

Concurs MATE-INFO UBB 2023
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ: Problemele pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat pe formularul special de pe foaia de concurs. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parțială din regulamentul concursului.

Fie $A(2, 2)$ și $B(-3, 7)$ vârfurile triunghiului ABC iar $G(-2, 5)$ centrul de greutate al triunghiului ABC . Problemele 1 și 2 se referă la acest triunghi ABC .

1. Coordonatele vârfului C sunt

A $C(5, 6)$; B $C(-5, 6)$; C $C\left(\frac{2}{3}, 3\right)$; D $C(5, -6)$.

2. Panta dreptei perpendiculare pe dreapta AG este

A $-\frac{4}{3}$; B $-\frac{3}{4}$; C $\frac{3}{4}$; D $\frac{4}{3}$.

3. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$ este:

A 0; B $\frac{1}{2}$; C 1; D $+\infty$.

4. Aria triunghiului ABC este 6. Dacă laturile sale sunt de lungimi $AB = 8$ și $AC = 3$, atunci măsura unghiului BAC poate fi:

A 30° ; B 60° ; C 120° ; D 150° .

5. Aria mulțimii plane cuprinsă între graficul funcției $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^2 \ln x$, axa Ox și dreapta de ecuație $x = e$ este:

A $\frac{1}{9}$; B $\frac{1}{3}$; C $\frac{1 + e^3}{9}$; D $\frac{1 + 2e^3}{9}$.

6. Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 2,$$

atunci

A $S \subseteq [0, 1)$; B $S \subseteq (1, 2]$; C S are exact două elemente; D S are exact un element.

7. Considerăm mulțimea

$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2(m^2 + 1)x + (m + 1)^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

A $1 \in S$; B $-1 \in S$; C $S = [0, \infty)$; D $S = \mathbb{R}$.

8. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 1, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \\ x^2, & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A f este injectivă; B f este surjectivă; C f este crescătoare; D f este bijectivă.

9. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 4\sqrt{3}$ și $BC = 4$. Atunci

- A $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$; B $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 16\sqrt{3}$; C $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 24$; D $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 48$.

10. Fie dreptele $d_1: x - 3y + 2 = 0$, $d_2: (m + 1)x - (2m - 3)y + 4 = 0$ și $d_3: mx + y + m + 1 = 0$, unde m este un parametru real. Care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate?

- A Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele pentru $m = -6$.
 B Dreptele d_2 și d_3 nu sunt paralele pentru nici o valoare a lui m .
 C Dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt concurente pentru o singură valoare a lui m .
 D Dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt concurente pentru două valori ale lui m .

11. Fie S un punct pe latura PQ a triunghiului PQR astfel încât $\frac{PS}{SQ} = \frac{1}{2}$ și fie T mijlocul segmentului SR . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $\vec{QT} = \frac{1}{2}(\vec{QS} - \vec{QR})$; B $\vec{QT} = \frac{1}{2}(\vec{QS} + \vec{QR})$;
 C $\vec{PS} = \frac{1}{3}\vec{QP}$; D $\vec{RT} = \frac{1}{3}\vec{RP} + \frac{1}{6}\vec{RQ}$.

12. Dacă numerele naturale nenule x, y îndeplinesc egalitatea

$$x(y + 1)C_{x+y+1}^{y+1} = 30C_{x+y+1}^{x+1},$$

atunci

- A x este unic determinat; B y este unic determinat; C $x < 10$; D $x > 5$.

13. Numărul soluțiilor ecuației $\cos(3\pi x) = 0$ în intervalul $(0, 2023)$ este

- A 2022; B 2023; C 6066; D 6069.

14. Considerăm sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + 2z = 3 \\ 3x + 2y = 0 \\ 2x + ay + 2z = a + 3, \end{cases}$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A Există $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este 0.
 B Există un singur $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul nu admite soluții.
 C Sistemul admite soluții pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
 D Dacă numărul soluțiilor este finit, atunci y nu depinde de a .

15. Fie $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim numerele complexe a_n, b_n, c_n, d_n prin

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A $a_n = d_n = i^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 B $b_n = 2ni^{n-1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 C $b_n = 2^n i^{n-1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 D Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numerele a_n, b_n, c_n, d_n să fie toate reale.

16. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + e^n) \cdot \sin \frac{1}{n}$ este:

- A 0; B 1; C e; D $+\infty$.

17. Pentru fiecare $a > 0$ se notează $I(a) = \int_0^a \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A $I(2) = \frac{\pi}{6}$; B $I(2) = \frac{\pi}{3}$; C $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{4}$; D $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{2}$.

Problemele 18, 19 și 20 se referă la funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$, unde a este un număr real fixat.

18. Ecuația asimptotei la graficul lui f spre $+\infty$ este:

- A $y = a$; B $y = x + a$; C $y = x - a$; D $y = x + \frac{a}{2}$.

19. Dacă d este tangenta la graficul lui f în punctul de intersecție a acestuia cu axa Oy , care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dreapta d este paralelă cu dreapta de ecuație $y = ax$.
 B Pentru $a \neq 0$ dreapta d este paralelă cu dreapta de ecuație $y = \frac{1}{a}x$.
 C Pentru $a = 0$ dreapta d este paralelă cu axa Ox .
 D Pentru $a \neq 0$ dreapta d este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = -\frac{1}{a}x$.

20. Mulțimea valorilor lui a pentru care f are trei puncte de extrem local este:

- A $(-1, 1)$; B $[-1, 1]$; C $[-2, 2]$; D $(-2, 2)$.

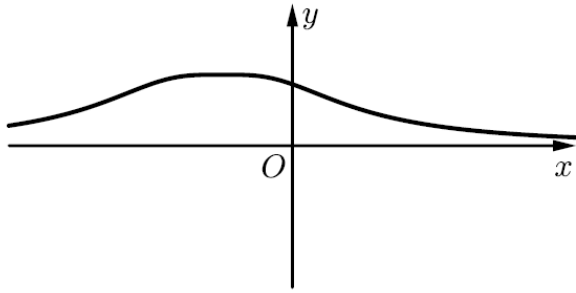
21. Fie $a \in \mathbb{R}$ un parametru real. În mulțimea numerelor reale definim operația “*” prin

$$x * y = (x - 2023)(y - 2023) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

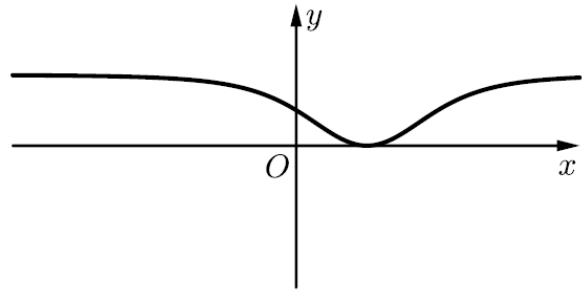
Care dintre următoarele afirmații sunt corecte?

- A Operația “*” este asociativă dacă și numai dacă $a = 2023$.
 B Dacă $a = 2023$, atunci 2024 este element neutru față de “*”.
 C Dacă operația “*” este asociativă, atunci $(\mathbb{R}, *)$ este grup.
 D $((a, +\infty), *)$ este grup pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

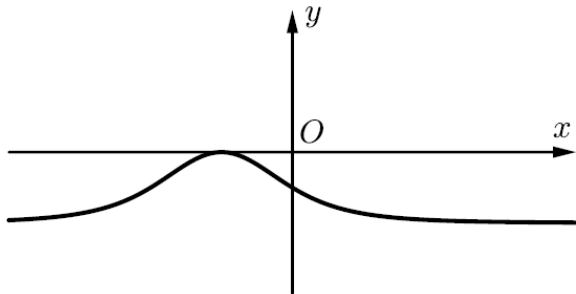
22. Care dintre graficele de mai jos poate fi graficul funcției definite prin $f(x) = \cos \frac{\pi}{x^2 + 2x + 3}$?



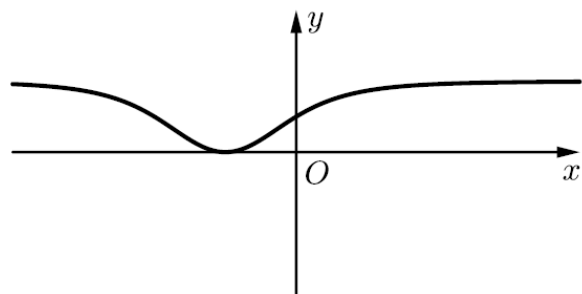
A



B



C



D

23. Într-un triunghi unghiul opus celei mai mari laturi este de două ori mai mare decât unghiul opus celei mai mici laturi. Dacă laturile triunghiului sunt numere naturale consecutive, atunci perimetrul triunghiului este

A 9;

B 12;

C 15;

D 24.

24. Numerele distincte a, b, c sunt în progresie aritmetică, în această ordine, cu rația r , iar numerele $a - 1, b, c + 4$ sunt în progresie geometrică, în această ordine, tot cu rația r . Care dintre următoarele afirmații pot fi corecte?

A $b = 0$; B $b = 6$; C $b = -\frac{2}{3}$; D $b = -3$.

Răspunsuri corecte

Concursul Mate-Info UBB, 2023

Proba scrisă la MATEMATICĂ

1. B
2. D
3. C
4. A, D
5. D
6. B, D
7. A, C
8. C
9. A, D
10. A, B, D
11. B, D
12. A, C
13. D
14. A, C, D
15. A, B
16. B
17. A, D
18. B
19. A, C, D
20. D
21. A, B
22. D
23. C
24. B, C