UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Admitere 2022
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ: Problemele pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat pe formularul special de pe foaia de concurs. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parţială din regulamentul concursului.

1. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+3n+2}\right)^{n/3}$ este

A e^2; B $e-2$; C $\dfrac{1}{e}$; D e^{-2}.

2. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\operatorname{arctg} x}{x^2}$ este

A 0; B $\dfrac{1}{2}$; C 1; D $\dfrac{3}{2}$.

3. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x}+2x+1$ în punctul de abscisă $x=0$ este

A $5x-y+2=0$; B $5x+y-2=0$; C $x-5y+2=0$; D $x+5y-2=0$.

4. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,-1)$. Ecuaţia dreptei ce trece prin punctul M şi are panta 3 este:

A $3x-y+4=0$; B $3x-y-4=0$; C $3x+y+4=0$; D $-3x+y-4=0$.

5. Dacă măsura unghiului A este cuprinsă între 540° şi 720°, iar $\cos A=-\dfrac{7}{25}$, atunci care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte?

A $\sin\dfrac{A}{2}=-\dfrac{4}{5}$; B $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{5}$; C $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{4}{5}$; D $\cos\dfrac{A}{2}=-\dfrac{3}{5}$.

6. Considerăm vectorii $\vec{u}=\vec{i}-(a+2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=a\,\vec{i}-3\,\vec{j}$, unde $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versorii axelor de coordonate Ox respectiv Oy în sistemul cartezian xOy. Dacă vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari, atunci valoarea parametrului $a\in\mathbb{R}$ poate fi:

A $a=-3$; B $a=1$; C $a=-1$; D $a=3$.

7. Suma coeficienților puterilor impare ale lui x din dezvoltarea binomului $(1+x)^{1011}$ este:

A 2^{2022}; B 2^{505}; C 2^{1010}; D 2^{1011}.

8. Dacă $1+5+9+\ldots+x=496$, unde termenii care se însumează în membrul stâng sunt în progresie aritmetică, atunci:

A $x=21$; B $x=41$; C $x=61$; D $x=81$.

9. Numărul complex $(1-i)^{2022}$ este egal cu:

A 2^{1011}; B -2^{1011}; C $-2^{1011}i$; D $2^{1011}i$.

10. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}\,\mathrm{d}x$ este

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $1+\sqrt{2}$.

11. Funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x}$, are ca asimptotă spre $+\infty$ dreapta de ecuaţie

$\boxed{\text{A}}$ $y=-1$; $\boxed{\text{B}}$ $y=2x+1$; $\boxed{\text{C}}$ $y=0$; $\boxed{\text{D}}$ $y=2x+2$.

12. Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + 2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + n\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\right)$ este

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ e; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; $\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{e}-1$.

13. Fie $ABCD$ un paralelogram. Considerăm punctele E şi F astfel încât $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AD}$. Care dintre următoarele relaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ $\overrightarrow{FE} = 3\,\overrightarrow{CE}$; $\boxed{\text{B}}$ $\overrightarrow{FE} = 2\,\overrightarrow{CE}$; $\boxed{\text{C}}$ $\overrightarrow{FC} = 2\,\overrightarrow{CE}$; $\boxed{\text{D}}$ $\overrightarrow{FC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CE}$.

14. Fie ABC un triunghi oarecare cu proprietatea că $a > b > c$, unde am notat $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Care dintre următoarele relaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a-b}{a+b}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a-b}{c}$.

15. Într-un triunghi ABC ştim că măsurile unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ (în această ordine) sunt în progresie aritmetică, iar, dacă notăm cu a, b, c lungimile laturilor opuse acestor unghiuri, avem $3a^2 = 2b^2$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ $\widehat{A} = 45°$; $\boxed{\text{B}}$ $\widehat{C} = 75°$; $\boxed{\text{C}}$ $\widehat{C} = 45°$; $\boxed{\text{D}}$ $\widehat{A} = 60°$.

16. Fie în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2\sqrt[3]{(x^2+a)^2} - 3\sqrt[3]{x^2+a} - 2 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Dacă $a = 8$, atunci $x = 0$ este o soluţie a ecuaţiei;

$\boxed{\text{B}}$ Ecuaţia are soluţii pentru orice $a \le -\dfrac{1}{8}$;

$\boxed{\text{C}}$ Ecuaţia are soluţii pentru orice $a \ge -8$;

$\boxed{\text{D}}$ Ecuaţia are soluţii pentru orice $a \le 8$.

17. Fie sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ -4x + y = 3, \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Sistemul este compatibil determinat pentru orice $a > 0$;

$\boxed{\text{B}}$ Când sistemul este compatibil determinat, soluţia sa nu depinde de a;

C Există o valoare a pentru care sistemul este compatibil nedeterminat;

D Există o valoare a pentru care sistemul este incompatibil.

18. Un grup de 11 copii vrea să joace fotbal. Pentru aceasta, copiii aleg un arbitru dintre ei, apoi dintre ceilalţi formează 2 echipe denumite X şi Y, fiecare având câte 5 jucători. În câte moduri pot face acest lucru?

A 462; B 2310; C 2772; D 5082.

19. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru, iar $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = x^2 - 2\ln x + m$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Funcţia f are exact un punct de maxim global.

B Dacă $m = -2022$, atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are exact două soluţii reale.

C Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f este injectivă.

D Există $m \in \mathbb{R}$ minim cu proprietatea că $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in (0,\infty)$.

20. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = ax^3 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se ştie că tabelul de variaţie al lui f este cel prezentat mai jos.

x	$-\infty$			-1			1			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	10	$\searrow$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Atunci valoarea sumei $|a| + |b| + |c|$ este

A 11; B 13; C 20; D 14.

21. Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln\left(1 - \sqrt{t}\right) \mathrm{d}t}{x^3}$ este

A 0; B $-\dfrac{1}{3}$; C $-\dfrac{2}{3}$; D $-\infty$.

22. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, iar a şi b două numere reale astfel încât $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{CF}$. Atunci numărul $b - 2a$ este egal cu:

A -3; B 3; C -1; D 1.

23. Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile $A(1,3)$, $B(-1,-5)$ şi $C(2,1)$. Fie D punctul situat pe segmentul BC astfel încât $\dfrac{BD}{DC} = 2$. Notăm cu d distanţa de la punctul D la înălţimea din vârful B al triunghiului ABC. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Coordonatele punctului D sunt $(1,-1)$;

B Coordonatele punctului D sunt $(0,-3)$;

C $d = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$;

D $d = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

24. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ştiind că $x = 2$ este o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$, care dintre numerele următoare sunt de asemenea soluţii ale acestei ecuaţii?

A $-1 - \sqrt{11}$; B $-1 + \sqrt{11}$; C $1 - \sqrt{13}$; D $1 + \sqrt{13}$.

25. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\left[\frac{x+2}{3}\right] = \frac{x+1}{4},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Dacă notăm cu S mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $S = [-9, 3]$; B $S = \{-9, -5, -1, 3\}$;
C $S = [-5, 3]$; D $S = \{-5, -1, 3\}$.

26. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi definim legea de compoziţie $x * y = xy - x - y + 2$. Ştiind că legea este asociativă, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $(1 * 2) * 4 = 8$;

B Operaţia admite element neutru;

C Există exact două elemente simetrizabile în $(\mathbb{Z}, *)$;

D $(\mathbb{Z}, *)$ este grup.

27. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim operaţiile: $x \perp y = x + y - 1$, $x * y = x + y - xy$. Ştiind că $(\mathbb{R}, \perp, *)$ este corp şi funcţia $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, \perp, *)$, $f(x) = ax + b$, este izomorfism de corpuri, unde $a, b \in \mathbb{R}$, care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $a = b = 1$; B $a = -1$, $b = 1$; C $a = 1$, $b = -1$; D $a = 0$, $b = 1$.

28. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton; B $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$; C $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = 0$; D $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

29. Într-un paralelogram lungimile laturilor sunt egale cu 5, respectiv 3, iar produsul lungimilor diagonalelor este 32. Notăm cu α măsura unghiului ascuţit al paralelogramului. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Suma pătratelor lungimilor diagonalelor este 68. B $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{33}}{15}$.

C Suma pătratelor lungimilor diagonalelor este 34. D $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{33}}{20}$.

30. Considerăm dreapta (d) $ax + by + c = 0$ $(abc \neq 0)$ şi punctele

$$M_1\left(\frac{b-c}{a}, 0\right), \quad M_2\left(-\frac{b+c}{a}, 0\right), \quad N\left(0, -\frac{c}{b}\right).$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Punctul de intersecţie al dreptei d cu axa Ox este mijlocul segmentului $[M_1M_2]$;

B Dreapta d este paralelă cu axa Ox;

C Punctul de intersecţie al dreptei d cu axa Oy este N;

D Aria triunghiului M_1M_2N este $\left|\dfrac{c}{a}\right|$.