

MATE-INFO UBB verseny – 2023
MATEMATIKA írásbeli próba

FONTOS MEGJEGYZÉS: A feladatoknak egy vagy több helyes válasza is lehet, amelyeket a versenyző az erre a célra kapott lapon kell bejelöljön. A feleletválasztós feladatsor értékelése a versenyszabályzat részleges pontozási rendszere alapján történik.

Legyenek $A(2, 2)$ és $B(-3, 7)$ az ABC háromszög csúcsai, illetve $G(-2, 5)$ a háromszög súlypontja. Az **1** és **2** feladatok erre az ABC háromszögre vonatkoznak.

1. A háromszög C csúcsának koordinátái

- A $C(5, 6)$; B $C(-5, 6)$; C $C\left(\frac{2}{3}, 3\right)$; D $C(5, -6)$.

2. Az AG egyenesre merőleges egyenes irányítávegyezője

- A $-\frac{4}{3}$; B $-\frac{3}{4}$; C $\frac{3}{4}$; D $\frac{4}{3}$.

3. A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$ határérték

- A 0; B $\frac{1}{2}$; C 1; D $+\infty$.

4. Az ABC háromszög területe 6. Ha a háromszög oldalainak hossza $AB = 8$ és $AC = 3$, akkor a BAC szög mértéke lehet:

- A 30° ; B 60° ; C 120° ; D 150° .

5. Az $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = x^2 \ln x$ képlettel értelmezzük. A f függvény grafikonja, az Ox tengely és az $x = e$ egyenletű egyenes által határolt síktartomány területe

- A $\frac{1}{9}$; B $\frac{1}{3}$; C $\frac{1 + e^3}{9}$; D $\frac{1 + 2e^3}{9}$.

6. Ha S a

$$\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 2$$

egyenlet valós megoldásainak halmaza, akkor

- A $S \subseteq [0, 1)$;
 B $S \subseteq (1, 2]$;
 C S pontosan két elemet tartalmaz;
 D S pontosan egy elemet tartalmaz.

7. Adott az

$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2(m^2 + 1)x + (m + 1)^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

halmaz. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $1 \in S$; B $-1 \in S$; C $S = [0, \infty)$; D $S = \mathbb{R}$.

8. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ha } x \in (-\infty, -1) \\ 1, & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ x^2, & \text{ha } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

függvény. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A f injektív. B f szürjektív. C f növekvő. D f bijektív.

9. Ha egy $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 4\sqrt{3}$ és $BC = 4$, akkor

- A $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$; B $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 16\sqrt{3}$; C $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 24$; D $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 48$.

10. Adottak a $d_1: x - 3y + 2 = 0$, $d_2: (m+1)x - (2m-3)y + 4 = 0$ és $d_3: mx + y + m + 1 = 0$ egyenesek, ahol m egy valós paraméter. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A A d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak, ha $m = -6$.
 B A d_2 és d_3 egyenesek az m paraméter egyetlen értékére sem párhuzamosak.
 C A d_1 , d_2 és d_3 egyenesek az m paraméter pontosan egy értékére összefutóak.
 D A d_1 , d_2 és d_3 egyenesek az m paraméter pontosan két értékére összefutóak.

11. Legyen S a PQR háromszög PQ oldalának egy olyan pontja, amelyre $\frac{PS}{SQ} = \frac{1}{2}$ és legyen T az SR szakasz felezőpontja. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $\vec{QT} = \frac{1}{2}(\vec{QS} - \vec{QR})$; B $\vec{QT} = \frac{1}{2}(\vec{QS} + \vec{QR})$;
 C $\vec{PS} = \frac{1}{3}\vec{QP}$; D $\vec{RT} = \frac{1}{3}\vec{RP} + \frac{1}{6}\vec{RQ}$.

12. Ha az x és y nullától különböző természetes számok teljesítik az

$$x(y+1)C_{x+y+1}^{y+1} = 30C_{x+y+1}^{x+1}$$

egyenlőséget, akkor

- A x egyértelműen meghatározott;
 B y egyértelműen meghatározott;
 C $x < 10$;
 D $x > 5$.

13. A $(0, 2023)$ intervallumon a $\cos(3\pi x) = 0$ egyenlet megoldásainak száma

- A 2022; B 2023; C 6066; D 6069.

14. Adott a

$$\begin{cases} 2x + 2z = 3 \\ 3x + 2y = 0 \\ 2x + ay + 2z = a + 3, \end{cases}$$

egyenletrendszer, ahol a egy valós paraméter. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, amelyre az egyenletrendszer mátrixának determinánsa 0.
 B Egyetlen egy olyan $a \in \mathbb{R}$ létezik, amelyre az egyenletrendszernek nincs megoldása.
 C Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén az egyenletrendszernek van megoldása.
 D Ha az egyenletrendszernek véges sok megoldása van, akkor y nem függ az a -tól.

15. Legyen $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ és minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az a_n, b_n, c_n, d_n komplex számokat az

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n$$

összefüggés által. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a_n = d_n = i^n$.
 B Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $b_n = 2ni^{n-1}$.
 C Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $b_n = 2^n i^{n-1}$.
 D Létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre az a_n, b_n, c_n, d_n számok mind valósak.

16. A $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + e^n) \cdot \sin \frac{1}{n}$ határérték

- A 0; B 1; C e; D $+\infty$.

17. Minden $a > 0$ esetén legyen $I(a) = \int_0^a \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $I(2) = \frac{\pi}{6}$; B $I(2) = \frac{\pi}{3}$; C $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{4}$; D $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{2}$.

A 18, 19 és 20 feladatok az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$ függvényre vonatkoznak, ahol a egy rögzített valós szám.

18. Az f függvény grafikonjához a $+\infty$ felé húzott aszimptota egyenlete

- A $y = a$; B $y = x + a$; C $y = x - a$; D $y = x + \frac{a}{2}$.

19. Legyen d az f függvény grafikonjához, a grafikon Oy tengellyel vett metszéspontjában húzott érintő. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A A d egyenes párhuzamos az $y = ax$ egyenletű egyenessel.
 B Ha $a \neq 0$, akkor a d egyenes párhuzamos az $y = \frac{1}{a}x$ egyenletű egyenessel.
 C Ha $a = 0$, akkor a d egyenes párhuzamos az Ox tengellyel.
 D Ha $a \neq 0$, akkor a d egyenes merőleges az $y = -\frac{1}{a}x$ egyenletű egyenesre.

20. Az a szám azon értékeinek halmaza, amelyekre az f függvénynek három helyi szélsőértékpontja van:

- A $(-1, 1)$; B $[-1, 1]$; C $[-2, 2]$; D $(-2, 2)$.

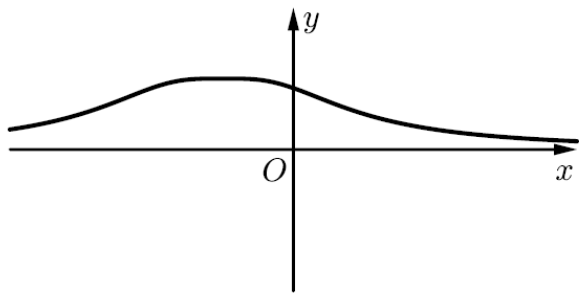
21. Legyen $a \in \mathbb{R}$ egy valós paraméter. A valós számok halmazán értelmezzük a „ $*$ ” műveletet az

$$x * y = (x - 2023)(y - 2023) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

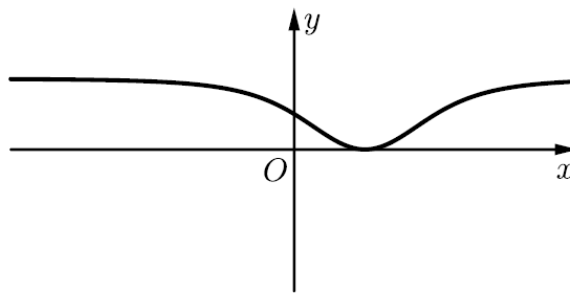
szabály által. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A A „ $*$ ” művelet asszociatív akkor és csakis akkor, ha $a = 2023$.
 B Ha $a = 2023$, akkor 2024 a „ $*$ ” művelet semleges eleme.
 C Ha a „ $*$ ” művelet asszociatív, akkor $(\mathbb{R}, *)$ egy csoport.
 D Az $((a, +\infty), *)$ egy csoport, minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.

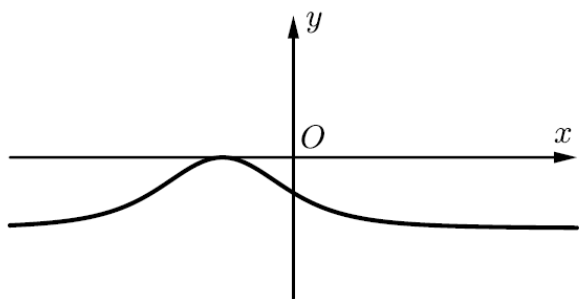
22. Az alábbi grafikonok közül melyik lehet az $f(x) = \cos \frac{\pi}{x^2 + 2x + 3}$ képlettel értelmezett függvény grafikonja?



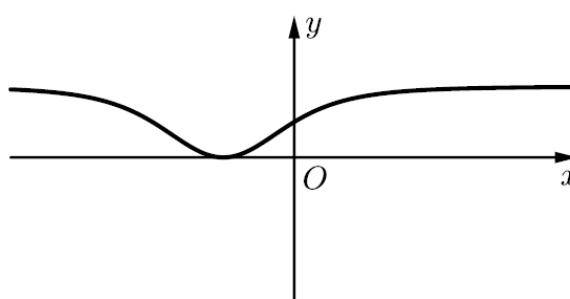
A



B



C



D

23. Egy háromszögben a leghosszabb oldallal szembeni szög kétszer nagyobb, mint a legkisebb oldallal szembeni szög. Ha a háromszög oldalhosszai egymás utáni természetes számok, akkor a háromszög kerülete

A 9;

B 12;

C 15;

D 24.

24. Az a , b , c különböző valós számok ebben a sorrendben egy r állandó különbségű számtani haladványt alkotnak, míg az $a - 1$, b , $c + 4$ számok ebben a sorrendben egy r állandó hányadosú mértani haladványt alkotnak. Az alábbi állítások közül melyek lehetnek igazak?

A $b = 0$;

B $b = 6$;

C $b = -\frac{2}{3}$;

D $b = -3$.

Helyes válaszok

BBTE Matek-Infó Verseny, 2023

MATEMATIKA írásbeli próba

1. B
2. D
3. C
4. A, D
5. D
6. B, D
7. A, C
8. C
9. A, D
10. A, B, D
11. B, D
12. A, C
13. D
14. A, C, D
15. A, B
16. B
17. A, D
18. B
19. A, C, D
20. D
21. A, B
22. D
23. C
24. B, C