BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2022
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIG ZU BEACHTEN: Jede Ankreuzaufgabe hat eine oder mehrere richtige Antworten, die vom Kandidaten im elektronischen System angegeben werden müssen. Die Bewertung der Ankreuzaufgaben erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung vorgesehenen Benotungssystem.

1. Es sei $x = \sin \frac{12133}{6}\pi$. Dann ist:

A $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; B $x = \frac{1}{2}$; C $x > 0$; D $x < 0$.

2. Haben in einem kartesischen Koordinatensystem die Eckpunkte des Dreiecks ABC die Koordinaten $A(2,3)$, $B(-1,1)$, $C(-3,4)$, und ist G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, dann hat der Mittelpunkt F der Strecke AG die Koordinaten:

A $F(0,0)$; B $F(\frac{2}{3}, \frac{17}{6})$; C $F(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$; D andere Werte.

3. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $3\sin x - 2 = 0$ im Intervall $[0, \pi]$ ist:

A 0; B 1; C 2; D unendlich.

4. Gegeben sei in $\mathbb{R}$ die Gleichung $\sqrt{x^2 - 3} = x^2 - 5$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Gleichung hat keine Lösung. B Die Gleichung hat genau zwei Lösungen.
C Die Gleichung hat genau vier Lösungen. D Die Gleichung hat nur positive Lösungen.

5. Die Anzahl der rationalen Glieder aus der Binomialentwicklung von $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}\right)^{300}$ beträgt:

A 50; B 51; C 52; D 150.

6. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Die Summe der Elemente der Matrix A^5 beträgt:

A 19; B 20; C 21; D 22.

7. Es sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$ für alle $n \geq 1$ ist. Dann ist der Grenzwert der Folge:

A 1; B ∞; C er existiert nicht; D 0.

8. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x < 0 \\ x^3 + x + \alpha & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$$

ist stetig, falls:

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 1$;
$\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 0$; $\boxed{\text{D}}$ es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion stetig ist.

9. Die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ im Punkt mit der Abszisse $x = 9$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ $-12y + x - 15 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $12y - x - 15 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $y - 12x - 15 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $y + 12x + 15 = 0$.

10. Die Lösungsmenge der Gleichung

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1$$

ist:

$\boxed{\text{A}}$ $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{\frac{\pi}{8} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

11. Die Eckpunkte A und B des Parallelogramms $ABCD$ liegen auf der Geraden $3x - y - 4 = 0$, und der Schnittpunkt O der Diagonalen AC und BD hat die Koordinaten $(3, 4)$. Sind $(0, -4)$ die Koordinaten des Eckpunktes A, dann ist die Gleichung der Geraden CD:

$\boxed{\text{A}}$ $x + 3y - 42 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $x - 3y - 6 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $3x - y - 6 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $y = 3x + 6$.

12. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert $f(x) = 2x - [2x]$, wobei mit $[a]$ der ganze Teil der Zahl $a \in \mathbb{R}$ bezeichnet wird. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ f hat die Periode $\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{B}}$ f ist injektiv. $\boxed{\text{C}}$ f ist surjektiv. $\boxed{\text{D}}$ f ist gerade.

13. Gegeben sei die Summe $S_n = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n, n \in \mathbb{N}^*$, wobei i die imaginäre Einheit darstellt ($i^2 = -1$). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ S_{2020} ist eine reelle Zahl. $\boxed{\text{B}}$ $|S_{2020}|$ ist eine irrationale Zahl.
$\boxed{\text{C}}$ Der Imaginärteil von S_{2022} ist 1011. $\boxed{\text{D}}$ $|S_{2022}| = 1011$.

14. Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 0 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1. \end{cases}$$

Der Wert des Ausdrucks $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y$ beträgt:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 12; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 10.

15. Die Summe der Lösungen der Gleichung $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2.

16. Der Punkt $A(3, 1)$ ist der Eckpunkt eines Quadrates, dessen eine Diagonale auf der Gerade mit der Gleichung $y - x = 0$ liegt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Der Abstand von A zu dieser Diagonale ist 2.
$\boxed{\text{B}}$ Die Gleichung der Gerade, auf der die andere Diagonale liegt, ist $x + y + 2 = 0$.
$\boxed{\text{C}}$ Der Flächeninhalt des Quadrates ist 4.
$\boxed{\text{D}}$ Der Punkt $C(1, 3)$ ist ebenfalls ein Eckpunkt des Quadrates.

17. Gegeben sei das Dreieck ABC, in dem die Seitenlängen mit $BC = a, AC = b, AB = c$ bezeichnet werden. Es wird angenommen, dass die Länge der Seitenhalbierenden AM gleich c ist. Dann gilt:

$\boxed{\text{A}}$ $a^2 + 2c^2 = 3b^2$; $\boxed{\text{B}}$ $a^2 + 2c^2 = 2b^2$; $\boxed{\text{C}}$ $\cos C = \frac{4a}{3b}$; $\boxed{\text{D}}$ $\cos C = \frac{3a}{4b}$.

18. Der Wert des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$.

19. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $f(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$, für alle $x\in\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $f(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, für alle $x\in(0,\infty)$;

$\boxed{\text{C}}$ Die Funktion f ist ungerade.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

20. Die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung $x\mathrm{e}^x=-\dfrac{1}{3}$ beträgt:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

21. Es seien ABC ein Dreieck und $A'\in[BC]$, $B'\in[CA]$, $C'\in[AB]$ so, dass $\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=\alpha$ ist. Sind $\mathcal{A}_{ABC}$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und $\mathcal{A}_{A'B'C'}$ der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$, dann gilt:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}}=1-3\alpha(1-\alpha)$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}}\in\left[\frac{1}{4},1\right]$;

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}}=1-12\alpha^2(1-\alpha)^2$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

22. Der Wert des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\int_1^{\operatorname{tg} x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg} x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ π; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -1.

23. Das Dreieck, in dem die Gleichheit $\sin(B)+\cos(B)=\sin(C)+\cos(C)$ gilt, ist:

$\boxed{\text{A}}$ rechtwinklig; $\boxed{\text{B}}$ gleichschenklig; $\boxed{\text{C}}$ gleichseitig; $\boxed{\text{D}}$ rechtwinklig oder gleichschenklig.

24. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n^3}},\ \text{für alle } n\in\mathbb{N}^*.$$

Es sei $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $\ell=0$. $\boxed{\text{B}}$ $\ell=\frac{\sqrt{2}}{3}$. $\boxed{\text{C}}$ $\ell\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\mathbb{Q}$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell=\infty$.

25. Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den Geraden mit den Gleichungen:

$$(d_1): 2x-3y+5=0$$

$$(d_2): 3x+2y-7=0.$$

Ist $A(2,-3)$ ein Eckpunkt des Rechtecks, so liegen die beiden anderen Seiten des Rechtecks auf den Geraden:

$\boxed{\text{A}}$ $2x-3y-13=0$ und $3x+2y=0$; $\boxed{\text{B}}$ $y+3=\frac{2}{3}(x-2)$ und $y+3=-\frac{3}{2}(x-2)$;

$\boxed{\text{C}}$ $2x-3y+13=0$ und $3x-2y=0$; $\boxed{\text{D}}$ $y-3=\frac{2}{3}(x-2)$ und $y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$.

26. Gegeben seien $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Parameter und das lineare Gleichungssytem mit 3 Unbekannten

$$\begin{cases} 2x + \alpha y + 2z &= 1 \\ 4x - y + 5z &= 1 \\ 2x + 10y + z &= 1. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Der Rang der Matrix ist 3 für jeden Wert von α.

B Der Rang der erweiterten Matrix des Systems ist 3 für jeden Werte von α.

C Das System ist genau dann unlösbar, wenn $\alpha \neq 3$ ist.

D Das System ist genau dann lösbar, wenn $\alpha \neq 3$ ist.

27. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge mit der Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \forall x, y \in G,$$

eine Operation auf G darstellt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A G kann das Intervall $(0, 2)$ sein.

B G kann das Intervall $(0, 1)$ sein.

C Ist $G = (0, 1)$, dann hat „$*$" ein neutrales Element.

D Ist $G = (0, 1)$, dann ist $\frac{2}{3}$ das symmetrische Element von $\frac{1}{3}$.

28. Der Wert des Integrals

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

ist:

A 0; B 1; C 2; D 3.

29. Gegeben seien $x, y, z \in \mathbb{Z}^\star$ so, dass xy, yz, zx eine geometrische Folge mit dem Quotienten eine von 1 verschiedene ganze Zahl bilden. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Ist y eine Quadratzahl, dann ist auch z eine Quadratzahl.

B Ist z eine Quadratzahl, dann ist auch y eine Quadratzahl.

C Ist y eine Quadratzahl, dann ist auch x eine Quadratzahl.

D Ist z eine Quadratzahl, dann ist auch x eine Quadratzahl.

30. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sei durch $x_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}} \, \mathrm{d}x$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$, definiert. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $x_{23} = \frac{1}{184}$. B $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 x_n = 1$. C $\lim\limits_{n \to \infty} n x_n = \dfrac{1}{8}$. D $\lim\limits_{n \to \infty} n x_n = 0$.

BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2022
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK
Antworten

1. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
2. $\boxed{\textbf{B}}$
3. $\boxed{\textbf{C}}$
4. $\boxed{\textbf{B}}$
5. $\boxed{\textbf{B}}$
6. $\boxed{\textbf{C}}$
7. $\boxed{\textbf{D}}$
8. $\boxed{\textbf{C}}$
9. $\boxed{\textbf{B}}$
10. $\boxed{\textbf{B}}$
11. $\boxed{\textbf{C}}$
12. $\boxed{\textbf{A}}$
13. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
14. $\boxed{\textbf{B}}$
15. $\boxed{\textbf{B}}$
16. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
17. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
18. $\boxed{\textbf{A}}$
19. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
20. $\boxed{\textbf{C}}$
21. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
22. $\boxed{\textbf{D}}$
23. $\boxed{\textbf{D}}$
24. $\boxed{\textbf{C}}$
25. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
26. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
27. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
28. $\boxed{\textbf{A}}$
29. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
30. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2022
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK
ANTWORTEN und LÖSUNGEN

1. Es sei $x = \sin \dfrac{12133}{6} \pi$. Dann ist:

A $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; B $x = \dfrac{1}{2}$; C $x > 0$; D $x < 0$.

Antwort:

A falsch; **B wahr**; **C wahr**; **D falsch**.

Lösung: Aus $\dfrac{12133}{6} = 2022 + \dfrac{1}{6}$ folgt $\dfrac{12133}{6}\pi = 2022\pi + \dfrac{\pi}{6}$. Also ist $\sin\left(2022\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2. Haben in einem kartesischen Koordinatensystem die Eckpunkte des Dreiecks ABC die Koordinaten $A(2,3)$, $B(-1,1)$, $C(-3,4)$, und ist G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, dann hat der Mittelpunkt F der Strecke AG die Koordinaten:

A $F(0,0)$; B $F(\frac{2}{3}, \frac{17}{6})$; C $F(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$; D andere Werte.

Antwort:

A falsch; **B wahr**; **C falsch**; **D falsch**.

Lösung: Die Koordinaten des Schwerpunktes sind

$$G\left(\frac{2+(-1)+(-3)}{3}, \frac{3+1+4}{3}\right) = G\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

Somit hat der Mittelpunkt der Strecke AG die Koordinaten $F\left(\frac{2+(-2/3)}{2}, \frac{3+8/3}{2}\right) = F\left(\frac{2}{3}, \frac{17}{6}\right)$.

3. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $3\sin x - 2 = 0$ im Intervall $[0,\pi]$ ist:

A 0; B 1; C 2; D unendlich.

Antwort:

A falsch; **B falsch**; **C wahr**; **D falsch**.

Lösung: Die Lösungsmenge ist $\{\arcsin\frac{2}{3}, \pi - \arcsin\frac{2}{3}\}$, also eine Menge mit zwei Elementen.

4. Gegeben sei in $\mathbb{R}$ die Gleichung $\sqrt{x^2-3} = x^2 - 5$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Gleichung hat keine Lösung.
B Die Gleichung hat genau zwei Lösungen.
C Die Gleichung hat genau vier Lösungen.
D Die Gleichung hat nur positive Lösungen.

Antwort:

A falsch; **B wahr**; **C falsch**; **D falsch**.

Lösung: Man setzt die Bedingungen $x^2-3\ge 0$ und $x^2-5\ge 0$, also $x\in(-\infty,-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5},+\infty)$. Durch Quadrieren der Gleichung erhält man

$$x^2-3=(x^2-5)^2 \iff x^2-3=x^4-10x^2+25 \iff x^4-11x^2+28=0.$$

Mit der Bezeichnung $y=x^2$ schreibt sich die Gleichung als $y^2-11y+28=0$, deren Lösungen $y_1=4$ und $y_2=7$ sind. Somit sind die Lösungen der Gleichung $x^4-11x^2+28=0$ die Zahlen $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-\sqrt{7}$ und $x_4=\sqrt{7}$. Nur x_3 und x_4 genügen der Bedingung $x^2-5\ge 0$, also hat die Gleichung $\sqrt{x^2-3}=x^2-5$ die Lösungen x_3 und x_4.

5. Die Anzahl der rationalen Glieder aus der Binomialentwicklung von $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)^{300}$ beträgt:

$\boxed{\text{A}}$ 50; $\boxed{\text{B}}$ 51; $\boxed{\text{C}}$ 52; $\boxed{\text{D}}$ 150.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Das allgemeine Glied der Binomialentwicklung ist $T_{k+1}=C_{300}^k 2^{150-\frac{k}{2}}\cdot 5^{\frac{k}{3}}$, $0\le k\le 300$. Für $k\in\{0,1,\ldots,300\}$ ist $T_{k+1}\in\mathbb{Q}$ genau dann, wenn k sowohl durch 2 als auch durch 3, also durch 6 teilbar ist. Somit ist $k\in\{0,6,12,\ldots,300\}$. Es folgt, dass 51 Glieder rational sind.

6. Gegeben sei die Matrix $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Die Summe der Elemente der Matrix A^5 beträgt:

$\boxed{\text{A}}$ 19; $\boxed{\text{B}}$ 20; $\boxed{\text{C}}$ 21; $\boxed{\text{D}}$ 22.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Es gilt $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$, für $n\in\mathbb{N}^*$, wobei $(F_n)_{n\ge 0}$ die wie folgt definierte Fibonacci-Folge ist: $F_0=0$, $F_1=1$ und $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $\forall n\ge 1$. Für $n\in\mathbb{N}^*$ ist die Summe S_n der Elemente der Matrix A^n gleich

$$S_n=(F_{n+1}+F_n)+(F_n+F_{n-1})=F_{n+2}+F_{n+1}=F_{n+3}.$$

Also ist $S_5=F_8=21$.

Das Ergebnis kann man auch durch das Berechnen der Matrizen A^2, A^4 und $A^5=A\cdot A^4$ erhalten.

7. Es sei $(x_n)_{n\ge 1}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $(n+1)x_{n+1}-nx_n<0$ für alle $n\ge 1$ ist. Dann ist der Grenzwert der Folge:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ er existiert nicht; $\boxed{\text{D}}$ 0.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **wahr**.

Lösung: Aus $x_1>2x_2>3x_3>\ldots>nx_n \quad\Rightarrow\quad 0<x_n<\dfrac{x_1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^* \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

8. Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x<0\\ x^3+x+\alpha & \text{dacă } x\ge 0,\end{cases}$$

ist stetig, falls:

A $\alpha \in \mathbb{R}$; B $\alpha = 1$;
C $\alpha = 0$; D es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion stetig ist.

Antwort:

A falsch; **B falsch**; **C wahr**; **D falsch**.

Lösung: Die einseitigen Grenzwerte der Funktion f in 0 sind

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \text{ und } \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (x^3 + x + \alpha) = \alpha = f(0).$$

Es folgt, dass f genau dann stetig ist, wenn $\alpha = 0$ ist.

9. Die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ im Punkt mit der Abszisse $x = 9$ ist:

A $-12y + x - 15 = 0$; B $12y - x - 15 = 0$; C $y - 12x - 15 = 0$; D $y + 12x + 15 = 0$.

Antwort:

A falsch; **B wahr**; **C falsch**; **D falsch**.

Lösung: Aus $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ ergibt sich die Gleichung der gesuchten Tangente

$$y - f(9) = f'(9)(x-9) \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 = \frac{1}{12}(x-9) \quad \Leftrightarrow \quad 12y - x - 15 = 0.$$

10. Die Lösungsmenge der Gleichung

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1$$

ist:

A $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; B $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; C $\{\frac{\pi}{8} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; D $\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Antwort:

A falsch; **B wahr**; **C falsch**; **D falsch**.

Lösung: $4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow$
$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 1 \Leftrightarrow 4x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

11. Die Eckpunkte A und B des Parallelogramms $ABCD$ liegen auf der Geraden $3x - y - 4 = 0$, und der Schnittpunkt O der Diagonalen AC und BD hat die Koordinaten $(3, 4)$. Sind $(0, -4)$ die Koordinaten des Eckpunktes A, dann ist die Gleichung der Geraden CD:

A $x + 3y - 42 = 0$; B $x - 3y - 6 = 0$; C $3x - y - 6 = 0$; D $y = 3x + 6$.

Antwort:

A falsch; **B falsch**; **C wahr**; **D falsch**.

Lösung: Da der Punkt O der Mittelpunkt der Strecke $[AC]$ ist, gelten die Gleichheiten

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{0 + x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = 6$$

und

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{-4 + y_C}{2} \Leftrightarrow y_C = 12.$$

Die Steigung der Geraden CD stimmt mit der Steigung der Geraden AB überein, also ist sie 3. Die Gleichung der Geraden CD ist also

$$y - 12 = 3(x - 6) \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0.$$

12. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert $f(x) = 2x - [2x]$, wobei mit $[a]$ der ganze Teil der Zahl $a \in \mathbb{R}$ bezeichnet wird. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ f hat die Periode $\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{B}}$ f ist injektiv. $\boxed{\text{C}}$ f ist surjektiv. $\boxed{\text{D}}$ f ist gerade.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Die Funktion f hat die Periode $\frac{1}{2}$, weil für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichheiten gelten

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 2x + 1 - [2x + 1] = 2x - [2x] = f(x).$$

Es folgt, dass f nicht injektiv ist. Die Funktion ist auch nicht surjektiv ist, weil $f(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1)$ ist. Aus $f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$ und $f(-\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$ folgt, dass die Funktion f nicht gerade ist.

13. Gegeben sei die Summe $S_n = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n, n \in \mathbb{N}^*$, wobei i die imaginäre Einheit darstellt ($i^2 = -1$). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ S_{2020} ist eine reelle Zahl. $\boxed{\text{B}}$ $|S_{2020}|$ ist eine irrationale Zahl.
$\boxed{\text{C}}$ Der Imaginärteil von S_{2022} ist 1011. $\boxed{\text{D}}$ $|S_{2022}| = 1011$.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{C}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Es gelten $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir führen die folgenden Teilsummen ein:
$s_1 = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = 2 - 2i\,,$
$s_2 = 5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 = 2 - 2i\,,$
...
$s_{505} = 2017i^{2017} + 2018i^{2018} + 2019i^{2019} + 2020i^{2020} = 2 - 2i.$
Dann ist

$$S_{2020} = s_1 + s_2 + \ldots + s_{505} = 505(2 - 2i) = 1010(1 - i).$$

Es folgt, dass $S_{2020} \notin \mathbb{R}$ und $|S_{2020}| = 1010\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Also ist $|S_{2020}|$ eine irrationale Zahl.
Aus

$$S_{2022} = S_{2020} + 2021i^{2021} + 2022i^{2022} = 1010(1 - i) + 2021i - 2022 = -1012 + 1011i$$

folgt, dass der Imaginärteil von S_{2022} gleich 1011 und $|S_{2022}| = \sqrt{(-1012)^2 + 1011^2} \neq 1011$ ist.

14. Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 0 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1. \end{cases}$$

Der Wert des Ausdrucks $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y$ beträgt:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 12; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 10.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ eine Lösung dieses Systems. Bezeichnet man mit $A = \log_{225} x$ und mit $B = \log_{64} y$, so folgt aus der ersten Gleichung $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$. Die zweite Gleichung liefert $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = 1$, also $A = 2$ und $B = -2$. Somit ist $\log_{225} x = 2$, also $x = 225^2 = 15^4$. Aus $\log_{64} y = -2$ erhält man $y = 64^{-2} = 2^{-12}$.

Somit ist also $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y = \log_{30}(15^{12} \cdot 2^{12}) = 12$.

15. Die Summe der Lösungen der Gleichung $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}.$$

Bezeichnet man mit $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, so erhält man die Gleichung zweiten Grades $t^2 - 6t + 1 = 0$ mit den Lösungen $t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Da beide Lösungen positiv sind, hat die gegebene Gleichung zwei Lösungen x_1 und x_2. Ist $t_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}$ und $t_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$, dann folgt

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = t_1 \cdot t_2 = 9 - 8 = 1,$$

also $x_1 + x_2 = 0$.

16. Der Punkt $A(3, 1)$ ist der Eckpunkt eines Quadrates, dessen eine Diagonale auf der Geraden mit der Gleichung $y - x = 0$ liegt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Der Abstand von A zu dieser Diagonale ist 2.

$\boxed{\text{B}}$ Die Gleichung der Geraden, auf der die andere Diagonale liegt, ist $x + y + 2 = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ Der Flächeninhalt des Quadrates ist 4.

$\boxed{\text{D}}$ Der Punkt $C(1, 3)$ ist ebenfalls ein Eckpunkt des Quadrates.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{D}}$ **wahr**.

Lösung: Der Abstand von A zu der gegebenen Geraden ist

$$d = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}.$$

Die zweite Diagonale des Quadrates enthält A. Da die beiden Diagonalen des Quadrates senkrecht aufeinander stehen, ist $y - 1 = (-1)(x - 3)$, also $x + y - 4 = 0$, die Gleichung der Geraden, auf der die zweite Diagonale liegt.

Der Flächeninhalt des Quadrates stimmt mit der Hälfte des Quadrates der Länge der Diagonale überein, beträgt also $\frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4$. Da $C(1, 3)$ der zu A symmetrische Punkt bezüglich der im Text der Aufgabe erwähnten Diagonale ist, ist C ebenfalls ein Eckpunkt des Quadrates.

17. Gegeben sei das Dreieck ABC, in dem die Seitenlängen mit $BC = a, AC = b, AB = c$ bezeichnet werden. Es wird angenommen, dass die Länge der Seitenhalbierenden AM gleich c ist. Dann gilt:

$\boxed{\text{A}}$ $a^2 + 2c^2 = 3b^2$; $\boxed{\text{B}}$ $a^2 + 2c^2 = 2b^2$; $\boxed{\text{C}}$ $\cos C = \frac{4a}{3b}$; $\boxed{\text{D}}$ $\cos C = \frac{3a}{4b}$.

Antwort:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **wahr**.

Lösung: Der Lehrsatz über die Länge der Seitenhalbierenden liefert die Gleichheit $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Laut Voraussetzung ist $AM = c$, also folgt $a^2 + 2c^2 = 2b^2$. Wendet man in dieser Gleichheit den Kosinussatz für die Seite c an, erhält man $3a = 4b\cos C$.

18. Der Wert des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$.

Antwort:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **wahr**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Die folgenden Rechnungen liefern den zu berechnenden Grenzwert:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x}{\sin x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x\sin x + x^2\cos x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x} \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

19. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$, für alle $x\in\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, für alle $x\in(0,\infty)$;

$\boxed{\text{C}}$ Die Funktion f ist ungerade.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Antwort:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **wahr**.

Lösung: Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R},$$

ist die Funktion f konstant auf $\mathbb{R}$. Also gilt $f(x) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Somit sind also nur die Aussagen $\boxed{\mathbf{B}}$ und $\boxed{\mathbf{D}}$ wahr.

20. Die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung $xe^x = -\dfrac{1}{3}$ beträgt:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = xe^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die folgende Tabelle gibt Aufschluss über den Verlauf der Funktion f.

x	$-\infty$			-1			∞
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

Weil $-\dfrac{1}{\mathrm{e}} < -\dfrac{1}{3} < 0$ ist, folgt aus der obigen Tabelle, dass die Gleichung $x\mathrm{e}^x = -\dfrac{1}{3}$ genau zwei Lösungen hat.

21. Es seien ABC ein Dreieck und $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$ so, dass $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = \alpha$ ist. Sind $\mathcal{A}_{ABC}$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und $\mathcal{A}_{A'B'C'}$ der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$, dann gilt:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1-\alpha)$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$;
$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 12\alpha^2(1-\alpha)^2$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Es gilt $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = \alpha \in [0,1]$. Die Formel (mit Sinus) für den Flächeninhalt eines Dreiecks verwendend, erhält man, dass der Flächeninhalt jedes der Dreiecke $AB'C'$, $A'BC'$ şi $A'B'C$ gleich $\alpha(1-\alpha)\mathcal{A}_{ABC}$ ist. Es folgt $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \mathcal{A}_{ABC} - 3\alpha(1-\alpha)\mathcal{A}_{ABC}$, also

$$\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1-\alpha) = 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 3\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right].$$

22. Der Wert des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\int_1^{\operatorname{tg} x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg} x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t}$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ π; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -1.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **wahr**.

Lösung: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$, ist stetig, besitzt also Stammfunktionen. Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gelten:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{\operatorname{tg} x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg} x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{F(\operatorname{tg} x) - F(1)}{F(\operatorname{ctg} x) - F(1)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{f(\operatorname{ctg} x)(-1 - \operatorname{ctg}^2 x)} = -1.$$

23. Das Dreieck, in dem die Gleichheit $\sin(B) + \cos(B) = \sin(C) + \cos(C)$ gilt, ist:

$\boxed{\text{A}}$ rechtwinklig; $\boxed{\text{B}}$ gleichschenklig; $\boxed{\text{C}}$ gleichseitig; $\boxed{\text{D}}$ rechtwinklig oder gleichschenklig.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **wahr**.

Lösung: Die gegebene Gleichheit ist äquivalent zu $\sin(B)-\sin(C)=\cos(C)-\cos(B)$. Die Differenzen als Produkte schreibend, erhält man:

$$2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2},$$

also

$$\sin\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}-\sin\frac{B+C}{2}\right)=0.$$

Die Gleichheit $\sin\frac{B-C}{2}=0$ liefert $B-C=0$, also ist in diesem Fall das Dreieck gleichschenklig.

Aus $\cos\frac{B+C}{2}-\sin\frac{B+C}{2}=0$ folgt $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)$, was zu $B+C=\frac{\pi}{2}$ führt, also ist in diesem Fall das Dreieck rechtwinklig.

24. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n^3}},\ \text{für alle } n\in\mathbb{N}^*.$$

Es sei $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $\ell=0$. $\boxed{\text{B}}$ $\ell=\frac{\sqrt{2}}{3}$. $\boxed{\text{C}}$ $\ell\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\mathbb{Q}$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell=\infty$.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Es gilt

$$a_n=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\qquad\text{für alle } n\in\mathbb{N}^*.$$

Es sei $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1+x}$. Für alle $n\in\mathbb{N}^*$ betrachte man die Zerlegung $\Delta_n=(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1)$ des Intervalls $[0,1]$ sowie den Zwischenvektor $\xi_n=(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1)$ der Zerlegung Δ_n. Für alle $n\in\mathbb{N}^*$ ist a_n die zu der Funktion f, der Zerlegung Δ_n und dem Zwischenvektor ξ_n gehörende riemannsche Summe, also $a_n=\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n)$. Da $\lim\limits_{n\to\infty}||\Delta_n||=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ ist, impliziert die Integreierbarkeit von f, dass

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Somit ist also nur die Aussage $\boxed{\textbf{C}}$ wahr.

25. Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den Geraden mit den Gleichungen:

$$(d_1):2x-3y+5=0$$

$$(d_2):3x+2y-7=0.$$

Ist $A(2,-3)$ ein Eckpunkt des Rechtecks, so liegen die beiden anderen Seiten des Rechtecks auf den Geraden:

$\boxed{\text{A}}$ $2x-3y-13=0$ und $3x+2y=0$; $\boxed{\text{B}}$ $y+3=\frac{2}{3}(x-2)$ und $y+3=-\frac{3}{2}(x-2)$;

$\boxed{\text{C}}$ $2x-3y+13=0$ und $3x-2y=0$; $\boxed{\text{D}}$ $y-3=\frac{2}{3}(x-2)$ und $y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Die Geraden d_1 und d_2 stehen senkrecht aufeinander, weil deren Steigungen $m_1 = \frac{2}{3}$ beziehungsweise $m_2 = -\frac{3}{2}$ sind. Außerdem liegt der Punkt A auf keiner dieser beiden Geraden. Aus diesem Grund befindet sich A auf den beiden anderen Seiten des Rechtecks. Die beiden Geraden, auf denen diese Seiten liegen, sind jeweils parallel zu d_1 und d_2. Die A enthaltende und zu d_1 parallele Gerade hat die Gleichung $y + 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ oder, äquivalent, $2x - 3y - 13 = 0$. Die A enthaltende und zu d_2 parallele Gerade hat die Gleichung $y + 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$ oder, äquivalent, $3x + 2y = 0$.

26. Gegeben seien $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Parameter und das lineare Gleichungssytem mit 3 Unbekannten

$$\begin{cases} 2x + \alpha y + 2z &= 1 \\ 4x - y + 5z &= 1 \\ 2x + 10y + z &= 1. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Der Rang der Matrix ist 3 für jeden Wert von α.
B Der Rang der erweiterten Matrix des Systems ist 3 für jeden Werte von α.
C Das System ist genau dann unlösbar, wenn $\alpha \neq 3$ ist.
D Das System ist genau dann lösbar, wenn $\alpha \neq 3$ ist.

Antwort:
A falsch; **B wahr**; **C falsch**; **D wahr**.

Lösung: Die Matrix des Systems und dessen erweiterte Matrix sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(A) = 6\alpha - 18 = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 3$ ist. Somit ist also $\operatorname{rang}(A) = 3$ genau dann, wenn $\alpha \neq 3$ ist. Wir stellen fest, dass $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 3$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ ist. Nach dem Theorem von Kronecker-Capelli ist also das System genau dann lösbar, wenn $\alpha \neq 3$ ist. Äquivalent kann diese Aussage auch so formuliert werden, dass das System genau dann unlösbar ist, wenn $\alpha = 3$ ist.

27. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge mit der Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \forall x, y \in G,$$

eine Operation auf G darstellt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A G kann das Intervall $(0, 2)$ sein.
B G kann das Intervall $(0, 1)$ sein.
C Ist $G = (0, 1)$, dann hat „$*$“ein neutrales Element.
D Ist $G = (0, 1)$, dann ist $\frac{2}{3}$ das symmetrische Element von $\frac{1}{3}$.

Antwort:
A falsch; **B wahr**; **C wahr**; **D wahr**.

Lösung: Für $x = \frac{1}{4}$ und $y = \frac{3}{2}$ ist der Ausdruck im Nenner gleich 0, also ist die Aussage **A** falsch. Sind $0 < x, y < 1$, dann gelten $xy > 0$ und $(1-x)(1-y) > 0$. Durch Addieren dieser beiden Ungleichungen folgt $2xy - x - y + 1 > 0$. Hieraus ergibt sich $0 < x * y < 1$, also ist die Aussage **B** wahr. Die Operation „$*$“ist offensichtlich kommutativ. Gilt $x * e = x$ für alle $x \in (0, 1)$, dann folgt, dass $e = \frac{1}{2}$ das neutrale Element der Operation „$*$“ist. Somit ist also die Aussage **C** wahr. Die Gleichheit $x * x' = \frac{1}{2}$ impliziert $x' = 1 - x$, also ist auch die Aussage **D** wahr.

28. Der Wert des Integrals

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

ist:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Wir führen die Substitution $x = \frac{1}{t}$ durch. Dann ist $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, und es gelten die Gleichheiten

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{2022}^{\frac{1}{2022}} \frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln\frac{1}{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{-\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = \\ &= -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $\displaystyle\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$.

29. Gegeben seien $x, y, z \in \mathbb{Z}^\star$ so, dass xy, yz, zx eine geometrische Folge mit dem Quotienten eine von 1 verschiedene ganze Zahl bilden. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Ist y eine Quadratzahl, dann ist auch z eine Quadratzahl.
$\boxed{\text{B}}$ Ist z eine Quadratzahl, dann ist auch y eine Quadratzahl.
$\boxed{\text{C}}$ Ist y eine Quadratzahl, dann ist auch x eine Quadratzahl.
$\boxed{\text{D}}$ Ist z eine Quadratzahl, dann ist auch x eine Quadratzahl.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{B}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Es sei q der Quotient der geometrischen Folge. Dann gelten die Gleichheiten $qxy = yz$ und $qyz = zx$, woraus $q^2xy = zx$ folgt. Also ist $z = q^2y$. Somit sind also die Aussagen $\boxed{\textbf{A}}$ und $\boxed{\textbf{B}}$ wahr.

Die Zahlen $y = 1$, $x = 2$ und $z = 4$ genügen den Voraussetzungen der Aufgabe. Da y und z Quadratzahlen sind, x jedoch keine Quadratzahl ist, sind die Aussagen $\boxed{\textbf{C}}$ und $\boxed{\textbf{D}}$ falsch.

30. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sei durch $x_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}}\,\mathrm{d}x$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$, definiert. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $x_{23} = \frac{1}{184}$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^2x_n = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \dfrac{1}{8}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$.

Antwort:

$\boxed{\textbf{A}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsch**; $\boxed{\textbf{C}}$ **wahr**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsch**.

Lösung: Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gelten

$$x_n = \int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_0^2\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1}\cdot\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{8n}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{8n}.$$

Da $184 = 8\cdot 23$ ist, schließt man, dass nur die Aussagen $\boxed{\textbf{A}}$ und $\boxed{\textbf{C}}$ wahr sind.