Ox-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ befindet, beträgt:

A $\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; B $\sqrt{2}$; C $\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; D $2\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

20. Im Rhombus $ABCD$ gelten $E \in (BC)$, $BE = 2 \cdot EC$, $F \in (DC)$ und $FD = 3 \cdot FC$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. B $\overrightarrow{BE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. C $\overrightarrow{DF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. D $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

21. Im Dreieck ABC sind $A(2,13)$, $B(-7,1)$ und $C(7,1)$. Ist AD eine Winkelhalbierende mit $D \in (BC)$, so beträgt die Länge der Strecke BD:

A $\dfrac{13}{2}$; B 7; C $\dfrac{15}{2}$; D 8.

22. Ist die Funktion $f\colon (\mathbb{Z}_8, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus mit $f(\hat{5}) = \hat{9}$, dann:

A ist $f(\hat{1}) = \hat{0}$; B ist $f(\hat{1}) = \hat{9}$;
C ist $f(\hat{1})$ durch die gegebenen Bedingungen nicht eindeutig bestimmt;
D gibt es keinen solchen Homomorphismus.

23. Es sei A die Menge gebildet aus allen Paaren reeller Zahlen (x, y) mit der Eigenschaft, dass $0 \le x < y$ und $\dfrac{x}{2024^x} = \dfrac{y}{2024^y}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Menge A ist leer. B Die Menge A enthält ein einziges Element.
C Die Menge A enthält unendlich viele Elemente. D Die Menge A enthält ein Element der Form $(x, 1)$.

24. Es seien $a \in \mathbb{R}$ sowie $(x_n)_{n\ge 0}$ die durch $x_0 = a$ und $x_{n+1} = x_n + x_n^2$, für alle $n \ge 0$, erklärte Folge. Die Menge aller Werte a, für welche die Folge konvergiert, ist:

A $\{-1, 0\}$; B $[-1, 0]$; C $[0, 1]$; D $(-\infty, 0]$.

BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Richtige Antworten

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2024

Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

1. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

2. $\boxed{\textbf{B}}$

3. $\boxed{\textbf{A}}$

4. $\boxed{\textbf{C}}$

5. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

6. $\boxed{\textbf{D}}$

7. $\boxed{\textbf{B}}$

8. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

9. $\boxed{\textbf{A}}$

10. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

11. $\boxed{\textbf{C}}$

12. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

13. $\boxed{\textbf{C}}$

14. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

15. $\boxed{\textbf{D}}$

16. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

17. $\boxed{\textbf{D}}$

18. $\boxed{\textbf{C}}$

19. $\boxed{\textbf{A}}$

20. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

21. $\boxed{\textbf{C}}$

22. $\boxed{\textbf{B}}$

23. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

24. $\boxed{\textbf{B}}$