

Zulassung 2022  
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

**WICHTIGER HINWEIS:** Die gestellten Aufgaben können eine oder mehrere richtige Antworten haben, die der Kandidat auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angeben muss. Die Bewertung der gegebenen Antworten erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung festgesetzten Benotungssystem.

1. Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 3n + 2} \right)^{n/3}$  ist

- A  $e^2$ ;                       B  $e - 2$ ;                       C  $\frac{1}{e}$ ;                       D  $e^{-2}$ .

2. Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \arctg x}{x^2}$  ist

- A 0;                       B  $\frac{1}{2}$ ;                       C 1;                       D  $\frac{3}{2}$ .

3. Die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{3x} + 2x + 1$ , im Punkt mit der Abszisse  $x = 0$  ist

- A  $5x - y + 2 = 0$ ;                       B  $5x + y - 2 = 0$ ;                       C  $x - 5y + 2 = 0$ ;                       D  $x + 5y - 2 = 0$ .

4. Im kartesischen Koordinatensystem  $xOy$  ist der Punkt  $M(1, -1)$  gegeben. Die Gleichung der Geraden, die den Punkt  $M$  enthält und deren Steigung 3 beträgt, ist:

- A  $3x - y + 4 = 0$ ;                       B  $3x - y - 4 = 0$ ;                       C  $3x + y + 4 = 0$ ;                       D  $-3x + y - 4 = 0$ .

5. Das Maß des Winkels  $A$  liegt zwischen  $540^\circ$  und  $720^\circ$ . Überdies gilt  $\cos A = -\frac{7}{25}$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $\sin \frac{A}{2} = -\frac{4}{5}$ .                       B  $\cos \frac{A}{2} = \frac{3}{5}$ .                       C  $\sin \frac{A}{2} = \frac{4}{5}$ .                       D  $\cos \frac{A}{2} = -\frac{3}{5}$ .

6. Gegeben seien die Vektoren  $\vec{u} = \vec{i} - (a+2)\vec{j}$  und  $\vec{v} = a\vec{i} - 3\vec{j}$ , wobei  $\vec{i}$  und  $\vec{j}$  die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Koordinatenachsen  $Ox$ , beziehungsweise  $Oy$ , im kartesischen Koordinatensystem  $xOy$  bezeichnen. Falls die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  kollinear sind, dann kann der Parameter  $a \in \mathbb{R}$  den folgenden Wert haben:

- A  $a = -3$ ;                       B  $a = 1$ ;                       C  $a = -1$ ;                       D  $a = 3$ .

7. Die Summe der Binomialkoeffizienten der in der Entwicklung des Binoms  $(1 + x)^{1011}$  vorkommenden Potenzen von  $x$  mit ungeradem Exponenten ist:

- A  $2^{2022}$ ;                       B  $2^{505}$ ;                       C  $2^{1010}$ ;                       D  $2^{1011}$ .

8. Gilt  $1 + 5 + 9 + \dots + x = 496$ , wobei die Summanden der linken Seite aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge sind, dann ist:

- A  $x = 21$ ;                       B  $x = 41$ ;                       C  $x = 61$ ;                       D  $x = 81$ .

9. Die komplexe Zahl  $(1 - i)^{2022}$  ist gleich mit:

- A  $2^{1011}$ ;                       B  $-2^{1011}$ ;                       C  $-2^{1011}i$ ;                       D  $2^{1011}i$ .

10. Der Wert des Integrals  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} dx$  ist

- A 0;                       B  $\frac{\pi}{2}$ ;                       C  $\ln(1 + \sqrt{2})$ ;                       D  $1 + \sqrt{2}$ .

11. Die Funktion  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$  definiert. Diese Funktion hat als Asymptote bei  $+\infty$  die Gerade mit der Gleichung

- A  $y = -1$ ;                       B  $y = 2x + 1$ ;                       C  $y = 0$ ;                       D  $y = 2x + 2$ .

12. Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + \dots + ne^{\frac{n}{n}})$  beträgt

- A 1;                       B e;                       C  $\frac{1}{e}$ ;                       D  $e - 1$ .

13. Es sei  $ABCD$  ein Parallelogramm. Die Punkte  $E$  und  $F$  werden so gewählt, dass  $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$  gelten. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{CE}$ .                       B  $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{CE}$ .                       C  $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{CE}$ .                       D  $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CE}$ .

14. Es sei  $ABC$  ein Dreieck mit  $a > b > c$ , wobei die Bezeichnungen  $BC = a$ ,  $CA = b$  und  $AB = c$  verwendet wurden. Welche der folgenden Gleichheiten sind wahr?

- A  $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a - b}{a + b}$ .                       B  $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ .  
 C  $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$ .                       D  $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a - b}{c}$ .

15. In einem Dreieck  $ABC$  sind die Maße der Winkel  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  und  $\hat{C}$  (in dieser Reihenfolge) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge. Mit  $a, b, c$  werden die Längen der Seiten bezeichnet, die diesen Winkeln gegenüberliegen. Es wird angenommen, dass  $3a^2 = 2b^2$  gilt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $\hat{A} = 45^\circ$ .                       B  $\hat{C} = 75^\circ$ .                       C  $\hat{C} = 45^\circ$ .                       D  $\hat{A} = 60^\circ$ .

16. In  $\mathbb{R}$  sei die Gleichung  $2\sqrt[3]{(x^2 + a)^2} - 3\sqrt[3]{x^2 + a} - 2 = 0$  gegeben, wobei  $a \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Ist  $a = 8$ , dann ist  $x = 0$  eine Lösung der Gleichung.  
 B Für alle  $a \leq -\frac{1}{8}$  hat die Gleichung Lösungen.  
 C Für alle  $a \geq -8$  hat die Gleichung Lösungen.  
 D Für alle  $a \leq 8$  hat die Gleichung Lösungen.

17. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ -4x + y = 3 \end{cases}$$

mit  $a \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Das System ist für alle  $a > 0$  eindeutig lösbar.  
 B Ist das System eindeutig lösbar, so hängt seine Lösung nicht von  $a$  ab.

C Es gibt einen Wert  $a$ , für den das System unendlich viele Lösungen hat.

D Es gibt einen Wert  $a$ , für den das System keine Lösung hat.

18. Eine Gruppe von 11 Kindern möchte Fußball spielen. Zu diesem Zweck wählen die Kinder zuerst einen Schiedsrichter aus dieser Gruppe. Danach werden die anderen Kinder in 2 mit  $X$  und  $Y$  bezeichnete Mannschaften von je 5 Spielern eingeteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

A 462.

B 2310.

C 2772.

D 5082.

19. Die Funktion  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch  $f(x) = x^2 - 2 \ln x + m$  definiert, wobei  $m \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Funktion  $f$  hat genau eine globale Maximalstelle.

B Ist  $m = -2022$ , dann hat die Gleichung  $f(x) = 0$  genau zwei reelle Lösungen.

C Es existiert ein  $m \in \mathbb{R}$ , so dass  $f$  injektiv ist.

D Es gibt eine kleinste Zahl  $m \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in (0, \infty)$  gilt.

20. Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch  $f(x) = ax^3 + bx + c$  definiert, wobei  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt. Es ist bekannt, dass:

$x$	$-\infty$			$-1$			$1$			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$10$	$\searrow$	$\searrow$	$2$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Dann ist die Summe  $|a| + |b| + |c|$  gleich mit

A 11;

B 13;

C 20;

D 14.

21. Der Grenzwert  $\lim_{x \searrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 - \sqrt{t}) dt}{x^3}$  ist

A 0;

B  $-\frac{1}{3}$ ;

C  $-\frac{2}{3}$ ;

D  $-\infty$ .

22. Gegeben seien ein regelmäßiges Sechseck  $ABCDEF$  sowie zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$ , so dass  $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{CF}$ . Dann ist die Zahl  $b - 2a$  gleich mit:

A  $-3$ ;

B  $3$ ;

C  $-1$ ;

D  $1$ .

23. Es sei  $ABC$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, -5)$  und  $C(2, 1)$ . Der Punkt  $D$  wird auf der Strecke  $BC$  so gewählt, dass  $\frac{BD}{DC} = 2$  gilt. Der Abstand zwischen  $D$  und der Höhe aus dem Eckpunkt  $B$  des Dreiecks  $ABC$  sei  $d$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Koordinaten von  $D$  sind  $(1, -1)$ .

B Die Koordinaten von  $D$  sind  $(0, -3)$ .

C  $d = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ .

D  $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ .

24. Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

definiert. Es wird als bekannt angesehen, dass  $x = 2$  eine Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$  ist. Welche der folgenden Zahlen sind ebenfalls Lösungen dieser Gleichung?

A  $-1 - \sqrt{11}$ .

B  $-1 + \sqrt{11}$ .

C  $1 - \sqrt{13}$ .

D  $1 + \sqrt{13}$ .

25. In  $\mathbb{R}$  sei die Gleichung

$$\left[ \frac{x+2}{3} \right] = \frac{x+1}{4}$$

gegeben, wobei  $[a]$  den ganzen Teil der reellen Zahl  $a$  darstellt. Mit  $S$  wird die Lösungsmenge dieser Gleichung bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $S = [-9, 3]$ .       B  $S = \{-9, -5, -1, 3\}$ .  
 C  $S = [-5, 3]$ .       D  $S = \{-5, -1, 3\}$ .

26. Die Verknüpfung  $x * y = xy - x - y + 2$  wird in der Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen definiert. Es wird als bekannt angesehen, dass diese Operation assoziativ ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A  $(1 * 2) * 4 = 8$ .  
 B Die Operation hat ein neutrales Element.  
 C Es gibt genau zwei umkehrbare Elemente in  $(\mathbb{Z}, *)$ .  
 D  $(\mathbb{Z}, *)$  ist eine Gruppe.

27. In der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen werden die Verknüpfungen  $x \perp y = x + y - 1$  und  $x * y = x + y - xy$  definiert. Es ist bekannt ist, dass  $(\mathbb{R}, \perp, *)$  ein Körper ist. Falls die Funktion  $f: (\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, \perp, *)$ ,  $f(x) = ax + b$ , mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , ein Körperisomorphismus ist, entscheide man, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

- A  $a = b = 1$ .       B  $a = -1, b = 1$ .       C  $a = 1, b = -1$ .       D  $a = 0, b = 1$ .

28. Für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  sei  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Folge  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ist monoton.       B  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .       C  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 0$ .       D  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ .

29. In einem Parallelogramm betragen die Längen der Seiten jeweils 5 und 3. Das Produkt der Längen der Diagonalen ist 32. Mit  $\alpha$  wird der spitze Winkel des Parallelogramms bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Summe der Quadrate der Längen der Diagonalen ist 68.       B  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{15}$ .  
 C Die Summe der Quadrate der Längen der Diagonalen ist 34.       D  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{20}$ .

30. Gegeben seien die Gerade  $(d)$   $ax + by + c = 0$  (mit  $abc \neq 0$ ) sowie die Punkte

$$M_1 \left( \frac{b-c}{a}, 0 \right), \quad M_2 \left( -\frac{b+c}{a}, 0 \right), \quad N \left( 0, -\frac{c}{b} \right).$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Der Schnittpunkt der Geraden  $d$  mit der  $Ox$ -Achse ist der Mittelpunkt der Strecke  $[M_1M_2]$ .  
 B Die Gerade  $d$  ist parallel zur  $Ox$ -Achse.  
 C Der Schnittpunkt der Geraden  $d$  mit der  $Oy$ -Achse ist  $N$ .  
 D Der Flächeninhalt des Dreiecks  $M_1M_2N$  beträgt  $\left| \frac{c}{a} \right|$ .