

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2023
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIGER HINWEIS: Die gestellten Aufgaben können eine oder mehrere richtige Antworten haben, die der Kandidat auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angeben muss. Die Bewertung der gegebenen Antworten erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung festgesetzten Benotungssystem.

Seien $A(2, 2)$ und $B(-3, 7)$ Eckpunkte des Dreiecks ABC und $G(-2, 5)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC . Die Aufgaben **1** und **2** beziehen sich auf dieses Dreieck ABC .

1. Die Koordinaten des Eckpunktes C sind

A $C(5, 6)$; B $C(-5, 6)$; C $C\left(\frac{2}{3}, 3\right)$; D $C(5, -6)$.

2. Die auf AG senkrechte Gerade hat die Steigung

A $-\frac{4}{3}$; B $-\frac{3}{4}$; C $\frac{3}{4}$; D $\frac{4}{3}$.

3. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$ ist:

A 0 ; B $\frac{1}{2}$; C 1 ; D $+\infty$.

4. Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt gleich 6. Es ist bekannt, dass die Seitenlängen $AB = 8$ und $AC = 3$ sind, dann ist das Maß des Winkels BAC gleich:

A 30° ; B 60° ; C 120° ; D 150° .

5. Der Flächeninhalt der Menge zwischen dem Graphen der Funktion $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^2 \ln x$, der Ox -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = e$ ist:

A $\frac{1}{9}$; B $\frac{1}{3}$; C $\frac{1 + e^3}{9}$; D $\frac{1 + 2e^3}{9}$.

6. Sei S die Menge der reellen Lösungen der Gleichung

$$\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 2,$$

dann gilt

A $S \subseteq [0, 1)$; B $S \subseteq (1, 2]$; C S hat genau zwei Elemente; D S hat genau ein Element.

7. Es sei die Menge

$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2(m^2 + 1)x + (m + 1)^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $1 \in S$; B $-1 \in S$; C $S = [0, \infty)$; D $S = \mathbb{R}$.

8. Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{für } x \in (-\infty, -1) \\ 1, & \text{für } x \in [-1, 1] \\ x^2, & \text{für } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A f ist injektiv; B f ist surjektiv; C f ist wachsend; D f ist bijektiv.

9. Sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $AB = 4\sqrt{3}$ und $BC = 4$, dann gilt

- A $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$; B $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 16\sqrt{3}$; C $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 24$; D $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = 48$.

10. Es seien die Geraden $d_1: x - 3y + 2 = 0$, $d_2: (m+1)x - (2m-3)y + 4 = 0$ und $d_3: mx + y + m + 1 = 0$, wobei m ein reeller Parameter ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Geraden d_1 und d_2 sind parallel für $m = -6$.
 B Es gibt keine Werte für m , so dass die Geraden d_2 und d_3 parallel sind.
 C Es gibt einen einzigen Wert für m , so dass die Geraden d_1, d_2 und d_3 konkurrent sind.
 D Es gibt zwei verschiedene Werte für m , so dass die Geraden d_1, d_2 und d_3 konkurrent sind.

11. Sei S ein Punkt auf der Seite PQ des Dreiecks PQR , so dass $\frac{PS}{SQ} = \frac{1}{2}$ und sei T die Mitte der Strecke SR . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A $\vec{QT} = \frac{1}{2}(\vec{QS} - \vec{QR})$; B $\vec{QT} = \frac{1}{2}(\vec{QS} + \vec{QR})$;
 C $\vec{PS} = \frac{1}{3}\vec{QP}$; D $\vec{RT} = \frac{1}{3}\vec{RP} + \frac{1}{6}\vec{RQ}$.

12. Sind x, y zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen, welche die Gleichung

$$x(y+1)C_{x+y+1}^{y+1} = 30C_{x+y+1}^{x+1},$$

erfüllen, dann gilt:

- A x ist eindeutig bestimmt; B y ist eindeutig bestimmt; C $x < 10$; D $x > 5$.

13. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\cos(3\pi x) = 0$, die sich im Intervall $(0, 2023)$ befinden, ist

- A 2022; B 2023; C 6066; D 6069.

14. Sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x + 2z = 3 \\ 3x + 2y = 0 \\ 2x + ay + 2z = a + 3, \end{cases}$$

wobei a ein reeller Parameter ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Es existiert $a \in \mathbb{R}$, so dass die Determinante des Systems gleich 0 ist.
 B Für einen einzigen Wert von $a \in \mathbb{R}$ hat das System keine Lösungen.
 C Das System besitzt Lösungen für alle $a \in \mathbb{R}$.
 D Wenn das System endlich viele Lösungen besitzt, dann hängt y nicht von a ab.

15. Es sei $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Man definiert die komplexen Zahlen a_n, b_n, c_n, d_n durch

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n.$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A $a_n = d_n = i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.
 B $b_n = 2ni^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.
 C $b_n = 2^n i^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.
 D Es existiert $n \in \mathbb{N}^*$, so dass alle Zahlen a_n, b_n, c_n, d_n reell sind.

16. Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + e^n) \cdot \sin \frac{1}{n}$ ist:

- A 0; B 1; C e; D $+\infty$.

17. Es sei $I(a) = \int_0^a \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$, für alle $a > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A $I(2) = \frac{\pi}{6}$; B $I(2) = \frac{\pi}{3}$; C $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{4}$; D $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{\pi}{2}$.

Die Aufgaben 18, 19 und 20 beziehen sich auf die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$, wobei a eine festgelegte reelle Zahl ist.

18. Die Funktion f hat als Asymptote bei $+\infty$ die Gerade mit der Gleichung:

- A $y = a$; B $y = x + a$; C $y = x - a$; D $y = x + \frac{a}{2}$.

19. Wenn d die Tangente zum Graphen der Funktion f in dessen Schnittpunkt mit der Oy -Achse ist, dann entscheide man, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

- A Die Gerade d ist parallel zu der Geraden mit der Gleichung $y = ax$.
 B Für $a \neq 0$ ist die Gerade d parallel zu der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{1}{a}x$.
 C Für $a = 0$ ist die Gerade d parallel zur Ox -Achse.
 D Für $a \neq 0$ steht die Gerade d senkrecht auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{a}x$.

20. Die Menge der Werte von a , für welche f drei lokale Extrempunkte besitzt, ist:

- A $(-1, 1)$; B $[-1, 1]$; C $[-2, 2]$; D $(-2, 2)$.

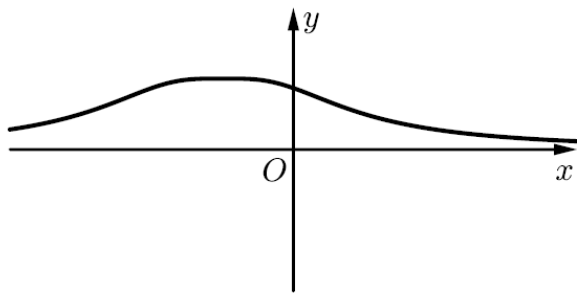
21. Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung “ $*$ ” durch

$$x * y = (x - 2023)(y - 2023) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

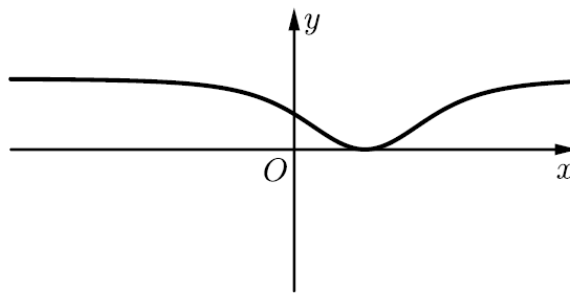
Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Verknüpfung “ $*$ ” ist assoziativ genau dann wenn $a = 2023$.
 B Für $a = 2023$ ist 2024 das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung “ $*$ ”.
 C Wenn die Verknüpfung “ $*$ ” assoziativ ist, dann ist $(\mathbb{R}, *)$ eine Gruppe.
 D $((a, +\infty), *)$ ist eine Gruppe für alle $a \in \mathbb{R}$.

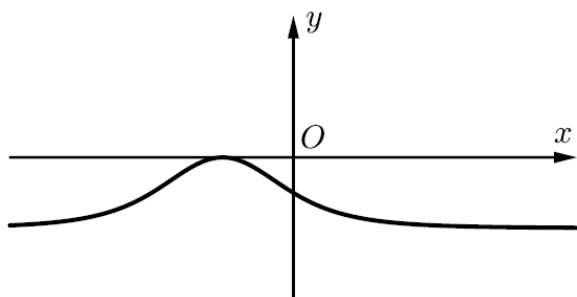
22. Welche der folgenden Darstellungen ist der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \cos \frac{\pi}{x^2 + 2x + 3}$?



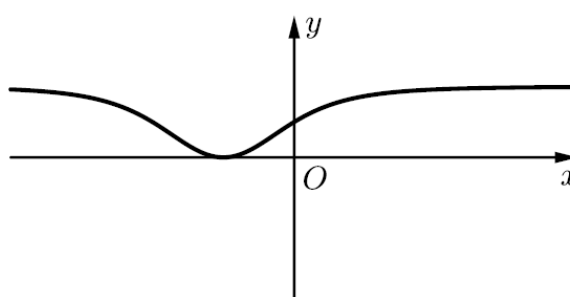
A



B



C



D

23. In einem Dreieck ist der Winkel gegenüber der längsten Seite zweimal so groß wie der Winkel gegenüber der kürzesten Seite. Sind die Längen der Seiten drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, dann beträgt der Umfang des Dreiecks:

A 9;

B 12;

C 15;

D 24.

24. Die verschiedenen Zahlen a, b, c bilden eine arithmetische Folge (in der angegebenen Reihenfolge) mit Differenz r , die Zahlen $a-1, b, c+4$ bilden eine geometrische Folge (in der angegebenen Reihenfolge) mit Quotient r . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $b = 0$; B $b = 6$; C $b = -\frac{2}{3}$; D $b = -3$.

Richtige Antworten

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2023

Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

1. B
2. D
3. C
4. A, D
5. D
6. B, D
7. A, C
8. C
9. A, D
10. A, B, D
11. B, D
12. A, C
13. D
14. A, C, D
15. A, B
16. B
17. A, D
18. B
19. A, C, D
20. D
21. A, B
22. D
23. C
24. B, C