

**Zulassung 2023**  
**Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK**

**WICHTIGER HINWEIS:** Die gestellten Aufgaben können eine oder mehrere richtige Antworten haben, die der Kandidat auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angeben muss. Die Bewertung der gegebenen Antworten erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung festgesetzten Benotungssystem.

1. Sind  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x + 1$  und  $g(x) = 2x + 1$ , dann ist  $g(f(1))$  gleich mit

- A 6;                       B 7;                       C 8;                       D 9.

2. Wenn die Wurzeln der Gleichung zweiten Grades mit Parameter  $m \in \mathbb{R}$

$$x^2 - mx + m = 0$$

keine reelle Zahlen sind, dann

- A  $m \in (-\infty, -4]$ ;    B  $m \in (-4, 0]$ ;    C  $m \in (0, 4)$ ;    D existiert kein solcher Parameter  $m \in \mathbb{R}$ .

3. Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$  ist

- A  $\frac{1}{2}$ ;                       B 1;                       C 2;                       D  $+\infty$ .

4. Es sei  $ABC$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $A(-2, -1)$ ,  $B(-1, 2)$  und  $C(6, -3)$ . Die Länge der Seitenhalbierenden aus dem Eckpunkt  $B$  ist

- A 4;                       B  $2\sqrt{3}$ ;                       C  $3\sqrt{2}$ ;                       D 5.

5. Gegeben seien die Vektoren  $\vec{x} = 2\vec{i} + a\vec{j}$  und  $\vec{y} = b\vec{i} + 3\vec{j}$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  und die Einheitsvektoren  $\vec{i}$  und  $\vec{j}$  senkrecht aufeinander stehen. Aus welchen der folgenden Aussagen folgt, dass die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  kollinear sind?

- A  $a = 1, b = 6$ ;                       B  $a \cdot b = 6$ ;                       C  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ;                       D  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sqrt{a^2 + 4} \cdot \sqrt{b^2 + 9}$ .

6. Der Wert des Ausdrucks  $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$  ist gleich mit

- A  $\sqrt{3}$ ;                       B  $\sqrt{2}$ ;                       C  $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ;                       D 2.

7. Gegeben sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^3, & x < 0 \\ 2x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $f(-2) = f(2)$ ;                       B  $f$  ist injektiv;                       C  $f$  ist surjektiv;                       D  $\text{Im } f = [0, +\infty)$ .

8. Gegeben seien die Gerade  $d : x - 2y = 0$  und die Punkte  $M(3, 4)$ ,  $O(0, 0)$ . Die Koordinaten des Punktes  $N$ , so dass  $N$  der Geraden  $d$  angehört und das Dreieck  $MNO$  rechtwinklig in  $N$  ist, können

A  $N(4, 2)$ ;                       B  $N(6, 3)$ ;                       C  $N(5, \frac{5}{2})$ ;                       D  $N(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

sein.

Die Aufgaben 9 und 10 beziehen sich auf die Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 \cos x + \cos(2x)$ .

9.  $f(\pi)$  ist gleich mit

- A  $-3$ ;                                       B  $-2$ ;                                       C  $2$ ;                                       D  $3$ .

10. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung  $f(x) = 1$  ist

- A  $0$ ;                                       B  $1$ ;                                       C  $2$ ;                                       D  $4$ .

11. Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$  ist

- A  $+\infty$ ;                                       B  $-\frac{1}{4}$ ;                                       C  $\frac{1}{8}$ ;                                       D  $-\frac{1}{8}$ .

12. Sei  $S$  die Menge der Lösungen der Gleichung

$$\bar{z}z^2 = 2 + 2i,$$

wobei  $z$  eine komplexe Zahl ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $1 + i \in S$ .                                       B Ist  $w \in S$ , dann gilt  $|w| = \sqrt{2}$ .  
 C Ist  $w \in S$ , dann gilt  $\bar{w} \in S$ .                       D Die Anzahl der Elemente in  $S$  ist 2.

13. Gegeben seien  $a$  ein reeller Parameter und das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + ay + az = 0 \\ x - y + az = 0. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Das System ist lösbar für jeden Wert von  $a$ .  
 B Es existiert  $a \in \mathbb{R}$ , so dass das System keine Lösung hat.  
 C Es existiert eine einzige Zahl  $a$ , für welche die Determinante der Matrix des Systems gleich 0 ist.  
 D  $z$  hat den gleichen Wert für jeden Parameter  $a$ , für welchen das System lösbar ist.

14. Im spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  sind die Seitenlängen  $a = BC = 2$ ,  $b = AC = \sqrt{6}$  und der Radius des Umkreises des Dreiecks  $R = \sqrt{2}$  gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $A = 45^\circ$ ;                                       B  $B = 30^\circ$ ;                                       C  $B = 60^\circ$ ;                                       D  $C = 75^\circ$ .

15. Die Gerade durch den Punkt  $C(3, -1)$ , zu der die Punkte  $A(2, 3)$  und  $B(6, 1)$  gleich weit entfernt sind, kann folgende Gleichung haben

- A  $4x + y - 11 = 0$ ;                       B  $x + 2y - 1 = 0$ ;                       C  $x - 4y = 7$ ;                       D  $3x - y - 10 = 0$ .

16. Gegeben seien ein Dreieck  $ABC$  und ein Punkt  $D$  auf der Seite  $BC$ , so dass  $AD$  die Winkelhalbierende des Winkels  $BAC$  ist. Die Seitenlängen des Dreiecks sind  $BC = 4$ ,  $CA = 5$ ,  $AB = 6$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $\vec{BD} = \frac{5}{6}\vec{DC}$ ;                                       B  $\vec{BD} = \frac{6}{5}\vec{DC}$ ;  
 C  $\vec{AD} = \frac{5}{11}\vec{AB} + \frac{6}{11}\vec{AC}$ ;                       D  $\vec{AD} = \frac{6}{11}\vec{AB} + \frac{5}{11}\vec{AC}$ .

17. Der Wert des Integrals  $\int_0^{\pi/3} \sin x \cdot \ln(\cos x) dx$  ist

- A  $\ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ ;       B  $\ln 2 - \frac{1}{2}$ ;       C  $\ln \sqrt{3} - \frac{1}{2}$ ;       D  $\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ .

18. Sei  $S$  die Menge aller vierstelligen Zahlen. Die Anzahl der durch 3 teilbaren Elemente in  $S$  ist

- A 2999;       B 3000;       C 3001;       D 3333.

19. Auf der Menge  $G = (0, +\infty)$  definiert man die Operation  $x * y = x + y + |x - y|$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Operation "\*" ist kommutativ.       B  $1 * (2 * 3) = (1 * 2) * 3$ .  
 C  $x * y \geq 1$  für alle  $x, y \in G$ .       D Die Operation "\*" hat ein neutrales Element.

Die Aufgaben 20, 21, 22 und 23 beziehen sich auf die Funktion  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = -x \ln x$ .

20. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $f$  hat endlichen einseitigen Grenzwert im Punkt  $x_0 = 0$ .  
 B  $f$  ist streng wachsend auf dem Intervall  $(0, 1]$ .  
 C  $f$  ist streng fallend auf dem Intervall  $[1, +\infty)$ .  
 D  $f$  ist konkav.

21. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung  $f(x) = \frac{1}{3}$  ist

- A 3;       B 2;       C 1;       D 0.

22. Gegeben sei die Tangente  $d$  an den Graphen der Funktion  $f$ , welche durch den Punkt  $(0, 1)$  verläuft, und sei  $m$  die Steigung von  $d$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $m \in [-2, 0]$ ;       B  $m \in (-\infty, -2]$ ;  
 C  $d$  verläuft durch den Punkt  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ;       D  $d$  verläuft durch den Punkt  $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ .

23. Die kleinste reelle Zahl  $a$ , für welche die Ungleichung  $f(x) \leq a - x$  für alle  $x \in (0, +\infty)$  gilt, ist

- A  $\frac{1}{e}$ ;       B  $\frac{2}{e}$ ;       C 2;       D 1.

24. Sei  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$6 + f(x) = 2f(-x) + 3x^2 \left( \int_{-1}^1 f(t) dt \right), \text{ für alle } x \in [-1, 1],$$

gilt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$ ;       B  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ ;       C  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ;       D  $f(-1) = -6$ .

**Richtige Antworten**  
**ZULASSUNG 2023**  
**Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK**

1.  B
2.  C
3.  B
4.  D
5.  A,  B,  D,
6.  B
7.  A,  D
8.  A
9.  B
10.  C
11.  D
12.  A,  B
13.  A,  C,  D
14.  A,  C,  D
15.  B,  D
16.  B,  C
17.  A
18.  B
19.  A
20.  A,  C,  D
21.  B
22.  A,  C
23.  D
24.  B,  C,  D