

FELVÉTELI 2022  
MATEMATIKA írásbeli próba  
2. változat

**FONTOS MEGJEGYZÉS: A feladatoknak egy vagy több helyes válasza is lehet, amelyeket a versenyző az erre a célra kapott lapon kell bejelöljön. A feleletválasztós feladatsor értékelése a versenyszabályzat részleges pontozási rendszere alapján történik.**

1. A  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 3n + 2} \right)^{n/3}$  határérték

A  $e^2$ ;  B  $e - 2$ ;  C  $\frac{1}{e}$ ;  D  $e^{-2}$ .

2. A  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{arctg} x}{x^2}$  határérték

A 0;  B  $\frac{1}{2}$ ;  C 1;  D  $\frac{3}{2}$ .

3. Az  $x = 0$  abszcisszájú pontban az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{3x} + 2x + 1$  függvény grafikonjához húzott érintő egyenlete

A  $5x - y + 2 = 0$ ;  B  $5x + y - 2 = 0$ ;  C  $x - 5y + 2 = 0$ ;  D  $x + 5y - 2 = 0$ .

4. Az  $xOy$  Descartes-féle koordináta-rendszerben adott az  $M(1, -1)$  pont. Az  $M$  ponton átmenő és 3 irányítányezőjű egyenes egyenlete

A  $3x - y + 4 = 0$ ;  B  $3x - y - 4 = 0$ ;  C  $3x + y + 4 = 0$ ;  D  $-3x + y - 4 = 0$ .

5. Az  $A$  szög mértéke  $540^\circ$  és  $720^\circ$  között van, és  $\cos A = -\frac{7}{25}$ . Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A  $\sin \frac{A}{2} = -\frac{4}{5}$ ;  B  $\cos \frac{A}{2} = \frac{3}{5}$ ;  C  $\sin \frac{A}{2} = \frac{4}{5}$ ;  D  $\cos \frac{A}{2} = -\frac{3}{5}$ .

6. Adottak az  $\vec{u} = \vec{i} - (a + 2)\vec{j}$  és  $\vec{v} = a\vec{i} - 3\vec{j}$  vektorok, ahol  $\vec{i}$ , illetve  $\vec{j}$  az  $xOy$  Descartes-féle koordináta-rendszer  $Ox$  és  $Oy$  tengelyének egységvektorai. Ha az  $\vec{u}$  és  $\vec{v}$  vektorok kollineárisak, akkor az  $a \in \mathbb{R}$  paraméter egy lehetséges értéke

A  $a = -3$ ;  B  $a = 1$ ;  C  $a = -1$ ;  D  $a = 3$ .

7. Az  $(1 + x)^{1011}$  binomiális kifejtésében azon tagok együtthatóinak összege, amelyekben  $x$  páratlan hatványon szerepel

A  $2^{2022}$ ;  B  $2^{505}$ ;  C  $2^{1010}$ ;  D  $2^{1011}$ .

8. Ha az  $1 + 5 + 9 + \dots + x = 496$  egyenlőség bal oldalán lévő összegben szereplő számok számtani haladványt alkotnak, akkor

A  $x = 21$ ;  B  $x = 41$ ;  C  $x = 61$ ;  D  $x = 81$ .

9. Az  $(1 - i)^{2022}$  komplex szám egyenlő a következő számmal:

- A  $2^{1011}$ ;       B  $-2^{1011}$ ;       C  $-2^{1011}i$ ;       D  $2^{1011}i$ .

10. Az  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} dx$  integrál értéke

- A 0;       B  $\frac{\pi}{2}$ ;       C  $\ln(1 + \sqrt{2})$ ;       D  $1 + \sqrt{2}$ .

11. Az  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$  képlettel értelmezzük. Az  $f$  függvény grafikonjához a  $+\infty$  felé húzott aszimptota egyenlete

- A  $y = -1$ ;       B  $y = 2x + 1$ ;       C  $y = 0$ ;       D  $y = 2x + 2$ .

12. A  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + \dots + ne^{\frac{n}{n}})$  határérték

- A 1;       B e;       C  $\frac{1}{e}$ ;       D  $e - 1$ .

13. Legyen  $ABCD$  egy paralelogramma és legyenek  $E$  és  $F$  azok a pontok, amelyekre  $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$  és  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$ . Az alábbi összefüggések közül melyek igazak?

- A  $\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{CE}$ ;       B  $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{CE}$ ;       C  $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{CE}$ ;       D  $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CE}$ .

14. Az  $ABC$  háromszögben a  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  oldalhosszakra fennállnak az  $a > b > c$  egyenlőtlenségek. Az alábbi összefüggések közül melyek igazak?

- A  $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a - b}{a + b}$ ;  
 B  $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ ;  
 C  $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$ ;  
 D  $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a - b}{c}$ .

15. Az  $ABC$  háromszög  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  és  $\widehat{C}$  szögeinek mértéke (ebben a sorrendben) számtani haladványt alkot, továbbá az ezekkel a szögekkel szembeni oldalak  $a, b, c$  hosszai teljesítik a  $3a^2 = 2b^2$  összefüggést. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A  $\widehat{A} = 45^\circ$ ;       B  $\widehat{C} = 75^\circ$ ;       C  $\widehat{C} = 45^\circ$ ;       D  $\widehat{A} = 60^\circ$ .

16. A valós számok halmazán adott a  $2\sqrt[3]{(x^2 + a)^2} - 3\sqrt[3]{x^2 + a} - 2 = 0$  egyenlet, ahol  $a \in \mathbb{R}$ . Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Ha  $a = 8$ , akkor  $x = 0$  az egyenlet egy megoldása.  
 B Minden  $a \leq -\frac{1}{8}$  esetén az egyenletnek van megoldása.  
 C Minden  $a \geq -8$  esetén az egyenletnek van megoldása.  
 D Minden  $a \leq 8$  esetén az egyenletnek van megoldása.

17. Adott a következő egyenletrendszer, ahol  $a \in \mathbb{R}$  egy paraméter:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ -4x + y = 3 \end{cases} .$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az egyenletrendszer határozott és kompatibilis, minden  $a > 0$  esetén.  
 B Amikor az egyenletrendszer határozott és kompatibilis, akkor a megoldás nem függ az  $a$  paramétertől.  
 C Az  $a$  paraméternek létezik olyan értéke, amelyre az egyenletrendszer határozatlan és kompatibilis.  
 D Az  $a$  paraméternek létezik olyan értéke, amelyre az egyenletrendszer inkompatibilis.

18. Egy 11 gyerekből álló csoport futballozni szeretne. Ehhez kiválasztanak maguk közül egy bírót, majd a többi gyerek két 5 fős,  $X$  és  $Y$  elnevezésű csapatot alkot. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

- A 462;  B 2310;  C 2772;  D 5082.

19. Az  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $f(x) = x^2 - 2 \ln x + m$  képlettel értelmezzük, ahol  $m \in \mathbb{R}$  egy paraméter. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az  $f$  függvénynek egyetlen egy globális maximumpontja van.  
 B Ha  $m = -2022$ , akkor az  $f(x) = 0$  egyenletnek pontosan két valós megoldása van.  
 C Létezik  $m \in \mathbb{R}$ , amelyre az  $f$  függvény injektív.  
 D Létezik olyan legkisebb  $m \in \mathbb{R}$ , amelyre fennáll az  $f(x) \geq 0$  egyenlőtlenség, minden  $x \in (0, \infty)$  esetén.

20. Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $f(x) = ax^3 + bx + c$  képlettel értelmezzük, ahol  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Az  $f$  függvény változási táblázata alább látható.

$x$	$-\infty$		$-1$		$1$		$\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10$	$\searrow$	$2$	$\nearrow$	$\infty$

Ekkor az  $|a| + |b| + |c|$  összeg értéke

- A 11;  B 13;  C 20;  D 14.

21. A  $\lim_{x \searrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 - \sqrt{t}) dt}{x^3}$  határérték

- A 0;  B  $-\frac{1}{3}$ ;  C  $-\frac{2}{3}$ ;  D  $-\infty$ .

22. Legyen  $ABCDEF$  egy szabályos hatszög, továbbá  $a$  és  $b$  két valós szám úgy, hogy  $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{CF}$ . Ekkor a  $b - 2a$  értéke

- A  $-3$ ;  B  $3$ ;  C  $-1$ ;  D  $1$ .

23. Az  $ABC$  háromszög csúcsai  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, -5)$  és  $C(2, 1)$ . Legyen  $D$  a  $BC$  oldal azon pontja, amelyre  $\frac{BD}{DC} = 2$ . Jelölje  $d$  a  $D$  pont távolságát a háromszög  $B$  csúcsából húzott magasságtól. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A A  $D$  pont koordinátái  $(1, -1)$ .  B A  $D$  pont koordinátái  $(0, -3)$ .  
 C  $d = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ .  D  $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ .

24. Adott a következő függvény:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tudva, hogy  $x = 2$  az  $f(x) = 0$  egyenlet egy megoldása, az alábbi számok közül még melyek megoldásai ennek az egyenletnek?

- A  $-1 - \sqrt{11}$ ;       B  $-1 + \sqrt{11}$ ;       C  $1 - \sqrt{13}$ ;       D  $1 + \sqrt{13}$ .

25. Adott a valós számok halmazán az

$$\left[ \frac{x+2}{3} \right] = \frac{x+1}{4}$$

egyenlet, ahol  $[a]$  az  $a$  valós szám egész részét jelöli. Ha ezen egyenlet megoldásainak halmaza  $S$ , akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A  $S = [-9, 3]$ ;       B  $S = \{-9, -5, -1, 3\}$ ;       C  $S = [-5, 3]$ ;       D  $S = \{-5, -1, 3\}$ .

26. Az egész számok  $\mathbb{Z}$  halmazán értelmezzük az  $x * y = xy - x - y + 2$  műveletet. Ha ismert, hogy ez a művelet asszociatív, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A  $(1 * 2) * 4 = 8$ .  
 B A „ $*$ ” műveletnek van semleges eleme.  
 C A  $(\mathbb{Z}, *)$ -nak pontosan két szimmetrizálható eleme van.  
 D  $(\mathbb{Z}, *)$  egy csoport.

27. A valós számok  $\mathbb{R}$  halmazán értelmezzük az  $x \perp y = x + y - 1$  és az  $x * y = x + y - xy$  műveleteket. Ha ismert, hogy  $(\mathbb{R}, \perp, *)$  egy test és az  $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, \perp, *)$ ,  $f(x) = ax + b$  függvény testizomorfizmus, ahol  $a, b \in \mathbb{R}$ , akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A  $a = b = 1$ ;       B  $a = -1, b = 1$ ;       C  $a = 1, b = -1$ ;       D  $a = 0, b = 1$ .

28. Minden  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén legyen  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ . Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat monoton.       B  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .       C  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 0$ .       D  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ .

29. Egy paralelogramma oldalainak hossza 5, illetve 3, míg átlói hosszának szorzata 32. Jelölje  $\alpha$  a paralelogramma hegyes szögének mértékét. Ekkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az átlók hosszának négyzetösszege 68.       B  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{15}$ .  
 C Az átlók hosszának négyzetösszege 34.       D  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{20}$ .

30. Adott a  $(d)$   $ax + by + c = 0$  egyenes, ahol  $abc \neq 0$ , továbbá adottak az

$$M_1 \left( \frac{b-c}{a}, 0 \right), \quad M_2 \left( -\frac{b+c}{a}, 0 \right), \quad N \left( 0, -\frac{c}{b} \right)$$

pontok. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A A  $d$  egyenes és az  $Ox$  tengely metszéspontja egybeesik az  $[M_1M_2]$  szakasz felezőpontjával.  
 B A  $d$  egyenes párhuzamos az  $Ox$  tengellyel.  
 C A  $d$  egyenes és az  $Oy$  tengely az  $N$  pontban metszi egymást.  
 D Az  $M_1M_2N$  háromszög területe  $\left| \frac{c}{a} \right|$ .