BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MATE-INFO UBB verseny – 2022
MATEMATIKA írásbeli próba

FONTOS MEGJEGYZÉS: A feladatoknak egy vagy több helyes válasza is lehet, amelyeket a versenyző az elektronikus rendszerben kell bejelöljön. A tesztkérdések válaszainak kiértékelése a versenyszabályzatban szereplő pontozási rendszer alapján történik.

1. Legyen $x = \sin \dfrac{12133}{6}\pi$. Ekkor

$\boxed{\text{A}}$ $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $x = \dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $x > 0$; $\boxed{\text{D}}$ $x < 0$.

2. Egy Descartes-féle koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsainak koordinátái $A(2,3)$, $B(-1,1)$, $C(-3,4)$, illetve G az ABC háromszög súlypontja. Ekkor az AG szakasz F felezőpontjának koordinátái

$\boxed{\text{A}}$ $F(0,0)$; $\boxed{\text{B}}$ $F(\frac{2}{3}, \frac{17}{6})$; $\boxed{\text{C}}$ $F(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$; $\boxed{\text{D}}$ más érték.

3. A $[0,\pi]$ intervallumon a $3\sin x - 2 = 0$ egyenlet megoldásainak száma

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ végtelen.

4. Az $\mathbb{R}$ halmazon vizsgáljuk a $\sqrt{x^2-3} = x^2 - 5$ egyenletet. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az egyenletnek nincs megoldása.
$\boxed{\text{B}}$ Az egyenletnek pontosan két megoldása van.
$\boxed{\text{C}}$ Az egyenletnek pontosan négy megoldása van.
$\boxed{\text{D}}$ Az egyenletnek csak pozitív megoldásai vannak.

5. A $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}\right)^{300}$ kifejtésében a racionális tagok száma

$\boxed{\text{A}}$ 50; $\boxed{\text{B}}$ 51; $\boxed{\text{C}}$ 52; $\boxed{\text{D}}$ 150.

6. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix. Az A^5 mátrix elemeinek összege

$\boxed{\text{A}}$ 19; $\boxed{\text{B}}$ 20; $\boxed{\text{C}}$ 21; $\boxed{\text{D}}$ 22.

7. Legyen $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú valós számsorozat, amelyre $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$, minden $n \geq 1$ esetén. Ekkor a sorozat határértéke

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ nem létezik; $\boxed{\text{D}}$ 0.

8. Az

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x < 0 \\ x^3 + x + \alpha, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

összefüggéssel értelmezett $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 1$;
$\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 0$; $\boxed{\text{D}}$ nem létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre a függvény folytonos.

9. Az $x = 9$ abszcisszájú pontban az $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenlete

$\boxed{\text{A}}$ $-12y + x - 15 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $12y - x - 15 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $y - 12x - 15 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $y + 12x + 15 = 0$.

10. A $4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1$ egyenlet megoldásainak halmaza

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{\frac{\pi}{8} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

11. Az $ABCD$ paralelogramma A és B csúcsai a $3x - y - 4 = 0$ egyenletű egyenesen találhatók, míg az AC és BD átlók O metszéspontjának koordinátái $(3, 4)$. Ha az A csúcs koordinátái $(0, -4)$, akkor a CD egyenes egyenlete

$\boxed{\text{A}}$ $x + 3y - 42 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $x - 3y - 6 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $3x - y - 6 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $y = 3x + 6$.

12. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = 2x - [2x]$ képlettel értelmezzük, ahol $[a]$ az $a \in \mathbb{R}$ szám egész része. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az f függvény periódusa $\frac{1}{2}$.
$\boxed{\text{B}}$ Az f függvény injektív.
$\boxed{\text{C}}$ Az f függvény szürjektív.
$\boxed{\text{D}}$ Az f függvény páros.

13. Adott az $S_n = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ összeg, ahol i az imaginárius egység ($i^2 = -1$). Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az S_{2020} valós szám. $\boxed{\text{B}}$ Az $|S_{2020}|$ szám irracionális.
$\boxed{\text{C}}$ Az S_{2022} imaginárius része egyenlő 1011-gyel. $\boxed{\text{D}}$ $|S_{2022}| = 1011$.

14. Legyen $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ az alábbi egyenletrendszer megoldása

$$\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 0 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1. \end{cases}$$

Ekkor a $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y$ kifejezés értéke

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 12; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 10.

15. A $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ egyenlet megoldásainak összege

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2.

16. Egy négyzet egyik csúcsa $A(3, 1)$ és egyik átlója tartóegyenesének egyenlete $y - x = 0$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az A csúcs távolsága a megadott átlótól 2.
$\boxed{\text{B}}$ A másik átló tartóegyenesének egyenlete $x + y + 2 = 0$.
$\boxed{\text{C}}$ A négyzet területe 4.
$\boxed{\text{D}}$ A $C(1, 3)$ pont szintén a négyzet csúcsa.

17. Az ABC háromszög oldalainak hossza $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Ha az AM oldalfelező hossza c, akkor

$\boxed{\text{A}}$ $a^2 + 2c^2 = 3b^2$; $\boxed{\text{B}}$ $a^2 + 2c^2 = 2b^2$; $\boxed{\text{C}}$ $\cos C = \frac{4a}{3b}$; $\boxed{\text{D}}$ $\cos C = \frac{3a}{4b}$.

18. A $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ határérték

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$.

19. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt az $f(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$ képlettel értelmezzük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $f(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

B $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, minden $x\in(0,\infty)$ esetén.

C Az f függvény páratlan.

D $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

20. Az $x\mathrm{e}^x=-\dfrac{1}{3}$ egyenlet valós megoldásainak száma

A 0; B 1; C 2; D 3.

21. Az ABC háromszögben vegyük fel az $A'\in[BC]$, $B'\in[CA]$, $C'\in[AB]$ pontokat úgy, hogy $\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=\alpha$. Ha T_{ABC} az ABC háromszög területe és $T_{A'B'C'}$ az $A'B'C'$ háromszög területe, akkor

A $\dfrac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}=1-3\alpha(1-\alpha)$;

B $\dfrac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}\in\left[\frac{1}{4},1\right]$;

C $\dfrac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}=1-12\alpha^2(1-\alpha)^2$;

D $\dfrac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

22. A $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\int_1^{\operatorname{tg} x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg} x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}$ határérték

A 1; B π; C 0; D -1.

23. A háromszög, amelyre teljesül a $\sin(B)+\cos(B)=\sin(C)+\cos(C)$ összefüggés

A derékszögű; B egyenlő szárú; C egyenlő oldalú; D derékszögű vagy egyenlő szárú.

24. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat általános tagja

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n^3}},\ \text{minden } n\in\mathbb{N}^* \text{ esetén.}$$

Használjuk az $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ jelölést. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $\ell=0$. B $\ell=\frac{\sqrt{2}}{3}$. C $\ell\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\mathbb{Q}$. D $\ell=\infty$.

25. Egy téglalap egyik csúcsa $A(2,-3)$ és két oldala a

$$(d_1): 2x-3y+5=0,$$
$$(d_2): 3x+2y-7=0,$$

egyenletű egyeneseken található. A két egyenes egyenlete, amelyeken a téglalap másik két oldala található

A $2x-3y-13=0$ és $3x+2y=0$;

B $y+3=\frac{2}{3}(x-2)$ és $y+3=-\frac{3}{2}(x-2)$;

C $2x-3y+13=0$ és $3x-2y=0$;

D $y-3=\frac{2}{3}(x-2)$ és $y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$.

26. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ egy paraméter és vizsgáljuk a következő 3 ismeretlenes lineáris egyenletrendszert

$$\begin{cases} 2x + \ \alpha y + 2z = 1 \\ 4x - \quad y + 5z = 1 \\ 2x + 10y + \ z = 1. \end{cases}$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az α bármely értékére a rendszer mátrixának rangja 3.
- B Az α bármely értékére a rendszer bővített mátrixának rangja 3.
- C A megadott rendszer inkompatibilis akkor és csakis akkor, ha $\alpha \neq 3$.
- D A megadott rendszer kompatibilis akkor és csakis akkor, ha $\alpha \neq 3$.

27. Legyen $G \subseteq \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, amelyre

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \quad \forall x, y \in G$$

egy műveletet értelmez a G halmazon. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A A G megegyezhet a $(0, 2)$ intervallummal.
- B A G megegyezhet a $(0, 1)$ intervallummal.
- C Ha $G = (0, 1)$, akkor a ,,$*$" műveletnek van semleges eleme.
- D Ha $G = (0, 1)$, akkor $\frac{1}{3}$ szimmetrikus eleme $\frac{2}{3}$.

28. Az

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál értéke

A 0; B 1; C 2; D 3.

29. Adottak az $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ számok úgy, hogy xy, yz, zx mértani haladványt alkotnak, melynek hányadosa egy 1-től különböző egész szám. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Ha y teljes négyzet, akkor z is teljes négyzet.
- B Ha z teljes négyzet, akkor y is teljes négyzet.
- C Ha y teljes négyzet, akkor x is teljes négyzet.
- D Ha z teljes négyzet, akkor x is teljes négyzet.

30. Adott az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat, melynek általános tagja $x_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}}\,\mathrm{d}x$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $x_{23} = \dfrac{1}{184}$. B $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x_n = 1$. C $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = \dfrac{1}{8}$. D $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 0$.

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Helyes válaszok

BBTE Matek-Infó Verseny 2022
MATEMATIKA írásbeli próba

1. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
2. $\boxed{\textbf{B}}$
3. $\boxed{\textbf{C}}$
4. $\boxed{\textbf{B}}$
5. $\boxed{\textbf{B}}$
6. $\boxed{\textbf{C}}$
7. $\boxed{\textbf{D}}$
8. $\boxed{\textbf{C}}$
9. $\boxed{\textbf{B}}$
10. $\boxed{\textbf{B}}$
11. $\boxed{\textbf{C}}$
12. $\boxed{\textbf{A}}$
13. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
14. $\boxed{\textbf{B}}$
15. $\boxed{\textbf{B}}$
16. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
17. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
18. $\boxed{\textbf{A}}$
19. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
20. $\boxed{\textbf{C}}$
21. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
22. $\boxed{\textbf{D}}$
23. $\boxed{\textbf{D}}$
24. $\boxed{\textbf{C}}$
25. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
26. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
27. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
28. $\boxed{\textbf{A}}$
29. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
30. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MATE-INFO UBB verseny – 2022
MATEMATIKA írásbeli próba
MEGOLDÁSOK

1. Legyen $x = \sin \dfrac{12133}{6}\pi$. Ekkor

$\boxed{\text{A}}$ $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $x = \dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $x > 0$; $\boxed{\text{D}}$ $x < 0$.

Válasz:
A hamis; **B igaz**; **C igaz**; **D hamis**.

Megoldás: Mivel $\dfrac{12133}{6} = 2022 + \dfrac{1}{6}$, ezért $\dfrac{12133}{6}\pi = 2022\pi + \dfrac{\pi}{6}$, így $\sin\left(2022\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2. Egy Descartes-féle koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsainak koordinátái $A(2,3)$, $B(-1,1)$, $C(-3,4)$, illetve G az ABC háromszög súlypontja. Ekkor az AG szakasz F felezőpontjának koordinátái

$\boxed{\text{A}}$ $F(0,0)$; $\boxed{\text{B}}$ $F(\frac{2}{3}, \frac{17}{6})$; $\boxed{\text{C}}$ $F(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$; $\boxed{\text{D}}$ más érték.

Válasz:
A hamis; **B igaz**; **C hamis**; **D hamis**.

Megoldás: A súlypont koordinátái $G\left(\frac{2+(-1)+(-3)}{3}, \frac{3+1+4}{3}\right) = G\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Az AG szakasz felezőpontjának koordinátái pedig $F\left(\frac{2+(-2/3)}{2}, \frac{3+8/3}{2}\right) = F\left(\frac{2}{3}, \frac{17}{6}\right)$.

3. A $[0,\pi]$ intervallumon a $3\sin x - 2 = 0$ egyenlet megoldásainak száma

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ végtelen.

Válasz:
A hamis; **B hamis**; **C igaz**; **D hamis**.

Megoldás: A megoldások halmaza $\{\arcsin\frac{2}{3}, \pi - \arcsin\frac{2}{3}\}$, amely egy két elemű halmaz.

4. Az $\mathbb{R}$ halmazon vizsgáljuk a $\sqrt{x^2-3} = x^2 - 5$ egyenletet. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az egyenletnek nincs megoldása.
$\boxed{\text{B}}$ Az egyenletnek pontosan két megoldása van.
$\boxed{\text{C}}$ Az egyenletnek pontosan négy megoldása van.
$\boxed{\text{D}}$ Az egyenletnek csak pozitív megoldásai vannak.

Válasz:
A hamis; **B igaz**; **C hamis**; **D hamis**.

Megoldás: A gyök miatt $x^2 - 3 \geq 0$ és $x^2 - 5 \geq 0$, ahonnan $x \in (-\infty, -\sqrt{5}\,] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$. Négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$x^2 - 3 = (x^2-5)^2 \iff x^2 - 3 = x^4 - 10x^2 + 25 \iff x^4 - 11x^2 + 28 = 0.$$

Bevezetve az $y = x^2$ jelölést, az előző egyenlet átírható $y^2 - 11y + 28 = 0$ alakba. Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei $y_1 = 4$ és $y_2 = 7$. Innen kapjuk az $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$ egyenlet $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\sqrt{7}$ és $x_4 = \sqrt{7}$ gyökeit. Ezek közül csak x_3 és x_4 teljesítik az $x^2 - 5 \geq 0$ feltételt, ezért a $\sqrt{x^2-3} = x^2 - 5$ egyenletnek két megoldása van. Tehát $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ hamisak, míg $\boxed{\text{B}}$ igaz. Az egyik megoldás negatív, ezért $\boxed{\text{D}}$ is hamis.

5. A $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}\right)^{300}$ kifejtésében a racionális tagok száma

$\boxed{\text{A}}$ 50; $\boxed{\text{B}}$ 51; $\boxed{\text{C}}$ 52; $\boxed{\text{D}}$ 150.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: A Newton-binomiális tétellel kapott kifejtés tagjai $T_{k+1} = C_{300}^{k} 2^{150-\frac{k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$, $0 \leq k \leq 300$.

Ahhoz, hogy a T_{k+1} tag racionális legyen szükséges, hogy k osztható legyen 2-vel is és 3-mal is, tehát k osztható kell legyen 6-tal. Így $k \in \{0, 6, 12, \ldots, 300\}$ és 51 tag racionális.

6. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix. Az A^5 mátrix elemeinek összege

$\boxed{\text{A}}$ 19; $\boxed{\text{B}}$ 20; $\boxed{\text{C}}$ 21; $\boxed{\text{D}}$ 22.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{C}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Észrevehető, hogy $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, ahol $(F_n)_{n\geq 0}$ a Fibonacci sorozat, amelyet az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és minden $n \geq 1$ esetén $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ rekurzióval értelmezünk. Az A^n mátrix elemeinek összege

$$S_n = (F_{n+1} + F_n) + (F_n + F_{n-1}) = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}.$$

Innen kapjuk, hogy a keresett összeg $S_5 = F_8 = 21$.

Az eredmény az $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ és $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixok kiszámolásával is megkapható.

7. Legyen $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú valós számsorozat, amelyre $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$, minden $n \geq 1$ esetén. Ekkor a sorozat határértéke

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ nem létezik; $\boxed{\text{D}}$ 0.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **igaz**.

Megoldás: A megadott egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $x_1 > 2x_2 > 3x_3 > \ldots > nx_n$, ahonnan $0 < x_n < \dfrac{x_1}{n}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. A fogó tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

8. Az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x < 0 \\ x^3 + x + \alpha, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

összefüggéssel értelmezett $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 1$;

$\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 0$; $\boxed{\text{D}}$ nem létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre a függvény folytonos.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{C}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az f függvény folytonos a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon, ezért elég vizsgálni a folytonosságot az $x = 0$ pontban.

Kiszámoljuk a függvény jobb és bal oldali határértékét az $x = 0$ pontban:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (x^3 + x + \alpha) = \alpha = f(0).$$

A folytonosság jobb és bal oldali határértékekkel való jellemzéséből kapjuk, hogy $\alpha = 0$.

9. Az $x = 9$ abszcisszájú pontban az $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenlete

$\boxed{\text{A}}$ $-12y + x - 15 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $12y - x - 15 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $y - 12x - 15 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $y + 12x + 15 = 0$.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Mivel $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, minden $x \neq 1$ esetén, ezért az érintő egyenlete

$$y - f(9) = f'(9)(x - 9) \qquad \Leftrightarrow \qquad y - 2 = \frac{1}{12}(x - 9) \qquad \Leftrightarrow \qquad 12y - x - 15 = 0.$$

10. A $4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1$ egyenlet megoldásainak halmaza

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{\frac{\pi}{8} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: A megadott egyenlet a következőképpen alakítható át:

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 1,$$

ahonnan $4x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, vagyis $x \in \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Tehát a $\boxed{\text{B}}$ állítás igaz, míg az $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ és $\boxed{\text{D}}$ állítások hamisak.

11. Az $ABCD$ paralelogramma A és B csúcsai a $3x - y - 4 = 0$ egyenletű egyenesen találhatók, míg az AC és BD átlók O metszéspontjának koordinátái $(3, 4)$. Ha az A csúcs koordinátái $(0, -4)$, akkor a CD egyenes egyenlete

$\boxed{\text{A}}$ $x + 3y - 42 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $x - 3y - 6 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $3x - y - 6 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $y = 3x + 6$.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{C}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: A C pont az A pont szimmetrikusa az O pontra nézve, ezért

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} \;\Leftrightarrow\; 3 = \frac{0 + x_C}{2} \;\Leftrightarrow\; x_C = 6$$

és

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} \;\Leftrightarrow\; 4 = \frac{-4 + y_C}{2} \;\Leftrightarrow\; y_C = 12.$$

A CD egyenes iránytényezője megegyezik az AB egyenes iránytényezőjével, amely 3-mal egyenlő. Ezek alapján felírható a CD egyenes egyenlete

$$y - 12 = 3(x - 6) \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0.$$

12. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = 2x - [2x]$ képlettel értelmezzük, ahol $[a]$ az $a \in \mathbb{R}$ szám egész része. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az f függvény periódusa $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ Az f függvény injektív.

$\boxed{\text{C}}$ Az f függvény szürjektív.

$\boxed{\text{D}}$ Az f függvény páros.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Az f függvény periódusa $\frac{1}{2}$, mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 2x + 1 - [2x + 1] = 2x - [2x] = f(x).$$

Ez alapján az f függvény nem injektív és nem is szürjektív, mert az f függvény képe megegyezik a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallum f általi képével, ezért $2 \notin \operatorname{Im} f$. Mivel $f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$ és $f(-\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$, ezért az f függvény nem páros.

13. Adott az $S_n = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ összeg, ahol i az imaginárius egység ($i^2 = -1$). Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az S_{2020} valós szám.

$\boxed{\text{B}}$ Az $|S_{2020}|$ szám irracionális.

$\boxed{\text{C}}$ Az S_{2022} imaginárius része egyenlő 1011-gyel.

$\boxed{\text{D}}$ $|S_{2022}| = 1011$.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Ismert, hogy $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. A közbeeső értékek összege:

$$\begin{aligned} s_1 &= i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = 2 - 2i, \\ s_2 &= 5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 = 2 - 2i, \\ &\vdots \\ s_{505} &= 2017i^{2017} + 2018i^{2018} + 2019i^{2019} + 2020i^{2020} = 2 - 2i. \end{aligned}$$

Kapjuk, hogy

$$S_{2020} = s_1 + s_2 + \ldots + s_{505} = 505(2 - 2i) = 1010(1 - i),$$

tehát S_{2020} nem valós szám. Továbbá $|S_{2020}| = 1010\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tehát $|S_{2020}|$ irracionális szám. Kiszámoljuk, hogy

$$S_{2022} = S_{2020} + 2021i^{2021} + 2022i^{2022} = 1010(1 - i) + 2021i - 2022 = -1012 + 1011i,$$

ahonnan az S_{2022} imaginárius része 1011 és $|S_{2022}| = \sqrt{(-1012)^2 + 1011^2} \neq 1011$.

14. Legyen $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ az alábbi egyenletrendszer megoldása

$$\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 0 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1. \end{cases}$$

Ekkor a $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y$ kifejezés értéke

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 12; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 10.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Legyen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ az egyenletrendszer egy megoldása. Ha bevezetjük az $A = \log_{225} x$ és $B = \log_{64} y$ jelöléseket, akkor az első egyenlet alapján $A + B = 0$, ahonnan $B = -A$. A második egyenlet alapján $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = 1$, tehát $A = 2$ és $B = -2$. Azt kaptuk, hogy $\log_{225} x = 2$, ahonnan $x = 225^2 = 15^4$. Hasonlóan, $\log_{64} y = -2$, ahonnan $y = 64^{-2} = 2^{-12}$.

Végül a keresett kifejezés értéke $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y = \log_{30}(15^{12} \cdot 2^{12}) = 12$, így $\boxed{\text{B}}$ a helyes válasz.

15. A $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ egyenlet megoldásainak összege

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Az egyenlet átírható

$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$

alakba. Bevezetve a $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ jelölést, a $t^2 - 6t + 1 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai $t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Ha $t_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}$ és $t_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$, akkor

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = t_1 \cdot t_2 = 9 - 8 = 1,$$

tehát $x_1 + x_2 = 0$.

16. Egy négyzet egyik csúcsa $A(3, 1)$ és egyik átlója tartóegyenesének egyenlete $y - x = 0$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az A csúcs távolsága a megadott átlótól 2.
$\boxed{\text{B}}$ A másik átló tartóegyenesének egyenlete $x + y + 2 = 0$.
$\boxed{\text{C}}$ A négyzet területe 4.
$\boxed{\text{D}}$ A $C(1, 3)$ pont szintén a négyzet csúcsa.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{C}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{D}}$ **igaz**.

Megoldás: Az A csúcs távolsága a megadott egyenestől

$$d = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}.$$

Négyzet másik átlója átmegy az A ponton és merőleges a megadott átlóra, ezért $d_2 : y - 1 = (-1)(x - 3)$, tehát $d_2 : x + y - 4 = 0$. A négyzet területe egyenlő az átló hossza négyzetének felével, tehát $\frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4$. A $C(1, 3)$ pont az A csúcs szimmetrikusa a megadott átlóra nézve, ezért a C pont is a négyzet csúcsa.

17. Az ABC háromszög oldalainak hossza $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Ha az AM oldalfelező hossza c, akkor

$\boxed{\text{A}}$ $a^2 + 2c^2 = 3b^2$; $\boxed{\text{B}}$ $a^2 + 2c^2 = 2b^2$; $\boxed{\text{C}}$ $\cos C = \frac{4a}{3b}$; $\boxed{\text{D}}$ $\cos C = \frac{3a}{4b}$.

Válasz:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **igaz**.

Megoldás: Az oldalfelező tétel alapján $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Felhasználva az $AM = c$ feltevést kapjuk, hogy $a^2 + 2c^2 = 2b^2$. Tehát az $\boxed{\text{A}}$ válasz hamis, míg a $\boxed{\text{B}}$ válasz igaz.

Felhasználva az előző összefüggést és az AB oldalra felírt koszinusztételt kapjuk, hogy $3a = 4b\cos C$. Tehát a $\boxed{\text{D}}$ válasz igaz, míg a $\boxed{\text{C}}$ válasz hamis.

18. A $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ határérték

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$.

Válasz:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **igaz**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x}{\sin x}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x\sin x + x^2\cos x}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x}\\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

19. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ képlettel értelmezzük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, minden $x \in (0,\infty)$ esetén.

$\boxed{\text{C}}$ Az f függvény páratlan.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Válasz:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **igaz**.

Megoldás: Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

ezért az f függvény konstans az $\mathbb{R}$ halmazon. Ez alapján minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, ahonnan azonnal adódik, hogy csak a $\boxed{\text{B}}$ és $\boxed{\text{D}}$ válaszok igazak.

20. Az $xe^x = -\dfrac{1}{3}$ egyenlet valós megoldásainak száma

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

Válasz:

A hamis; **B hamis**; **C igaz**; **D hamis**.

Megoldás: Vegyük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, melyet az $f(x)=xe^x$ képlettel értelmezünk. Ekkor $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$, minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. Az f függvény változási táblázata

x	$-\infty$			-1			∞
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

Mivel $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<-\dfrac{1}{3}<0$, ezért a táblázat alapján pontosan két megoldása van az $x\mathrm{e}^x=-\dfrac{1}{3}$ egyenletnek.

21. Az ABC háromszögben vegyük fel az $A'\in[BC]$, $B'\in[CA]$, $C'\in[AB]$ pontokat úgy, hogy $\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=\alpha$. Ha T_{ABC} az ABC háromszög területe és $T_{A'B'C'}$ az $A'B'C'$ háromszög területe, akkor

A $\dfrac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}=1-3\alpha(1-\alpha)$;

B $\dfrac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}\in\left[\frac{1}{4},1\right]$;

C $\dfrac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}=1-12\alpha^2(1-\alpha)^2$;

D $\dfrac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Válasz:

A **igaz**; B **igaz**; C **hamis**; D **hamis**.

Megoldás: $\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=\alpha\in[0,1]$. A szinuszos területképlet alapján az $AB'C'$, $A'BC'$ és $A'B'C$ háromszögek területe egyenlő $\alpha(1-\alpha)T_{ABC}$-vel. Innen $T_{A'B'C'}=T_{ABC}-3\alpha(1-\alpha)T_{ABC}$, tehát

$$\frac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}=1-3\alpha(1-\alpha)=3\alpha^2-3\alpha+1=3\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\in\left[\frac{1}{4},1\right].$$

22. A $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\int_1^{\operatorname{tg}x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg}x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}$ határérték

A 1; B π; C 0; D -1.

Válasz:

A hamis; **B hamis**; **C hamis**; **D igaz**.

Megoldás: Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\mathrm{e}^{t^2}$ függvény folytonos, ezért van primitívje. Ha F az f egy primitívje, akkor

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\int_1^{\operatorname{tg}x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg}x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{F(\operatorname{tg}x)-F(1)}{F(\operatorname{ctg}x)-F(1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}^2x)}{f(\operatorname{ctg}x)(-1-\operatorname{ctg}^2x)}=-1.$$

23. A háromszög, amelyre teljesül a $\sin(B)+\cos(B)=\sin(C)+\cos(C)$ összefüggés

A derékszögű; B egyenlő szárú; C egyenlő oldalú; D derékszögű vagy egyenlő szárú.

Válasz:

A **hamis**; B **hamis**; C **hamis**; D **igaz**.

Megoldás: A megadott összefüggés átírható $\sin(B) - \sin(C) = \cos(C) - \cos(B)$ alakba. A szinuszok és koszinuszok különbségére vonatkozó képlet alapján

$$2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2},$$

azaz

$$\sin\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B+C}{2}\right) = 0.$$

A $\sin\frac{B-C}{2} = 0$ egyenlőségből kapjuk, hogy $B - C = 0$, azaz $B = C$, tehát a háromszög egyenlő szárú. A $\cos\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B+C}{2} = 0$ összefüggés átírható $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right)$ alakba, ahonnan $B + C = \frac{\pi}{2}$, s ekkor a háromszög derékszögű.

24. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat általános tagja

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^3}},\ \text{minden } n \in \mathbb{N}^* \text{ esetén.}$$

Használjuk az $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelölést. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $\ell = 0$. B $\ell = \frac{\sqrt{2}}{3}$. C $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{Q}$. D $\ell = \infty$.

Válasz:

A hamis; **B hamis**; **C igaz**; **D hamis**.

Megoldás: Észrevehető, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}}\right).$$

Vegyük az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ függvényt. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a $[0,1]$ intervallum egyenlőközű felosztása és $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a Δ_n felosztáshoz rendelt közbeeső pontrendszer. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az a_n kifejezés az f függvény Δ_n felosztáshoz és ξ_n közbeeső pontrendszerhez rendelt Riemann összege, azaz $a_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n)$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} ||\Delta_n|| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ és az f függvény integrálható, ezért

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Tehát csak a C válasz helyes.

25. Egy téglalap egyik csúcsa $A(2, -3)$ és két oldala a

$$(d_1): 2x - 3y + 5 = 0,$$
$$(d_2): 3x + 2y - 7 = 0,$$

egyenletű egyeneseken található. A két egyenes egyenlete, amelyeken a téglalap másik két oldala található

A $2x - 3y - 13 = 0$ és $3x + 2y = 0$; B $y + 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ és $y + 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$;

C $2x - 3y + 13 = 0$ és $3x - 2y = 0$; D $y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ és $y - 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$.

Válasz:

A igaz; **B igaz**; **C hamis**; **D hamis**.

Megoldás: Észrevehető, hogy a d_1 és d_2 egyenesek merőlegesek egymásra, mivel az iránytényezőik $m_1 = \frac{2}{3}$ és $m_2 = -\frac{3}{2}$, illetve az egyenesek nem mennek át az A ponton. A téglalap másik két oldalegyenese áthalad az A ponton és párhuzamosak a d_1, illetve d_2 egyenesekkel. Az A ponton áthaladó d_1 egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete $y + 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$, vagyis $2x - 3y - 13 = 0$. Az A ponton áthaladó d_2 egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete pedig $y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$, vagyis $3x + 2y = 0$.

26. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ egy paraméter és vizsgáljuk a következő 3 ismeretlenes lineáris egyenletrendszert

$$\begin{cases} 2x + \alpha y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = 1 \\ 2x + 10y + z = 1. \end{cases}$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az α bármely értékére a rendszer mátrixának rangja 3.
$\boxed{\text{B}}$ Az α bármely értékére a rendszer bővített mátrixának rangja 3.
$\boxed{\text{C}}$ A megadott rendszer inkompatibilis akkor és csakis akkor, ha $\alpha \neq 3$.
$\boxed{\text{D}}$ A megadott rendszer kompatibilis akkor és csakis akkor, ha $\alpha \neq 3$.

Válasz:
$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **igaz**.

Megoldás: Az egyenletrendszer mátrixa, illetve bővített mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Innen kapjuk, hogy $\det(A) = 6\alpha - 18 = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\alpha = 3$, tehát a rendszer kompatibilis, ha $\alpha \neq 3$. Az $\alpha = 3$ esetben $\text{rang}(A) = 2$ és $\text{rang}(\overline{A}) = 3$, ezért a Kronecker-Capelli–tétel alapján a rendszer inkompatibilis.

27. Legyen $G \subseteq \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, amelyre

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \quad \forall x, y \in G$$

egy műveletet értelmez a G halmazon. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ A G megegyezhet a $(0, 2)$ intervallummal.
$\boxed{\text{B}}$ A G megegyezhet a $(0, 1)$ intervallummal.
$\boxed{\text{C}}$ Ha $G = (0, 1)$, akkor a „$*$” műveletnek van semleges eleme.
$\boxed{\text{D}}$ Ha $G = (0, 1)$, akkor $\frac{1}{3}$ szimmetrikus eleme $\frac{2}{3}$.

Válasz:
$\boxed{\textbf{A}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{D}}$ **igaz**.

Megoldás: Az $x = \frac{1}{4}$ és $y = \frac{3}{2}$ esetén a kifejezés nevezője 0, ezért az $\boxed{\text{A}}$ válasz hamis. Ha $0 < x, y < 1$, akkor $xy > 0$ és $(1 - x)(1 - y) > 0$, amelyeket összeadva kapjuk, hogy $2xy - x - y + 1 > 0$. Ezért $0 < x * y < 1$, tehát a $\boxed{\text{B}}$ válasz igaz.
A semleges elem létezésére vonatkozó $x * e = x$, minden $x \in (0, 1)$ esetén feltételből kapjuk, hogy a semleges elem $e = \frac{1}{2}$. Tehát a $\boxed{\text{C}}$ válasz is igaz.
A szimmetrikus elemre vonatkozó $x * x' = \frac{1}{2}$ feltételből kapjuk, hogy $x' = 1 - x$, amely szintén a $(0, 1)$ intervallumban van, ha $x \in (0, 1)$. Tehát a $\boxed{\text{D}}$ válasz is igaz.

28. Az

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál értéke

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Az $x = \frac{1}{t}$ változócserét végzünk. Ekkor $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ és

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{2022}^{\frac{1}{2022}} \frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln\frac{1}{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{-\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = \\ &= -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ezek alapján $\displaystyle\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$.

29. Adottak az $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ számok úgy, hogy xy, yz, zx mértani haladványt alkotnak, melynek hányadosa egy 1-től különböző egész szám. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Ha y teljes négyzet, akkor z is teljes négyzet.
$\boxed{\text{B}}$ Ha z teljes négyzet, akkor y is teljes négyzet.
$\boxed{\text{C}}$ Ha y teljes négyzet, akkor x is teljes négyzet.
$\boxed{\text{D}}$ Ha z teljes négyzet, akkor x is teljes négyzet.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{B}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{C}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Ha q a mértani haladvány hányadosa, akkor $qxy = yz$ és $qyz = zx$, tehát $q^2xy = zx$. Ezek alapján $z = q^2y$, tehát az $\boxed{\text{A}}$ és $\boxed{\text{B}}$ válaszok igazak.

Az $y = 1$, $x = 2$ és $z = 4$ esetén teljesülnek a kért feltételek, y és z teljes négyzetek, de x nem az. Tehát a $\boxed{\text{C}}$ és $\boxed{\text{D}}$ válaszok hamisak.

30. Adott az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat, melynek általános tagja $x_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}}\,\mathrm{d}x$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $x_{23} = \dfrac{1}{184}$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^2x_n = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \dfrac{1}{8}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$.

Válasz:

$\boxed{\textbf{A}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{B}}$ **hamis**; $\boxed{\textbf{C}}$ **igaz**; $\boxed{\textbf{D}}$ **hamis**.

Megoldás: Legyen $n \in \mathbb{N}^*$. Ekkor

$$x_n = \int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1} \cdot \left(\frac{2-x}{2+x}\right)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{8n}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{8n}.$$

Mivel $184 = 8 \cdot 23$, ezért csak az $\boxed{\text{A}}$ és $\boxed{\text{C}}$ válaszok igazak.